APONTAMENTOS DE ALGEBRA

667-1923

19-C-7

MATHEMATICA OU LOGICA

ELEMENTOS DE ALGEBRA ELEMENTAR

PELO

Major de engenheiros M. DE A. CAVALCANTI

Universidade de S. Paulo
Faculdade de
Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática
7164

1861/70

BIBLIOTECA
Prof. Raul Briquet

RIO DE JANEIRO
IMPRENSA NACIONAL
1930

7164

OBRAS DO MESMO AUTOR

APONTAMENTOS DE ARITHMETICA — 1907 — (1ª edição portugueza) Esgotada.

CALCUL ARITHMETIQUE — 1916 — (1ª edição franceza).

APONTAMENTOS DE GEOMETRIA — (2 volumes; o 2º em impressão).

INICIAÇÃO PHILOSOPHICA — 1914.

EDUCAÇÃO SOB O PONTO DE VISTA RELIGIOSO — 1919.

LOGICA — (de collaboração com o General Gomes de Castro; não concluido).

Falleceu em Liverpool a 16 de Julho de 1920.

——«*»——

ALMEIDA CAVALCANTI

Nada mais edificante do que uma nobre vida. Tal se apresenta a de Almeida Cavalcanti. Foi rico de afeições e virtudes domesticas; pertenceu a essa "elite" que em 89 acompanhou Benjamin Constant na destruição do throno, e em 93 apoiou Floriano Peixoto na defesa da Republica. Mostrou-se, na mais completa accepção do termo, um cidadão.

Não foi, porém, nas pugnas a favor de elevados ideaes politicos que se revelou, principalmente, o nosso illustre compatriota. A sua verdadeira vocação foi pedagogica. Cavalcanti patenteou-se, acima de tudo, professor.

Renovar a educação é o problema capital dos nossos dias. Antes de transformar instituições é necessario regenerar costumes; isto não é possivel sem o fundamento de solidas convicções. D'ahi, o alcance da instrucção, da instrucção scientifica bem dirigida. As convicções philosophicas de Cavalcanti faziam-lhe comprehender que, formando com apuro a mentalidade dos seus alumnos, prepara homens, cidadãos. Os ensinamentos de moral e de civismo que resultam mesmo de simples lições de mathematica, encontravam no preclaro professor um apoio efficaz: o exemplo.

Almeida Cavalcanti foi um abnegado. A sua rara modestia prohibia-lhe de ostentar um vasto saber adquirido com esforço esclarecido e incessante.

O que era sua lucida intelligencia dizem de sobra as magnificas lições onde se patenteava a influencia decisiva do mestre da "Synthese Subjectiva". Esta impulsionou preciosa aptidão coordenadora, servida por uma vigorosa clareza.

Foi feliz a formação didactica de Cavalcanti; teve opportunidade de dar lições theoricas e de explanar assumptos profissionaes. Adquiriu assim uma grande experiencia inductiva e deductiva. Sente-se que a variedade dos assumptos por elle tratados concorreu para dar largueza a um espirito dotado de natural vivacidade. Escapou á tendencia para abusar da deducção, muito commum naquelles que se restringem a estudos mathematicos. A par disso vê-se, através de citações opportunas, que jámais descurou do cultivo esthetico: era conhecedor do thesouro poetico da Humanidade.

O conjunto dessas condições deu ao saudoso compatriota um lugar de relevo no professorado brasileiro. Discipulo de Augusto Comte, o nosso concidadão jamais se limitou a preoccupações puramente intellectuaes. Elle comprehendia o ensino como uma contribuição para o renovamento social. Frequentemente, em seus trabalhos, mostrou visar a instrucção da mulher e do Proletariado !

Semelhante vida é merecedora de apreço e de imitação.

Universidade de S. Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

ERRATA

PAG.	LINHA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
7	1	ponto	o ponto
8	7	sabresahir	sobressahir
19	9	presentisse	pressentisse
34	29	Claireaut	Clairaut
42	23	»	»
48	22	disignarmos	designarmos
51	20	$+....1\beta^m$	$+....+1\beta^m$
75	12	linhuagem	linguagem
115	24	nutação.	mutação
171	16	ei	lei
206	17	$8c^2d^{\frac{1}{2}}$	$-8c^2d^{\frac{1}{2}}$
235	28	$2-3=1$	$2-3=-1$
236	1	su	seu
242	13	$+a^{-1}+cx^{-1}$	$+a^{-1}cx^{-1}$
270	23	segundo	segunda
371	3	substrahir	subtrahir
489	16	4ac	$-4ac$
497	18	$-x^2+-px+-q$. .	x^2+px+q ???
568	26	Claireaut	Clairaut
611	32	enuneiado	enunciado
614	5	duas.	idéas
660	24	processo	excesso

39

Universidade de S. Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

INDICE

PRIMEIRA PARTE

Apreciação geral

CAPITULO I

CONCEPÇÃO GERAL DO CALCULO ALGEBRICO; SUA ORIGEM, OBJECTO E DESTINO, DONDE REFUTAÇÃO DO MATERIALISMO ABSTRACTO.

§§	Assumptos	Pags.
§ 1.	Origem do Calculo Algebrico...	3
§ 2.	Caracter geral das transformações algebricas: objecto e destino da Algebra.....	10
§ 3.	Alcance do Calculo Algebrico, Refutação do materialismo abstracto	18

CAPITULO II

APRECIAÇÃO DA LINGUAGEM ALGEBRICA

§ 4.	Necessidade do exame previo da linguagem algebrica	26
§ 5.	Caracterisação do alcance da linguagem algebrica mediante seu confronto com a linguagem geral	34
§ 6.	Applicação dos symbolos algebricos para exprimir as relações numericas resultantes do Calculo Arithmetico. Duplo aperfeiçoamento da linguagem algebrica.....	51

SEGUNDA PARTE

Instituição fundamental da algebra

CAPITULO III

APRECIAÇÃO DAS RELAÇÕES ELEMENTARES QUE PERMITTEM SUBORDINAR O ABSTRACTO AO CONCRETO

§§	Assumptos	Pags.
§ 7.	Apreciação geral das leis elementares que permittem subordinar o abstracto ao concreto (formações simples)	73
§ 8.	Estudo especial das formações simples.....	87
§ 9.	Combinação das formações simples: formações compostas	101

CAPITULO IV

FORMAS QUE TÊM TOMADO AS RELAÇÕES ALGEBRICAS: FÓRMA DE PROPORÇÃO E FÓRMA DE EQUAÇÃO; FÓRMA DE DESIGUALDADE E FÓRMA DE IGUALDADE; VANTAGENS DESTA ULTIMA.

§ 10.	Relações sob a fórma de proporção.....	117
§ 11.	Relações sob a fórma de equação; fórma de desigualdade e fórma de igualdade; vantagens desta ultima	133
§ 12.	Fórma que convem normalmente ás relações algebricas	147

CAPITULO V

GENERALIDADE DAS RELAÇÕES ALGEBRICAS; MEIO DE RECONHECER SEU SENTIDO CONCRETO; DISTINCÇÃO ENTRE AS RELAÇÕES DIRECTAS E INDIRECTAS, DONDE DIVISÃO TOTAL DO CALCULO ALGEBRICO.

§ 13.	Generalisação algebrica	156
§ 14.	Sentido concreto das equações: lei da mudança de unidade ou da homogeneidade.....	170
§ 15.	Distincção das relações algebricas em directas e indirectas, donde divisão geral do calculo das relações	179

TERCEIRA PARTE

Coordenação especial da algebra

CAPITULO VI

RELAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 1° GRAU A' UMA INCOGNITA; TRANSFORMAÇÃO DAS FÓRMULAS OBTIDAS

§§	Assumptos	Pags.
§ 16.	Resolução das equações do 1° grau a uma incognita	189
§ 17.	Transformação das formulas mediante a addição, subtracção e multiplicação algebricas.....	202
§ 18.	Transformação das formulas pela divisão algebrica	233

CAPITULO VII

RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 1° GRAU A MAIS DE UMA INCOGNITA (CALCULO DETERMINADO)

§ 19.	Resolução algebrica de um systhema de equações a igual numero de incognitas.....	265
§ 20.	Transformação das formulas pelo emprego do maior divisor commum algebrico.....	299
§ 21.	Resolução de alguns problemas por meio das equações do 1° grau.....	315

CAPITULO VIII

TRANSFORMAÇÕES ALGEBRICAS BASEADAS NA LEI BINOMINAL DE NEWTON: APPLICAÇÃO DESTA LEI A' POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO ARITHMETICA E ALGEBRICA.

§ 22.	Instituição da lei de Newton: sua applicação a potencias quaesquer de um binomio e de um polynomio	331
§ 23.	Applicação da lei binominal á extracção das raizes numericas de um indice qualquer.....	359
§ 24.	Extracção das raizes algebricas.....	381

CAPITULO IX

RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 1° GRAU QUANDO O CALCULO É INDETERMINADO

§§	Assumptos	Pags.
§ 25.	Caso do 1° grau de indeterminação: methodo ordinario para resolvel-o, duplo modo de effectual-o	403
§ 26.	Continuação do calculo indeterminado do 1° grau. Methodo baseado no emprego das fracções continuas; instituição desta especie de fracções	434
§ 27.	Continuação do calculo indeterminado. Diversos graus de indeterminação: sua reducção ao caso fundamental. Problemas e exemplos. Applicação á regra da mistura ou liga.....	463

CAPITULO X

RESOLUÇÃO ALGEBRICA DAS EQUAÇÕES DO 2° GRAU A UMA INCOGNITA; DUPLICIDADE DE SUAS RAIZES VERIFICADA PELO METHODO DOS COEFFICIENTES INDETERMINADOS; RELAÇÕES ENTRE OS COEFFICIENTES E AS RAIZES. DISCUSSÃO DA FORMULA RESOLUTIVA; DETERMINAÇÃO DOS ESTADOS MAXIMA E MINIMA DE UMA FORMAÇÃO DO 2° GRAU. CASO DE DUAS EQUAÇÕES A DUAS INCOGNITAS. PROBLEMAS E APPLICAÇÕES.

§ 28.	Resolução das equações do 2° grau a uma incognita; duplicidade de suas raizes; relações entre estas e os coefficientes.....	484
§ 29.	Discussão da formula geral das raizes da equação do 2° grau; determinação das maxima e minima de uma formação do 2° grau. Applicações e problemas	508
§ 30.	Resolução das equações do 2° grau no caso de um systema de igual numero de incognitas; sua inexequibilidade em vista do gráu da equação final. Exemplos e problemas do 2° gráu.....	535

CAPITULO XI

RESOLUÇÃO ALGEBRICA DAS EQUAÇÕES DO 3° E 4° GRAUS A UMA INCOGNITA; IMPOSSIBILIDADE DE RESOLVER AS DE GRAU SUPERIOR, SALVO EM CASOS EXCEPCIONAES.

§ 31.	Resolução algebricas das equações do 3° gráu a uma incognita	565

§§	Assumptos	Pags.
§ 32.	Resolução algebrica das equações do 4° gráu a uma incognita	590
§ 33.	Impossibilidade da resolução de equações algebricas superiores ao 4° grau, salvo em casos excepcionaes; exame desses casos: equações reciprocas, quatrinomias, trinomias e binomias	610

PARTE COMPLEMENTAR

CAPITULO XII

DAS PROGRESSÕES EM GERAL E ESPECIALMENTE GEOMETRICAS: SEU CONFRONTO COM AS ARITHMETICAS, DONDE A INSTITUIÇÃO DOS LOGARITHMOS; PROPRIEDADES DESTES E SEU EMPREGO PARA RESOLVER AS EQUAÇÕES EXPONENCIAES. APPLICAÇÕES.

§ 34.	Theoria das progressões em geral e especialmente geometricas	633
§ 35.	Comparação entre as progressões usuaes, por quociente e por differença, d'onde instituição arithmetica dos logarithmos; suas propriedades. Construcção e uso das taboas de logarithmos..	—
§ 36.	Identidade das concepções arithmetica e algebrica dos logarithmos e emprego desta na resolução das equações exponenciaes. Applicação aos problemas de juros compostos; annuidade, etc.....	—

CAPITULO XIII

THEORIA GERAL DAS SERIES. INSTITUIÇÃO DAS SERIES EXPONENCIAL E LOGARITHMICA. USO ALGEBRICO E ARITHMETICO DAS SERIES.

§ 37.	Theoria geral das series.....	672
§ 38.	Instituição das series exponencial e logarithmica, Uso algebrico das séries.....	688
§ 39.	Uso arithmetico das series e especialmente da exponencial e da logarithmica.....	—

CONCLUSÃO

Resumo, juizo e resultados..... —

APPENDICE

Applicações da algebra dos antigos (theoria das proporções) á industria, ao commercio e aos bancos. ..... —

I. Considerações geraes sobre o emprego das proporções. Regra de tres simples e composta, sua applicação ás questões de cambio directo..... —

II. Regra conjuncta, sua applicação ás questões de cambio indirecto. Regra de juros simples; porcentagem e prazo médio. Juros médios..... —

III. Regra de desconto; desconto por dentro ou racional e desconto por fóra ou commercial. Divisão proporcional das grandezas; regra de companhia ou de sociedade. Outras applicações. Regra de falsa posição composta..... 703

Tabellas diversas 711

Alguns dados extrahidos da fé de officio do autor 725

NOTA

Essa obra achava-se na Imprensa Nacional desde o anno de 1909; os paragraphos 35, 36 e 39 bem como a conclusão e parte do appendice foram destruidos no incendio que houve nesse estabelecimento em 1911. Verdade é que se diga que factos diversos contribuiram para esse atrazo e é de toda justiça mencionar a dedicação, habilidade e zelo com que se houveram sempre durante esse tempo todo o pessoal da Imprensa Nacional encarregado do trabalho.

M. de A. Cavalcanti.

Universidade de S. Paulo
Filosofia, [illegible]
Departamento de Matemática

APONTAMENTOS DE ALGEBRA

667-1923

PRIMEIRA PARTE

Apreciação geral

CAPITULO I

CONCEPÇÃO GERAL DO CALCULO ALGEBRICO: SUA ORIGEM, OBJECTO E DESTINO, DONDE REFUTAÇÃO DO MATERIALISMO ABSTRACTO

§ 1º

Origem do calculo algebrico

1 — Começando o estudo do calculo algebrico, devemos ter presente que o fito de todos os nossos esforços theoricos é o conhecimento da Humanidade.

Abordando cada novo termo da escala scientifica, devemos esperar que elle nos habilite melhor para esse conhecimento supremo, que só fica completo na moral.

Todos os outros estudos, sendo apenas preliminares indispensaveis para este estudo definitivo, cumpre que, ao iniciar cada grau encyclopedico, examinemos com cuidado qual o concurso especial que elle realmente presta para esta obra definitiva. E' o que se consegue apreciando: *a*) qual o problema especial que então se propõe; *b*) até que ponto a solução de semelhante problema foi conseguida.

Applicando essas reflexões geraes ao caso do calculo algebrico, concebido como distincto, quer do calculo arithmetico, quer da geometria ou da mecanica, seremos

levados a examinar successivamente: 1º, o objecto preciso de tal calculo; 2º, o alcance effectivo deste no conjuncto do saber humano.

2 — OBJECTO DO CALCULO ALGEBRICO — Afim de comprehender o objecto preciso do calculo algebrico, devemos recordar o que foi dito na lição inicial do calculo arithmetico a respeito do conjuncto da mathematica ou logica.

Mostramos, então, que esta sciencia se propõe a estudar directamente a ordem universal, reduzida aos seus attributos mais simples, que são o *numero*, a *extensão* e o *movimento*. Dahi a decomposição da logica nas tres partes que, sob os nomes de *calculo*, *geometria* e *mecanica*, são respectivamente consagradas ao estudo do numero, da extensão e do movimento.

Mas, vimos tambem que o estudo da extensão e do movimento se nos apresenta como consistindo afinal em apanhar as relações *numericas* a que dá lugar a medida das grandezas que concorrem, quer nos phenomenos geometricos, quer nos mecanicos. Porque sómente taes relações nos podem permittir determinar os valores das grandezas desconhecídas por meio daquelles que se referem ás conhecidas.

Como, porém, esta determinação definitiva, com o auxilio das relações numericas, exige que taes relações sejam transformadas em outras mais simples, concluimos que, no estado final de toda a meditação geometrica ou mecanica, se devem distinguir duas categorias de apreciações numericas: umas preparatorias, tendo em vista transformar as relações numericas consideradas em outras mais simples, e outras definitivas, tendo em vista determinar o valor da combinação numerica resultante. As primeiras, dissemos, constituem o problema geral do *calculo algebrico*, emquanto que as segundas formam o objecto proprio do calculo arithmetico.

3 — Reflictamos agora mais profundamente nessa distincção entre o *calculo dos valores* e o *calculo das re-*

lações, para termos uma noção precisa do destino deste último. Nesse intuito comecemos por examinar a nossa propria concepção do calculo dos valores.

Dissemos que toda a avaliação tem por fim determinar o lugar que occupa um numero na escala numerica quando elle é definido por uma combinação qualquer de numeros dados.

Mas, considerando um numero como fazendo parte da escala numerica, elle é, por sua vez, definido por uma certa combinação de numeros determinados. O lugar que o numero ahi occupa não é assignalado por nenhum signal arbitrario, sinão no caso particularissimo em que se trata de um numero inferior á base.

Dahi em deante, o numero é sempre indicado por uma combinação de outros invariavelmente escolhidos. Isto é, cada numero é representado por *uma somma de productos binarios nos quaes um dos factores é igual a uma certa potencia da base e o outro é sempre um numero inferior á mesma base*.

O numero 1825, por exemplo, é representado por uma vez a terceira potencia de 10, mais oito vezes a segunda potencia de 10, mais duas vezes a primeira potencia de 10 e mais cinco.

No calculo algebrico, uma expressão desta natureza é o que se chama um *polynomio*; cada um dos productos constitue um dos termos do polynomio, ou um *monomio*; e os numeros que multiplicam as potencias da base denominam-se os *coefficientes*.

Para que a formula authentica normal de um numero qualquer tenha sempre um polynomio correspondente, cumpre admittir tambem o zero entre os valores possiveis dos coefficientes dos monomios.

Assim, por exemplo, a expressão de 1073 corresponde á terceira potencia de 10, mais *0* multiplicado pela segunda potencia de 10, mais sete vezes a primeira potencia de 10 e mais tres.

Portanto, em resumo, cada elemento da escala numerica é um polynomio cujos termos são os productos das potencias successivas da base numeral por um coefficiente inferior á mesma base. Isso posto, em vez de dizer que *avaliar é determinar o lugar occupado na escala numerica por um numero ahi definido por uma combinação qualquer de numeros dados*, podemos dizer de ora em diante que — *avaliar é transformar uma combinação qualquer de numeros dados num polynomio daquelle typo, isto é, numa certa combinação determinada.*

4 — Assim, pois, nós reconhecemos que *avaliar* é *transformar* uma *relação* qualquer entre numeros conhecidos em uma certa relação previamente determinada, o que equivale a dizer que todo calculo de valores é um calculo de relações.

Para sentir toda a importancia desta observação, convem notar os diversos gráos do calculo das relações exigidos por cada avaliação: Ha casos em que a combinação proposta já equivale essencialmente ao *polynomio fundamental.*

Ahi a avaliação não consiste propriamente sinão na mudança de nossas disposições mentaes, sem a minima transformação objectiva.

Assim, por exemplo, si propuzermos determinar a somma de 20 com sete, a avaliação reduzir se-á evidentemente a substituir a consideração dos numeros pela da numeração, isto é, a imaginar simplesmente a somma proposta como sendo um dos elementos da escala numerica.

De sorte que, neste caso, não effectuamos nenhuma *transformação* da combinação dada.

Em outros casos, porém, será necessario effectuar uma serie de transformações para conseguir passar da combinação proposta para o polynomio normal.

E' o que se póde verificar tomando casos gradualmente complicados das avaliações estudadas. Então se reconhecerá que, com esse accrescimo de complexidade, o

ponto de vista das relações irá predominando cada vez mais sobre o ponto de vista das avaliações.

Vê-se, portanto, que o conjuncto do calculo dos valores nos revela duas categorias de transformações:

Em umas passa-se immediatamente da combinação entre os numeros dados para o polynomio que define o numero procurado, segundo o lugar que elle occupa na escala numerica; e então o ponto de vista do valor domina os detalhes e o conjuncto.

Em outras, a passagem da combinação proposta para a normal (isto é, para o polynomio que define o numero procurado) é feita por intermedio de uma serie de combinações equivalentes, em escala tanto maior quanto maior é a complexidade da combinação de que se trata; mas ahi o ponto de vista da avaliação affecta apenas os detalhes, sem prevalecer no conjuncto.

5 — Cumpre, finalmente, recordar que as avaliações podem ser suggeridas ou por considerações abstractas, ou por considerações concretas, e especialmente geometricas.

Dahi resulta, portanto, que essas *transformações numericas*, esse calculo das relações póde ter, já uma origem abstracta, já uma origem concreta.

E' assim que na addição, subtracção e multiplicação não nos foram precisas sinão inspirações arithmeticas, e, portanto, abstractas, para instituir a combinação final, isto é, as transformações que nos devem conduzir ao polynomio normal. Mas, na divisão e na extracção da raiz, as inspirações geometricas combinaram-se com as arithmeticas, tornando-se cada vez mais preponderantes á medida que as avaliações se complicam.

6 — Abstrahindo agora do caso particular em que o ponto de vista do valor domina o conjuncto, examinemos o caso geral em que se passa de uma combinação numerica para outra, de *relação* para *relação*.

Em primeiro lugar, o que logo se percebe é que a consideração dos *valores especiaes* dos numeros dados não

entra para coisa alguma no calculo das relações, ou que pelo menos entra para muito pouco.

Afim de dissipar qualquer duvida a este respeito, basta reflectir que os raciocinios são os mesmos, sejam quaes forem os numeros propostos.

O caracter mesmo que toma a linguagem vulgar faz bem sabresahir semelhante circumstancia.

O enunciado de qualquer das regras das avaliações basta, com effeito, para evidenciar que se abstrahe, não só da especie das grandezas, mas ainda dos valores especiaes dos numeros que as precisam.

Por exemplo, considerando a regra para extrahir a raiz quadrada, quando dizemos: divide-se o numero dado em classes de dois algarismos da direita para a esquerda, extrahe-se a raiz quadrada do maior quadrado contido na ultima classe á esquerda e etc. — nenhuma referencia fazemos nós ao valor do numero proposto, que póde ser qualquer.

Si tomassemos qualquer das outras regras, veriamos do mesmo modo que tudo aquillo que a linguagem precisa, se refere ás combinações, ficando vago e indeterminado o que concerne aos valores dos numeros.

De sorte que a arithmetica, que a principio só abstrahe da especie das grandezas, acaba por abstrahir do valor, quando formúla as regras geraes para as avaliações.

Portanto, a propria systematisação das avaliações conduziu a considerar os numeros indeterminadamente, isto é, a combinar os numeros, precisando apenas a natureza das combinações e o facto geral de se tratar de numeros.

De modo que o calculo das relações se nos apresenta como consistindo em transformar as *relações* umas nas outras sem preoccupar-se nem com os valores dos numeros combinados, nem com os valores dos numeros resultantes. Esta dupla abstracção do valor e da especie foi tambem seguida pela geometria.

Mas, a abstracção segundo a origem geometrica deu-

se por uma marcha exactamente inversa áquella seguida pela arithmetica. Nesta, começou-se por abstrahir da especie, para attender sómente ao valor, do qual se acabou por abstrahir tambem. Naquella começou-se por abstrahir do valor para considerar sómente a especie, até que afinal a marcha das descobertas levou tambem a abstrahir desta.

Porque tendo-se verificado que as mesmas combinações numericas correspondiam a casos em que as especies eram outras, foi-se conduzido a abstrahir da propria especie.

O resultado foi, portanto, conceberem-se as grandezas como sendo indeterminadas, abstrahindo por fim, ao mesmo tempo, do valor e da especie, como se dera em arithmetica.

7 — O PONTO DE VISTA QUE DEVE PREVALECER NA APRECIAÇÃO DO CALCULO ALGEBRICO — Mas, desde que, conforme acima diziamos, é-se levado a abstrahir tanto do valor como da especie, o numero torna-se evidentemente uma chimera. Desde então, as combinações entre os numeros ficaram expostas a tornarem-se phantasticas.

Só o confronto dos resultados obtidos com a realidade permitte escolher entre as transformações *uteis* e as *ociosas*.

E essa utilidade tem de ser julgada no ponto de vista do conjuncto das exigencias humanas. Porquanto póde acontecer que *transformações* e *combinações*, sem a minima utilidade immediata sob o ponto de vista *objectivo*, possuam um immenso alcance sob o ponto de vista *subjectivo*.

E' o que se reconhece, notando que as nossas construcções mentaes, para satisfazerem ao seu verdadeiro destino, devem permittir-nos generalisar e systematisar o conjuncto dos nossos conhecimentos quaesquer.

Em resumo, vê-se que não é sob o ponto de vista objectivo que se póde julgar da utilidade do calculo das relações, mas sim sob o ponto de vista subjectivo, como

sendo apto para generalisar e systematisar os nossos conhecimentos, sobretudo aquelles que se referem aos phenomenos geometricos e mecanicos.

§ 2º

Caracter geral das transformações algebricas; objecto e destino da algebra

8 — EXAME DIRECTO DAS TRANSFORMAÇÕES NUMERICAS — Depois de haver reconhecido como o *calculo dos valores* e a *medida da extensão* fizeram surgir o *calculo das relações*, e depois de ter mostrado como o predominio do estudo das relações conduziu á concepção dos numeros indeterminados, devemos examinar directamente qual é o caracter das *transformações numericas*. Para isso precisamos remontar á origem das concepções numericas.

Vimos na *theoria subjectiva dos numeros* que o advento destes foi motivado espontaneamente pela necessidade de conhecer a humanidade. (*Apont. de arithmetica*, cap. II).

Mas, tambem reconhecemos que o surto das especulações numericas resultou de sua applicação ao conhecimento do mundo. Foi, portanto, esse desenvolvimento posterior que fez complicar as avaliações, e por ahi determinou a consideração crescente das *relações numericas* até destacar o estudo destas, quer da arithmetica quer da geometria.

Ora, a combinação numerica que define a dependencia mutua entre as grandezas de um phenomeno é sempre instituida de modo a exprimir uma por meio das outras; de sorte que, conhecidas estas, é um simples problema de *avaliação* determinar aquella.

Esse problema é em si mesmo um problema de *relação*, como acabamos de vêr, e dá lugar a muitos outros tambem de relação. Mas, em todos elles só temos de com-

binar os numeros conhecidos entre si, as transformações operam-se, portanto, entre as grandezas dadas.

9 — Para exemplo tomemos a lei da queda dos corpos tal qual foi achada por Galileu: «A altura percorrida por um corpo que cae na vertical é medida pelo producto de um numero constante, metade da acceleração da gravidade, (2 a) pelo quadrado daquelle que mede o tempo gasto no percurso». Ella indica immediatamente a serie de operações que é preciso fazer sobre o numero que exprime o tempo para ter o numero que exprime a altura da queda.

Mas, uma vez obtida essa lei, isto é, conhecida essa combinação entre os numeros de que se trata e que correspondem aos dois elementos do phenomeno, podemos — propor uma serie de problemas que para sua solução apenas exigem *transformações* da referida combinação.

Assim, supponhamos que se trata de obter o tempo, conhecendo a altura da queda. O numero que exprime o tempo acha-se complicado na formula por uma serie de operações.

Em primeiro lugar, elle entra não por si mesmo, mas pelo seu quadrado; em segundo lugar, esse quadrado acha-se multiplicado por um coefficiente constante.

O problema é, portanto, mais difficil do que o precedente, visto como o numero pedido acha-se por assim dizer emmaranhado numa serie de laços dos quaes é preciso desprendel-o. Diz-se então que elle é conhecido *implicitamente*. Toda a difficuldade consiste em desfazer esta *implicidade*, mostrando explicitamente que operações deveriam ser effectuadas sobre o numero que representa a altura para ter aquelle que exprime o tempo.

(2 a) Numero que exprime a intensidade da gravidade, constante em cada ponto da superficie da terra e que conhecerem os no estudo da mecanica.

Para resolver (2 b) esta difficuldade, é necessario effectuar uma serie de transformações de natureza diversa daquellas que até aqui temos realizado; porquanto não se trata mais de transformar uma combinação de numeros conhecidos em outras. E' verdade que taes transformações são simples neste exemplo.

Mas, basta imaginar que se atire um corpo verticalmente para o ar e já a questão exigirá uma combinação numerica mais complicada entre o numero que representa a maior altura a que o corpo vae attingir e o numero que exprime o tempo necessario para isso.

Comtudo, em todas essas hypotheses, em que o problema consiste em transformar uma combinação *implicita* dos numeros propostos em outra combinação *explicita*, a questão é geralmente mais difficil, do que quando se trata de transformar uma combinação de numeros conhecidos em outra.

10 — O conjuncto das considerações precedentes deixa vêr que possuimos já duas categorias de transformações numericas, a saber: 1ª. Transformações em que se passa de uma combinação de numeros conhecidos para outra de numeros egualmente conhecidos; 2ª. Transformações nas quaes se tem em vista tornar *explicita* a relação entre uma grandeza pedida e outras dadas, quando é conhecida a relação implicita entre a primeira e as segundas.

Em ambos os casos domina o ponto de vista das *relações* sobre o ponto de vista dos *valores*. Mas entre as duas especies de transformações existe uma differença que resulta da natureza do ponto de partida.

Assim é que, quando se trata de transformações da primeira categoria, isto é, tratando-se de transformar uma combinação de numeros conhecidos em outra, a combinação resultante é sempre real, comquanto possa ser ociosa.

(2 b) Note-se que resolver significa soltar, desprender, segundo a sua etymologia.

Isto não deve admirar, porque quando se dá uma certa combinação entre numeros conhecidos, estabelece-se sempre um ponto de partida que não é absurdo. E' verdade que essa combinação póde não ter lugar para todas as especies de grandezas imaginaveis.

Mas encarada entre numeros, ella é sempre possivel, sem o que ninguem a proporia. As transformações dessa combinação, ou puramente abstratas, ou mesmo geometricas, são desde logo tão reaes como ella.

Mas quando se trata de transformações da segunda categoria, isso é de uma combinação implicita entre numeros arbitrariamente escolhidos e um outro que suppomos desconhecido, e depois effectua-se a transformação dessa combinação *implicita* em combinação explicita, esta ultima póde nos indicar operações verdadeiramente inexequiveis.

Isto não nos deve causar surpreza: o contrario só teria lugar si o mundo não fosse regido por leis naturaes.

11 — Por exemplo, supponhamos que figurando a hypothese a que acima alludimos do movimento vertical do projectil, nós queiramos saber em que tempo um corpo atirado com uma certa velocidade chegaria a uma determinada altura. E' claro que a altura dada póde ser tal que, com a velocidade supposta, jamais o projectil a pudesse attingir.

Mas tambem, neste caso, a formula *explicita* deveria nos indicar a impossibilidade do problema pela inexequibilidade dos calculos a effectuar sobre os numeros que representassem a altura e a velocidade dadas. Portanto, desde que abstrahimos das transformações numericas da primeira categoria para attender sòmente ás da segunda, o calculo das relações deixa de ser uma *doutrina*, para constituir-se em um verdadeiro instrumento *logico*. Elle limita-se então a mostrar as consequencias que resultariam de certas relações suppondo que ellas existissem.

Ora, esses casos são aquelles em que o calculo das relações ou a algebra se isola completamente, quer da arithmetica, quer da geometria. Elle nos indica, então, o caminho que se deve seguir para transformar relações implicitas em explicitas, sem se preoccupar com a realidade dos resultados.

12 — E' ainda necessario, para terminar a apreciação do verdadeiro caracter das transformações algebricas, examinar melhor o campo preciso de taes transformações.

Para isto cumpre-nos considerar as combinações numericas, quanto á sua constituição e o modo de adaptal-as ao estudo do mundo.

Sob o primeiro aspecto, isto é, quanto á sua constituição, a apreciação das combinações numericas funda-se na distincção dellas em combinações *simples*, ou as que podem ser immediatamente concebidas entre as grandezas, e combinações *compostas* ou as que se formam por meio das primeiras.

Uma combinação simples ou composta, quando realizada entre grandezas indeterminadas, é o que se chama uma formação (2 c).

As *formações* podem, pois, ser simples ou compostas. Essa distincção no ponto de vista arithmetico não tem o mesmo alcance que no ponto de vista algebrico.

No ponto de vista arithmetico, ella dá logo como resultado reduzir a avaliação das combinações ou formações compostas á avaliação das combinações ou formações simples: *addicção, subtracção, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação*, das quaes a ultima não tem em arithmetica assás generalidade, e a penultima não com-

---

(2 c) Esta palavra indica claramente que se tem de combinar grandezas conhecidas para *formar* uma outra a principio desconhecida. Ella foi empregada por A. Comte em lugar da palavra *funcção*, impropriamente usada para o mesmo fim.

porta uma avaliação distincta da que é propria á multiplicação.

De sorte que, instituidas estas ultimas combinações, todas as outras não podem dar lugar a nenhuma nova difficuldade.

O mesmo, porém, não acontece no ponto de vista algebrico.

Porque considerando a algebra como *tendo por objecto especial a transformação das relações implicitas em explicitas*, vê-se desde logo que essa transformação será tanto mais difficil quanto maior fôr a complexidade das formações, mesmo na hypothese em que estas são constituidas pela repetição dos mesmos elementos.

A simples transformação do polynomio normal, que define um numero qualquer, segundo o lugar que elle occupa na escala numerica, quando se suppõe que a base é desconhecida e trata-se de exprimil-a por meio dos seus coefficentes, constitue um problema em geral insoluvel.

Si quizermos, por exemplo, saber qual é a *base* em que o numero 52341 é representado pela 5ª potencia da mesma base, mais tres vezes a 3ª potencia da mesma base, etc., não teremos meios especiaes de transformar essa expressão implicita em outra explicita.

Esta questão nos mostra desde já que o problema geral da *transformação das relações implicitas em relações explicitas* abrange um numero de casos inesgotavel.

Mas, para ter uma idéa exacta da vastidão real de tal campo, cumpre notar que, apesar de sua extensão, elle não é sinão uma parte imperceptivel, quando comparada com a immensidade de relações numericas que podemos conceber como sendo constituidas pelas combinações simples que escapam ao nosso poder mental.

Porque esse campo que examinámos é formado exclusivamente com dez elementos, isto é, com as dez unicas combinações elementares de que dispõe a Algebra.

Nestas condições, sempre que o espirito humano se propõe a descobrir as leis numericas dos phenomenos, de facto elle não faz mais do que se esforçar por vêr si essas leis podem ser expressas por aquelle pequeno numero de leis elementares, a que denominamos *formações simples.*

13 — INSTITUIÇÃO DE RELACÇÕES INDIRECTAS — Para conseguir esse *desideratum* a Humanidade procurou a principio examinar directamente os phenomenos, no intuito de descobrir qual a combinação numerica que exprime a dependencia entre as grandezas respectivas.

Em breve, porém, não tardou ella em reconhecer que, assim instituida, a pesquiza era em geral inaccessivel, verificando por este modo que aquelle pequeno numero de formações elementares não podia corresponder a todos os casos que o Mundo lhe apresentava.

Então, procurou substituir as grandezas que entravam directamente no problema por outras mais simples, ligadas áquellas, entre as quaes pudesse apanhar relações numericas.

E do conhecimento dessas *relações indirectas* tratou de remontar áquellas que a interessavam.

Tomemos para exemplo o caso da esphera. Tratando de determinar a relação entre a superficie da esphera e o seu ralo, a Humanidade reconheceu logo que, directamente considerado, um tal problema era inexequivel.

Isso, porém, não impediu que o problema fosse resolvido indirectamente.

Tendo concebido a superficie da *esphera* como gerada pela rotação de um *semi-circulo* em torno de seu *diametro*, a consideração de um *polygono* regular, inscripto no respectivo *circulo*, permittiu determinar a relação entre a area deste e o *apothema*.

Isto posto, attendendo que a rotação deste polygono em torno do diametro produzia uma figura que se approximava indefinidamente da esphera, desde que se fizesse crescer o numero de lados, e que tambem o apothema se

approximava constantemente do *raio da esphera*, foi possivel passar da relação auxiliar entre a *area* e o *apothema* para a relação definitiva entre a superficie da *esphera* e o *raio*.

14 — As transformações algebricas até então conhecidas não convinham a semelhante marcha, que, por isso, conduziu a uma nova categoria de taes transformações.

Porque as relações *indirectas* ou *auxiliares* sendo expressas por formações conhecidas, poz-se desde logo o problema de saber que especie de transformação era necessario fazer-se para passar dessas formações auxiliares ou *indirectas* para as definitivas ou *directas*.

Porquanto, feito isto, não resta sinão tornar explicito o modo de dependencia das grandezas a conhecer com as grandezas conhecidas. Neste caso, como nos outros, se teve que effectuar *transformações algebricas*; mas a transformação das relações indirectas veio constituir uma nova sorte de calculo, denominado *calculo das relações indirectas*, que, depois de Leibnitz, se chamou *calculo transcendente*, para salientar o seu contraste com o *calculo das relações directas*, isto é, com aquelle em que se transformam relações directas.

Mas, bem examinado, esse *calculo transcendente* consiste, como o outro, em determinar relações explicitas por meio de relações implicitas; porquanto a lei do phenomeno auxiliar define implicitamente as grandezas consideradas, cuja relação explicita não existiria sem ella.

Portanto, quando considerada em toda a sua generalidade, *a Algebra póde ser concebida como tendo por objecto transformar relações implicitas em relações explicitas.*

A relação implicita existente entre as grandezas de um phenomeno foi expressa a principio pela comparação de quatro grupos dessas grandezas, e mais tarde pela comparação de dois grupos condensaveis num unico.

Sob a primeira fórma, a relação tomou o nome de *proporção*, e sob a segunda o de *equação*; mas esta ultima

prevaleceu definitivamente sobre aquella por ser mais simples.

De sorte que a relação implicita existente entre as grandezas de um phenomeno é ordinariameute expressa por uma *equação*.

Esta não é mais do que uma comparação de igualdade entre duas relações ou combinações daquellas grandezas, as mais simples, por se realizarem entre os numeros indeterminados que as representam.

Nestas condições, podemos dizer resumidamente que o objecto da Algebra consiste em *resolver equações*.

A palavra *resolver* significando desligar, destacar, a locução *resolver equações* traduz claramente o objecto especial da algebra.

Porque, de facto, quando ella transforma a equação ou relação implicita entre as grandezas consideradas numa relação explicita das mesmas grandezas, não faz mais do que desligar a grandeza que se quer conhecer daquellas que são conhecidas, indicando claramente as operações a effectuar sobre as segundas para obter a primeira, depois de transformar convenientemente a *formula* respectiva.

§ 3º

Alcance do calculo algebrico -- Refutação do materialismo abstracto

15 — Depois de haver apreciado, tanto quanto possivel, o objecto proprio e continuo do calculo algebrico, quando considerado isoladamente da arithmetica e da geometria, precisamos agora examinar qual o seu alcance effectivo.

Mas a apreciação do alcance de semelhante calculo exige que sejam examinadas as aberrações a que deu lugar o seu surto empirico.

E' na *idade media* que vamos encontrar a origem dessas aberrações. Porque a algebra já estava então sepa-

rada da arithmetica e da geometria, e o espirito da época não permittia que se comprehendesse o seu verdadeiro destino, geometrico e mecanico. Dahi datam as pretenções exageradas da algebra, que foi então qualificada de *Logistica*, como que pretendendo instituir a logica universal, elaborando de antemão meios de raciocinio para todas as hypotheses successivas que se pudessem apresentar.

Embora semelhante qualificativo presentisse em parte o principal destino que devia caber á sciencia mathematica, a falta de disciplina theorica deu á algebra pretenções exorbitantes, que se foram desenvolvendo cada vez mais e que desde Augusto Comte são denominadas *materialismo algebrico ou abstracto.*

16 — Em geral, o materialismo póde ser considerado sob o ponto de vista theorico e sob o ponto de vista pratico.

Sob o aspecto theorico, o *materialismo* consiste em reduzir os phenomenos de ordem mais elevada aos de ordem inferior.

Não é occasião de apreciar o materialismo sob o ponto de vista pratico; apenas diremos que elle é uma consequencia do materialismo theorico, porquanto nossa conducta é geralmente guiada pelas nossas opiniões.

Considerando apenas o materialismo theorico, que consiste, como dissemos, na tendencia em fazer preponderar os phenomenos de ordem inferior sobre os de ordem superior, é facil mostrar a principio que a origem dessa tendencia foi a propria algebra.

Esse papel não podia caber, com effeito, á arithmetica, porquanto, apesar da generalidade do *numero*, este não podia enganar sobre o seu verdadeiro alcance por causa da idéa de *valor*, a que se acha ahi ordinariamente ligado.

Mas, desde que o *numero* perdeu em algebra o caracter de *avaliação*, a consequencia foi que este dominio theorico aspirou absorver todos os outros.

Toda a apreciação especulativa não sendo no fundo senão uma apreciação numerica, a algebra tendeu a absorver tudo, desenvolvendo assim a pretenção de explicar os factos mais complicados como consequencias dos mais simples.

Essa tendencia tornou-se mais propicia quando a reforma operada por Descartes na geometria veio mostrar a efficacia da combinação desta com a algebra, afim de reduzir todas as questões de forma a simples questões numericas.

O mesmo deu-se relativamente ás questões de movimento, em mecanica.

De sorte que, abusando da generalidade systematica que imprimiu a estes dois departamentos mathematicos, a algebra apresentou, embora indirectamente, um motivo demais para aspirar á presidencia na escala encyclopedica.

Nestas condições, o materialismo, que a principio surgiu em algebra sob um aspecto inteiramente abstracto, tomou depois uma forma concreta, não só em geometria, mas ainda em mecanica (3ª).

Desde então começou a desenvolver-se nas outras sciencias, cada uma das quaes procurou abraçar como consequencia as que lhe seguiram na escala : a mecanica á astronomia, esta á physica, esta á chimica, esta á biologia, etc.

Attendendo, porém, que as pretenções materialistas não tiveram consistencia, a não ser no seu berço mathematico, e que fóra deste não puderam ellas desenvolver-se como parecia a principio, comprehende-se que ahi é que devemos examinal-as.

(3ª) O desenvolvimento da geometria depois dos trabalhos de Descartes suscitou, com effeito, um modo indirecto de *materialismo* algebrico. A algebra procurou dominar tudo atravez dos phenomenos geometricos e mesmo mecanicos. Mas esse modo indirecto, como todas as formas que tomou o *materialismo concreto* em physica, em chimica, etc., serão examinados mais tarde.

Filosofia
Departamento de Matemática

E' o que vamos fazer, limitando-nos por ora á apreciação do *materialismo* na sua forma *abstracta* ou algebrica; por isso que o materialismo concreto deverá ser julgado no estudo da geometria e da mecanica.

17 — Devendo apreciar o *materialismo* algebrico e, portanto, o verdadeiro alcance da algebra, nós precisamos examinar os motivos legitimos cujo irracional exagero deram lugar a elle.

Porque effctivamente materialismo é, no fundo, o exagero de uma apreciação verdadeira.

Os motivos legitimos que suscitaram as pretenções exorbitantes da algebra são :

Em primeiro lugar, a necessidade de sua cultura isolada para systematizar a instituição mathematica, permittindo reduzir o estudo dos phenomenos respectivos a simples combinações numericas.

Em segundo lugar a importancia dos incidentes algebricos que surgem constantemente, quer em geometria, quer em mecanica, e cuja explicação teria de ser instituida de vez em quando, si não houvesse aquella cultura.

Baseando-se em taes motivos, que bem mostram a necessidade dessa cultura isolada, a anarchia mental levou a desenvolver a algebra sem ter em vista o seu verdadeiro destino mathematico, pretendendo que ella poderia elaborar de antemão as leis abstractas de phenomenos quaesquer e, portanto, assumir á presidencia encyclopedica.

18 — A DENOMINAÇÃO QUE CONVEM AO CALCULO DAS RELAÇÕES — São estas pretenções que devemos refutar, e para isso começamos por fixar o nome com que deve ser caracterizado o *calculo das relações*.

Neste sentido, é preciso desde logo rejeitar a palavra *analyse*, com que irracionalmente é qualificado.

Semelhante vocabulo acha-se ahi inteiramente desviado do seu sentido proprio.

Porque *analyse* significa *separação*, e o calculo algebrico em vez de ser um instrumento de separação é, ao contrario, um elemento de synthese.

Veremos, com effeito, que a mesma formula algebrica póde representar um phenomeno geometrico, mecanico, physico, etc.

Ora, comprehende-se, desde então, que um elemento capaz de ligar tantos phenomenos distinctos poderá ser chamado de *synthese*, mas nunca de *analyse*.

Este nome de *analyse* foi introduzido no meiado do seculo XVIII, mas só tomou consistencia depois da elaboração da mecanica celeste.

Porque os geometras que trataram deste assumpto, não querendo confundir-se com o vulgo dos geometras, começaram a chamar *analyse* á parte superior do calculo das relações.

Dahi em diante, essa palavra generalizou-se : os metaphysicos qualificaram de analyse as suas locubrações, e *analyse* era tudo.

A palavra ficou desvirtuada por toda a parte, salvo na philosophia chimica, onde ainda tem o sentido proprio.

Àntes, porém, a algebra teve a denominação de *logistica*, conforme dissemos, e foi desde então que ella se apresentou como a *logica* universal, o methodo por excellencia.

Mas nenhuma dessas denominações de outrora deve ser mantida, salvo a de *algebra*, dada pelos arabes, que é effectivamente a mais racional, quer sob o ponto de vista historico, quer sob o ponto de vista dogmatico.

Historicamente, uma tal denominação nos recorda que foram os arabes os continuadores dos gregos na cultura mathematica e que com elles o *calculo das relações* começa a separar-se do *calculo dos valores*.

Dogmaticamente, ella tem a vantagem de indicar o espirito do calculo das relações, porque, conforme sua origem, a palavra algebra, *algrabarat*, significa *concertar*

uma cousa quebrada (endireitar), o que lembra o caracter synthetico e coordenador do calculo das relações.

Este estabelece de facto um verdadeiro concerto, uma completa harmonia entre os elementos do dominio mathematico a que denominamos geometria e mecanica.

19 — No exame directo das pretenções da algebra que vamos encetar é facil reconhecer que não puderam ellas ser combatidas antes de Augusto Comte (1798-1857).

E' verdade que, antes delle, Kant (1724-1800) esforçou-se por conter as divagações algebricas, tentando estabelecer uma distincção entre as noções de *quantidade* e as de *qualidade*.

Effectivamente, si semelhante distincção fosse verdadeira, o materialismo algebrico ficaria refutado; porque a algebra só podendo systematizar as noções de quantidade, todos os phenomenos geometricos, mecanicos, physicos, chimicos, etc., escapariam ao seu dominio.

Mas a concepção de Descartes (1596-1650) prova claramente que não existe tal contraste.

Este eminente philosopho e fundador da geometria moderna já havia mostrado que a *forma* de um corpo, (que é uma noção de qualidade) póde sempre ser determinada por simples considerações de quantidade.

Aliás, é facil de mostrar directamente que esta distincção é puramente chimerica.

Porque toda especulação tem por objecto a descoberta da *lei* dos phenomenos, o que consiste em *apanhar a constancia no meio da variedade*.

Ora, é evidente que, para fazer esse apanhado da constancia no meio da variedade, torna-se preciso apreciar os differentes gráos de variação, o que é, sem duvida, uma questão de quantidade.

Quando, por exemplo, apreciamos em physica uma temperatura, não examinamos esta em si, mas simplesmente os seus diversos gráos. Neste, como em todos os demais casos, não fazemos sinão examinar qual a depen-

dencia mutua entre as grandezas dos phenomenos, *cujo arranjo persiste inalteravel* (3 b).

20 — Temos visto que todas as especulações reaes podem ser directamente concebidas como reductiveis a noções de *quantidade*, o que equivale a reconhecer que toda lei é numerica.

Isso, porém, não significa de modo algum que a algebra possa resumir em si o conjuncto das leis dos phenomenos. Porque affirmar isso seria desconhecer que para a descoberta de cada lei de um phenomeno é sempre necessario o estudo prévio do mesmo phenomeno.

Si uma tal necessidade não existisse, isto é, si o estudo das leis naturaes pudesse *immediatamente* ser feito mediante a consideração de *quantidades*, só assim seriam cabiveis as pretenções da algebra, que então poderia ser considerada como a *theoria abstracta das leis*.

Ora, a experiencia demonstra exactamente o contrario, de sorte que, ao invés da algebra predominar sobre cada sciencia, é, ao inverso, subordinada a ella, da mesma maneira que um instrumento deve ser subordinado ao seu uso.

E' a cultura directa de cada sciencia que deve, portanto, servir de base ao desenvolvimento algebrico.

Pensar de outro modo seria confundir o *estabelecimento dos principios* ou a *inducção* com a elaboração das consequencias, isto é, com a *deducção*.

Cada sciencia tem sempre suas inducções proprias, que suppõem por seu turno inducções mais simples, fornecidas pelos estudos inferiores, de sorte que o papel da algebra reduz-se, quando muito, a méras *deducções*, cuja opportunidade só a natureza de cada sciencia póde mostrar. Além disso, o emprego do instrumento algebrico é menos efficaz do que se suppõe.

Nós já vimos em outro lugar que o pequeno numero

(3 b) Lei da Philosophia Primeira (3a).

de combinações ou *formações elementares* torna o seu uso muito precario. E basta attender que taes formações foram fornecidas pela arithmetica e pela geometria para logo nos desilludirmos da esperança de poderem representar, por sua combinação mais ou menos variada, todos os phenomenos superiores e, portanto, mais difficeis.

De resto, a experiencia tem-se encarregado de mostrar a inanidade de taes pretenções.

A não ser na geometria e na mecanica, as applicações da algebra são verdadeiramente excepcionaes.

O seu emprego efficaz na astronomia é devido a uma serie de condições fortuitas, taes como a forma mais ou menos regular dos planetas, a preponderancia da massa de um delles sobre a massa dos outros, etc.

Na physica o emprego efficaz da algebra, em alguns phenomenos mais simples, nutriu a principio muitas esperanças.

Mas em breve a tentativa de Fourier nos phenomenos de calor veio a todos desilludir, por causa da extrema difficuldade da questão e da complicadissima constituição das formulas obtidas.

Da chimica em diante tem sido impossivel apanhar relações entre numeros. Estes têm apenas um emprego logico como indicando *médias* de variações, taes como a temperatura do corpo humano em biologia, as diversas phases da vida em moral, etc.

21 — Examinando mesmo o papel da algebra nos dominios em que tem mais ampla applicação, isto é, na geometria e na mecanica, verifica-se que seu emprego não tem efficacia em todas as questões. A não ser como um instrumento de generalisação e systematização, só nos casos mais simples a podemos empregar como um instrumento de conhecimento e de previsão, pois sómente nestes casos tem sido possivel a descoberta de leis numericas.

Só então a idéa concreta de *lei* póde ser traduzida pela noção abstracta de *equação*.

Aquella não se póde tornar precisa emquanto não toma o caracter numerico desta. Porque o *arranjo* dos phenomenos sendo, como dissemos, invariavel, e sómente nos sendo dado modificar a intensidade de certos elementos quando conhecida a relação com a intensidade dos outros, comprehende-se bem que uma tal modificabilidade não teria rigor algum se taes variações não fossem regradas numericamente.

Em vista, portanto, das considerações que acabamos de expender, podemos concluir que as pretenções da algebra não têm valor algum. O que ha de verdadeiro nellas é que todas as leis devem ser concebidas como numericas.

Mas nós vimos que a elaboração geral dessas leis pelo calculo algebrico está necessariamente subordinada ao seu estabelecimento especial; de sorte que só a cultura directa de cada sciencia póde fornecer as bases do desenvolvimento algebrico.

Foi o que se deu em geometria e em mecanica, onde a reducção dos phenomenos a simples apreciações numericas seria sempre illusoria nos casos em que se violasse esse preceito.

Dissipadas, pois, as vãs aspirações materialistas, podemos comprehender o verdadeiro alcance da algebra. Reduzidas a suas funcções mathematicas, sua cultura isolada deve, pois, desenvolver-se apenas quanto baste para systematisar o estudo da geometria e da mecanica.

CAPITULO II

APRECIAÇÃO DA LINGUAGEM ALGEBRICA

§ 4

Necessidade do exame prévio da linguagem algebrica

22 — UTILIDADE DESTA LIÇÃO; SUA LIGAÇÃO COM A ANTERIOR — No capitulo precedente procurámos explicar a concepção geral do calculo algebrico, definindo o seu objecto e caracterisando o seu verdadeiro alcance.

Isto nos levou a refutar o primeiro modo de materialismo theorico, que é tambem o primeiro modo do materialismo mathematico.

Mas essa explicação geral não ficaria completa sem uma outra mais particular, afim de que se tenha do calculo algebrico uma idéa exacta.

Ella refere-se ao juizo dos instrumentos especiaes, por meio dos quaes se exerce aqui o trabalho mental, quer a concepção, quer a expressão.

Este capitulo é consagrado á apreciação de taes instrumentos, mediante o exame da natureza e do alcance real da linguagem algebrica.

23 — NECESSIDADE DE MODIFICAR-SE A LINGUAGEM VULGAR EM VIRTUDE DE CADA DESENVOLVIMENTO ESPECIAL DA INTELLIGENCIA — Para que a apreciação da linguagem algebrica seja convenientemente feita, cumpre ligal-a ao estudo geral das modificações necessarias por que passa a lingua geral, em virtude de cada desenvolvimento especial da intelligencia.

Destinada a transmittir o conjuncto dos sentimentos, dos pensamentos e dos projectos humanos, a linguagem da Humanidade offerece-se como constituida por duas categorias de signaes : uns *geraes*, isto é, utilizados por todos habitualmente, porque se referem aos sentimentos, aos pensamentos e aos actos communs a todos; outros, mais ou menos *particulares*, por interessarem especialmente a cada uma das funcções sociaes.

Resulta dahi que a educação domestica e a vida geral na sociedade nos iniciam nos primeiros; mas só o exercicio especial da respectiva funcção nos póde proporcionar o conhecimento dos segundos.

Encaradas quanto á sua instituição, essas duas categorias de *signaes* offerecem um contraste analogo ao que acabamos de apontar na sua acquisição por cada novo sêr humano.

Porquanto, ao passo que os signaes da primeira categoria são directamente elaborados pela massa geral da Sociedade, os signaes da segunda categoria são preparados por orgãos tanto mais especiaes, quanto mais circumscripta é a funcção a cujo exercicio elles se destinam.

Isto nos mostra logo a dependencia entre as duas categorias.

Porque a primeira, pela sua generalidade, é caracterisada por uma espontaneidade que dá aos seus *signaes* o maximo cunho da sociabilidade.

Elles se tornam por isso eminentemente intelligiveis.

Ao passo que os da segunda trazem mais o vestigio da personalidade.

Mas essa mesma personalidade, exigindo que elles sejam explicados para se tornarem intelligiveis, impõe aos seus instituidores a obrigação de os filiar, tanto quanto possivel, aos signaes da primeira categoria.

E' por esse motivo que os termos technicos são de ordinario a simples utilização dos termos vulgares, aos quaes o pensamento da funcção liga um sentido particular.

Depois que a evolução occidental accentuou sufficientemente a tendencia da Humanidade a substituir os idiomas nacionaes por uma linguagem universal, esse caracter da linguagem technica tornou-se mais systematico.

Porque a lingua de Roma já havendo espontaneamente prevalecido na primeira categoria de palavras das populações avançadas, o ascendente scientifico determinou a incorporação gradual da lingua de Athenas no conjuncto das communicações industriaes.

De sorte que a linguagem definitiva se nos mostra como havendo de resultar da fusão do idioma de Homero no dialecto de Dante, aperfeiçoada pela lingua de Augusto Comte.

Considerando agora a segunda categoria de expressões, reconhece-se logo uma nova distincção entre ellas.

Porquanto, ao passo que umas serão sempre especiaes por concernirem ás funcções industriaes, por sua natureza reservadas a classes mais ou menos restrictas, outras tendem a entrar systematicamente na primeira categoria como pertencendo ao dominio especulativo.

De facto, este devendo generalizar-se, quer na sua parte esthetica, quer na scientifica, a sua linguagem especial não póde deixar de ser assimilada pelo conjuncto das populações.

A distincção entre a linguagem vulgar e a scientifica ou esthetica marcará, pois, finalmente, duas phases apenas na educação preparatoria de cada servidor da Humanidade.

24 — INFLUENCIA SCIENTIFICA SOBRE A LINGUAGEM VULGAR: CASO GERAL DA LOGICA; CONTRASTE COM AS OUTRAS SCIENCIAS SOB ESSE ASPECTO — A' vista das reflexões precedentes, comprehende-se que cada sciencia nova vae introduzir modificações especiaes na linguagem vulgar. Isto é, para a elaboração de cada sciencia será necessario aperfeiçoar o systema geral dos meios habituaes de communicação, quer graphicos, quer phonicos.

Comprehende-se, porém, immediatamente que essas modificações serão tanto mais pronunciadas, quanto mais longe estiverem as sciencias preliminares da sciencia final.

Porque as modificações da linguagem são requeridas sobretudo pela elaboração dos pensamentos e dos actos, o fundo affectivo já se achando completamente constituido pela educação domestica e pelo trato social.

A Moral e a Sociologia poucos signaes novos introduziram, e limitar-se-ão quasi sempre a systematisar o uso dos signaes vulgares.

A partir dahi, o emprego dos signaes particulares, quer phonicos, quer graphicos, vai crescendo.

De sorte que esses signaes devem attingir o maximo de especialisação em Logica ou Mathematica, como versando sobre os pensamentos menos habituaes.

25 — DO CONFRONTO ESPECIAL DAS TRES PARTES DA LOGICA SOB ESSE ASPECTO — Considerando mesmo as tres partes da Logica, sente-se esse decrescimento.

Porque em Mecanica, a linguagem geral poucas modificações exige para assistir completamente á elaboração mental ou á communicação dos seus resultados.

Em Geometria, a terminologia já é mais especial; mas a cultura esthetica, a esculptura e o desenho têm generalisado a maioria desses termos.

De sorte que é no calculo que se encontra mais sensivel modificação da linguagem vulgar e essa modificação foi até ao Positivismo quasi que exclusivamente graphica, isto é, limitou-se aos signaes visuaes.

26 — APRECIAÇÃO DO CONFRONTO DOS DOIS MODOS DO CALCULO SOB ESSE ASPECTO—Estendendo esse confronto dos dois modos do *Calculo*, reconhe-se finalmente que a especialisação da linguagem mathematica concerne sobretudo ao Calculo Algebrico.

Porque, apesar do Calculo Arithmetico haver introduzido symbolos hieroglificos para representar os diversos numeros,a universalidade das meditações arithmeticas fundamentaes incorpora bem cedo taes symbolos ao dominio vulgar.

27 — DAS ABERRAÇÕES A QUE DEU LUGAR A LINGUAGEM ALGEBRICA—A espontaneidade dessa incorporação dispensa de um exame especial o auxilio que aquelles symbolos prestam á meditação arithmetica, salvo as reflexões feitas por occasião de apreciar a *numeração*.

Tambem o caracter demasiado especial de taes symbolos e a época em que surgiu o seu emprego impediram que elles dessem ensejo para observações de qualquer sorte.

Outro tanto não aconteceu com o conjuncto da linguagem algebrica e especialmente aos signaes graphicos empregados no calculo das relações.

Fascinados pela assistencia secundaria que elles prestam á meditação algebrica, os theoristas foram levados até

Augusto Comte a attribuir ao uso de taes signaes as concepções que os motivaram.

De sorte que o caracter singular da especialisação que a linguagem vulgar adquire no Calculo Algebrico, bem como as observações a que ella deu lugar, exigem que se aprecie o seu verdadeiro alcance antes de encetar propriamente o estudo do calculo das relações.

Reconhece-se então que taes aberrações provêm da mesma fonte que as que constituem o *materialismo* abstracto.

E, de facto, num caso como no outro, descobre-se a mesma tendencia fundamental de explicar um phenomeno de ordem superior por outro de ordem inferior.

E' essa tendencia que leva a explicar a concepção pela expressão.

«Vistas convenientemente, as notações algebricas devem permanecer sempre indispensaveis ao desenvolvimento das operações algebricas, sem ter jámais parte na sua instituição.

Ellas não produziram realmente nenhuma das inspirações que fizeram successivamente surgir o calculo das relações.

O surto deste não foi mais secundado pelos signaes algebricos do que o calculo dos valores pelos algarismos, aos quaes ninguem jámais ousou attribuir os progressos das especulações correspondentes.»

Para confirmar essa observação de Augusto Comte, basta lembrar que o desenvolvimento do Calculo Arithmetico e da Geometria conduziu a conceber os numeros, abstrahindo da especie e do valor muito tempo antes que elles fossem representados nesse estado por symbolos especiaes.

Justamente os symbolos para tal fim surgiram depois que a consideração dos numeros indeterminados se tinha tornado habitual.

Isto é, a concepção já havia attingido á sua madureza.

O mesmo deu-se quanto aos signaes para representar

as *relações*; pois que se vêem os proprios signaes da multiplicação e da divisão surgirem e se vulgarisarem muito tardiamente.

« Explicando a diversidade de apreciaçãc quanto á efficacia dos *symbolos algebricos* e dos algarismos, casos essencialmente analogos, apanha-se a fonte das illusões peculiares aos algebristas, e propagadas entre os metaphysicos.

O uso dos algarismo é demasiado especial para suscitar qualquer engano quanto ás Concepções Arithmeticas, cujo surto domina e dirige o emprego dos caracteres, unicamente destinados a facilitar a sua applicação detalhada.

A respeito dos symbolos algebricos, a illusão não se tornou inevitavel senão porque a algebra surgiu em uma idade inteiramente desprovida de disciplina philosophica.

Todo o seu surto realisou-se durante a anarchia moderna, na qual as vistas de detalhes se desenvolviam sem nenhum pensamento de conjuncto, *historico* ou *dogmatico*.

Foi então natural attribuirem-se as diversas concepções algebricas ás notações que a *madureza* dellas devia respectivamente suscitar, *comquanto a observação das phases anteriores tivesse bastado para rectificar tal empirismo.*

Todas as illusões desse genero podem ser assás caracterisadas por dois typos irrecusaveis, nos quaes o engano se torna directamente apreciavel.

1° typo — Estabelecidas em Arithmetica desde a instituição da numeração systematica e em breve introduzidas em Geometria para as medidas fundamentaes, as noções de *potencias* tinham-se gradualmente desenvolvido em Algebra, ao ponto de fazerem surgir tardiamente a ideia de caracterisar cada potencia pela menção explicita do numero de factores que a constituem.

Este numero, collocado á direita e acima de um dos factores, é o que se denomina o *expoente* da potencia.

Assim, por exemplo, temos visto que um numero, considerado como fazendo parte da escala numerica, é representado por um polynomio, cujos termos são iguaes ás

potencias successivas da *base* numeral, affectada cada uma de um coefficiente inferior á mesma base.

A mesma formula póde ser enunciada dizendo-se que cada termo do referido polynomio é a base elevada a um certo *expoente* e affectada de um coefficiente inferior a ella.

A' vista disto, em vez de dizer, por exemplo, que o numero 1825 é igual á *terceira potencia de 10 mais oito vezes a segunda potencia de 10 mais duas vezes 10 mais cinco*, exprime-se deste modo:

10^3 mais 8 vezes 10^2 mais 2 vezes 10 mais 5

Depois que se introduziu esta notação de expoente, foi a ella que o empirismo mathematico e a anarchia metaphysica referiram uma concepção, cujo surto geral a tinha longo tempo precedido e finalmente solicitado.

2º typo — No capitulo precedente já definimos o que se entende por uma *equação*. E', como vimos, a expressão da igualdade entre duas combinações numericas das grandezas que entram num phenomeno.

Para termos um exemplo, basta citar a primeira lei de Thales, a saber: *a somma dos tres angulos de um triangulo é constantemente igual a dois angulos rectos.*

O primeiro membro desta igualdade é uma *somma* de tres numeros, representando cada um delles um dos angulos, e o segundo membro é um *producto* do factor constante 2 pelo numero que exprime o valor do angulo recto.

Observemos ainda que essa equação póde tomar outro typo, dizendo-se que *a somma de dois angulos de um triangulo é igual á differença entre dois rectos e o terceiro angulo.*

Aqui o primeiro membro é uma *somma* e o segundo é a *differença* entre um producto e um certo numero.

Estes exemplos bastam para comprehender-se a definição de equação.

Ora, quasi na mesma época em que Descartes vulgarizou os *expoentes*, Harriot iniciou o uso de concentrar as

equações nos seus primeiros membros, substituindo a igualdade dos dois grupos pela nullidade da sua differença.

Assim, o theorema de Thales, que acabamos de mencionar, tornou-se: *a differença entre a somma dos tres angulos de um triangulo e dois angulos rectos é zero.* Esta concentração foi suggerida pelo surto de theorias, devidas principalmente a Viete, como veremos adiante.

Entretanto, não se temeu attribuir a tal forma muitas theorias algebricas, cuja instituição a tinham suscitado desde quando as *equações* haviam irrevogavelmente substituido as *proporções.*

28 — EMPREGO DE EXEMPLOS CONVENIENTEMENTE ESCOLHIDOS, NECESSARIOS PARA CARACTERIZAR O ALCANCE DA LINGUAGEM ALGEBRICA, AFIM DE JULGAR DE SEU VALOR — O conjuncto das reflexões precedentes nos leva a concluir a necessidade de examinar o verdadeiro alcance da linguagem algebrica.

Ora, para isso torna-se indispensavel fazer o confronto entre a solução dos mesmos problemas, já servindo-nos exclusivamente da linguagem vulgar, mesmo assistida pelos algarismos, já utilisando-nos dos symbolos algebricos.

As differenças então notadas não podem ser attribuidas senão á intervenção dos signaes adoptados (4a).

E' do que trataremos no paragrapho seguinte.

§ 5

Caracterização do alcance da linguagem algebrica mediante seu confronto com a linguagem geral

29 — A instituição desta experiencia é devida a Clairaut, o unico dos grandes geometras que se occupou convenientemente de composições didacticas. Mas a sua marcha foi aperfeiçoada por A. Comte, que escolheu os exemplos de um modo mais systematico.

(4 a) Notas do Curso do cidadão Teixeira Mendes.

1º exemplo — *Dividir uma somma de 262 francos por duas pessôas, de sorte que a primeira tenha 72 francos mais que a segunda.*

Raciocinio, servindo-nos da linguagem vulgar: E' evidente que, si conhecessemos uma das duas partes, conheceriamos logo a outra.

Supponhamos, por exemplo, que se conhece a segunda, que é a menor; será necessario juntar-lhe 72 francos para ter a primeira.

Qualquer que seja a segunda parte, sabemos, pois, que esta, mais a sua somma com 72 francos, dá 262 francos.

Dahi se segue que o dobro da segunda parte com 72 francos dá 262 francos.

Ora, si o dobro da parte que se procura mais 72 francos dá 262 francos, segue-se que esse dobro será igual a 262 menos 72. Portanto esse dobro é 190.

Logo, a segunda parte será a metade de 190, isto é, 95 francos.

A primeira parte será, pois, 95 mais 72, isto é, 167 francos.

Com effeito, 167 com 95 dá 262.

A' medida que se avança para a solução da questão, a memoria vai ficando sobrecarregada de todos os raciocinios anteriores até o ponto em que se está.

Emquanto a questão é simples como a precedente, o inconveniente não é grande.

Mas, entretanto, é facil de reconhecer desde logo a utilidade da linguagem algebrica para alliviar a memoria.

Afim de mostral-o, retomemos o mesmo exemplo e vejamos a solução com o auxilio da linguagem algebrica.

Segundo esta linguagem, qualquer numero é indeterminado e expresso por uma lettra. Note-se que a lettra torna-se, então, apenas um signal abreviado de uma concepção, que já é representada pela linguagem vulgar de uma maneira longa.

Assim, quando dizemos a locução — *um numero* — indicamos a idéa vaga de numero, servindo-nos de varios *sons* e de varias *letras*.

O mesmo se dá quando dizemos *a segunda parte*; tambem indicamos vagamente um numero por meio de muitos sons e muitas letras.

Pois bem, em vez de muitos *sons* e muitos *caracteres*, o calculo algebrico emprega para cada numero um só caracter, isto é, uma só letra.

Essa letra é qualquer.

De sorte que *a*, por exemplo, póde representar todos os numeros, inteiros, fraccionarios, ou incommensuraveis, por maiores ou menores que sejam, inclusive zero.

Póde-se representar mesmo essa idéa: *um numero maior que o maior que se possa imaginar*.

Essa idéa é o que se chama infinito.

Assim *a* póde representar todos os numeros desde zero até o infinito.

Note-se, porém, que, assim como se institue em arithmetica um algarismo para representar a ausencia de numero, assim se instituiu em algebra um symbolo para apresentar a idéa de infinito, isto é, de numero maior do que qualquer, por maior que este se imagine.

Este symbolo é o 8 da numeração decimal escripto, porém horizontalmente ∞.

Convem observar ainda que cada lettra não representa ao mesmo tempo todos os numeros.

Cada letra corresponde justamente á locução—numero qualquer—isto é, um dos numeros, mas não sabemos qual seja.

Nós podemos ter necessidade de representar varios numeros indeterminados.

Por exemplo, nesta phrase: *a somma de um numero com outro*, mencionamos dois numeros indeterminados, combinados pela primeira das relações elementares; o

primeiro numero é designado pela locução um numero, o segundo pela palavra—*outro*.

As expressões são indeterminadas, mas são distinctas.

Pois bem, a linguagem algebrica caracteriza a *indeterminação*, representando os numeros pelas lettras, e caracteriza a *distincção* entre os numeros indeterminados, escolhendo lettras differentes, uma para cada numero. Assim, no exemplo citado, uma das parcellas indeterminadas seria representada por uma letra, arbitrariamente escolhida, seja a; a segunda parcella indeterminada seria expressa tambem por uma letra arbitrariamente escolhida, porém differente de a; seja b.

De sorte que, em vez de dizer a phrase — *a somma de um numero com outro*, diz-se simplesmente, a mais b.

Convém finalmente indicar desde já que se adopta a seguinte convenção na escolha das letras para representar os numeros indeterminados.

Quando se trata dos *numeros desconhecidos* ou dos numeros que podem variar em uma *formação* e que se denominam por isso *variaveis*, escolhem-se as ultimas letras do alphabeto.

Quando se trata dos numeros que são suppostos conhecidos para cada caso, adoptam-se as primeiras letras (5ª).

Por exemplo, segundo a lei de Galileu, a altura de onde um corpo cae é igual a um numero *constante* multiplicado pelo quadrado do tempo.

Ora, esse numero constante para cada lugar da terra muda de um lugar para outro; não é o mesmo em Paris, no Rio de Janeiro, etc. Mas para cada ponto do nosso

---

(5ª) Para que se julgue quão lenta é a marcha do espirito humano, basta notar que só as quantidades desconhecidas foram, a principio, representadas por letras; as conhecidas eram designadas por palavras tiradas da lingua vulgar. Este estado de coisas perdurou cerca de tres seculos, pois que sómente no seculo XVI foi que François Viète, creando verdadeiramente a linguagem algebrica, estendeu esse uso ás quantidades conhecidas.

planeta este tem um valor invariavel, ao passo que a *altura* e o *tempo* variam simultaneamente.

Isso posto, para representar algebricamente a lei de Galileu, toma-se uma das ultimas letras do alphabeto, y, por exemplo, para designar a altura; uma outra, x, para representar o tempo, e uma das primeiras, a, para representar a constante.

Diz-se então que a lei é expressa por

$$y = ax^2$$

Essa regra, porém, nada tem de absoluta.

Assim, ella se applica sobretudo quando se consideram as *formações* abstrahindo de qualquer phenomeno concreto, ou quando os numeros representam elementos communs a muitos casos differentes, como acontece na *geometria geral*.

Mas quando as formações traduzem a lei de um phenomeno especial, prefere-se escolher as letras, guardando uma certa analogia com a linguagem geral.

Por exemplo, no caso da lei de Galileu, prefere-se representar a extensão da vertical percorrida, ou pela letra *e*, inicial da palavra espaço, ou pela letra *h*, inicial da palavra *hauteur* (altura); o tempo representa-se pela letra *t*, inicial da palavra, e a constante dada para cada lugar pela letra *g*, inicial da palavra *grave*, que é synonymo de pesado (5 b).

Assim a formula algebrica habitual á lei de Galileu é

$$e = \frac{1}{2} gt^2$$

ou

$$h = \frac{1}{2} gt^2$$

(5 b) Viete (François), a quem se deve principalmente a constituição da algebra dos modernos, empregava de preferencia as letras malusculas; mas Thomas Harriot, desenvolvendo as idéas de Viete, vulgarisou o emprego das minusculas para representar quantidades quaesquer.

Mas, além de representar numeros indeterminados por letras, isto é, por um signal abreviado, a linguagem algebrica designa as operações elementares por hieroglyphos.

A mesma linguagem adopta symbolos concisos para evitar enganos na representação das formações compostas. Mas, todas essas instituições graphicas irão sendo assignaladas progressivamente á medida que as concepções o forem exigindo.

O que acabamos de dizer é quanto basta para proseguir no exame que haviamos encetado.

Nós tinhamos nos proposto a resolver com o auxilio da linguagem algebrica o problema cuja solução achamos servindo-nos apenas da linguagem vulgar.

Retomamos os nossos raciocinios. Tinhamos dito que, si conhecessemos a segunda parte, facilmente obteriamos a primeira.

Representemos, pois, essa segunda parte por uma letra.

Segundo o que acima dissemos, devemos escolher uma das ultimas do alphabeto: seja x.

A primeira parte sendo igual á segunda mais 72 é representada por $x + 72$.

A relação *mais* ou *somma* é representada, como se vê, por dois pequenos traços perpendiculares um ao meio do outro, e collocados de modo que um fique vertical.

A somma das duas partes será então $x + x + 72$ ou $2x + 72$ e essa somma deve ser igual a 262.

Teremos, pois, a equação.

$$2x + 72 = 262$$

A locução *é igual* ou a phrase elliptica *igual* é representada por dois pequenos traços iguaes e parallelos, collocados horizontalmente entre os dois membros da igualdade.

A equação é, portanto, uma phrase em que o verbo é ordinariamente subentendido, mesmo no discurso fallado.

Eis agora como se resolve esta equação. Ella nos indica que é preciso juntar 72 a 2x para ter 262; logo, 2x tem 72 de menos do que 262, o que se escreve:

$$2x = 262 - 72$$

A relação *menos*, isto é, a *differença*, representa-se por um pequeno traço horizontal entre os dois numeros comparados.

Dessa equação tira-se esta outra, subtrahindo 72 de 262:

$$2x = 190$$

Mas, si 2x valem 190, um x vale a metade, o que se escreve:

$$x = \frac{190}{2} = 95$$

E a divisão é indicada, conforme a notação fraccionaria, por um traço horizontal como a subtracção, mas os numeros comparados são collocados, de sorte que o *dividendo* fique por cima do *divisor*.

Tambem se indica a divisão por dois pontos separados por um pequeno traço horizontal $\div$, ou simplesmente pelo signal orthographico.

Neste caso o dividendo se colloca á esquerda e o divisor á direita do signal.

Si quizessemos resolver a questão começando por determinar a maior parte, proceder-se-ia de um modo analogo.

Chamemos y a primeira parte. A segunda teria de menos 72; seria pois $y - 72$.

A somma das duas seria $y + y - 72$ ou $2y - 72$.

Mas essa differença tendo de igualar 262, teriamos pois a equação:

$$2y - 72 = 262$$

Esta equação nos ensina que 2 y excede 262 de 72, pois que é preciso tirar 72 de 2 y para ter 262. Logo,

$$2\,y = 262 + 72$$

ou

$$2\,y = 334$$

ou

$$y = \frac{334}{2} = 167,$$

conforme acima achamos.

Supponhamos que o problema consiste em *dividir a somma de 102 francos entre tres pessoas, de sorte que a primeira tenha mais 34 francos do que a segunda, e a segunda mais 19 francos do que a terceira*. Formamos o seguinte raciocinio, servindo-nos da linguagem vulgar.

Si conhecessemos a terceira parte, para ter a segunda juntar-lhe-iamos 19, e para ter a primeira juntariamos a essa somma 34.

Isto posto, a somma das tres partes devia dar 102 francos.

Ora, a primeira, sendo a somma da segunda com 34, será a somma da terceira mais 19 com 34, isto é, a terceira mais 19 com 34, isto é, a terceira mais 53.

Sommando as tres partes teremos: *a terceira sommada com a terceira mais 19, sommada com a terceira mais 53 é igual a 102 francos*.

Mas a somma da terceira com a terceira, mais 19, dá duas vezes a terceira mais 19.

Esta somma com a terceira, mais 53, dá tres vezes a terceira mais 19, mais 53, ou tres vezes a terceira mais 72.

A somma das tres partes seria, pois, igual a tres vezes a terceira mais 72.

Porém essa somma deve dar 102 francos.

Portanto, tres vezes a terceira tem de menos 72 francos do que 102 francos. Logo tres vezes a terceira será

igual a 102 francos menos 72, isto é, 30. Logo, a *terceira será igual a 30 dividido por tres, isto é, 10.*

Como se vê, esse raciocinio já é bastante embaraçoso.

Entretanto que, com o auxilio da linguagem algebrica, elle é tão simples como o precedente. Diriamos então:

Seja x a terceira parte; a segunda será $x + 19$, e a primeira será $x + 19 + 34$ ou $x + 53$. A somma das tres será $= x + x + 19 + x + 53$ ou $3x + 72$.

Esta somma seria igual a 102. Teriamos, pois, a equação:

$$3x + 72 = 102$$

Ella nos indica que é preciso tirar de 102, 72, para ter 3x, isto é, transforma-se nesta:

$$3x = 102 - 72$$

ou

$$3x = 30;$$

donde, finalmente,

$$x = \frac{30}{3} = 10$$

Si augmentassemos a somma a dividir e o numero de partes e fossemos complicando as relações entre ellas, em breve a complicação dos raciocinios não nos permittiria seguil-os. Ao passo que pela linguagem algebrica seria sempre facil retel-os.

30 — Tomemos o seguinte exemplo de Clairaut:

Tres negociantes fazem uma sociedade: o primeiro fornece 17.000 libras, o segundo 13.000 libras, o terceiro 10.000 libras; como precisam que alguem se entregue aos cuidados exigidos pelo seu commercio, o que só entrou com 10.000 libras encarrega-se de todos os negocios com a condição que tirará de mais que os outros $\frac{3}{100}$ dos lucros; acontece que os lucros sobem a 100.000 libras: pergunta-se: o que toca a cada um, suppondo que cada parte deve ser proporcional á entrada?

Basta o enunciado para se reconhecer quanto seria difficil o raciocinio, servindo-se só da linguagem vulgar.

Universidade de S. Paulo
Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

Utilizemo-nos da linguagem algebrica.

Chamemos a parte do primeiro x.

O segundo entrou com 13.000 libras, ao passo que o primeiro entrou com 17.000 libras; a relação entre as entradas é de

$$\frac{13.000}{17.000} \text{ ou } \frac{13}{17};$$

a parte do segundo devendo ser na mesma proporção, será

$$\frac{13}{17}$$

da parte do primeiro ou

$$\frac{13}{17} x.$$

O terceiro, suppondo que ella só tivesse a parte proporcional á sua entrada, teria $\frac{10}{17}$ do primeiro; mas devendo ter além disso $\frac{3}{100}$ do lucro total, terá mais $\frac{3}{100}$ de 100.000 ou 3.000 libras; sua parte será, pois, $\frac{10}{17} x + 3.000$.

E porque a somma das tres partes deve dar 100.000, ter-se-á a equação:

$$x + \frac{13}{17} x + \frac{10}{17} x + 3.000 = 100.000$$

ou

$$x + \frac{13}{17} x + \frac{10}{17} x = 100.000 - 3.000$$

ou

$$x + \frac{13}{17} x + \frac{10}{17} x = 97.000.$$

Para desembaraçar a incognita dessa equação, note-se que

$$x + \frac{13}{17} x + \frac{10}{17} x \text{ ou } \frac{17}{17} x + \frac{13}{17} x + \frac{10}{17} x$$

não significa senão

$$\frac{40}{17} x,$$

tem-se, pois,

$$\frac{40}{17}\,x = 97.000$$

ou

$$40\,x = 97.000 \times 17$$

ou

$$40\,x = 1.649.000$$

ou

$$x = \frac{1649000}{40} = 41.225.$$

A relação *multiplicação* é indicada aqui pelo mesmo signal que a relação *somma*, collocando-se porém os traços de modo que fiquem inclinados um sobre o outro.

Tambem se indica esta combinação collocando os factores, um ao lado do outro, sem signal algum, ou interpondo-lhes um ponto, quando são numericos.

Achada a parte do primeiro, seria facil determinar a dos outros dois.

Complicando esses exemplos, vê-se que em breve seria impossivel seguir os raciocinios só com o auxilio dos termos universaes, ao passo que é sempre facil acompanhal-os com o auxilio das notações especiaes.

Esse contraste póde facilmente ser verificado no primeiro exemplo, augmentando gradualmente o numero das partes e de seus intervallos; logo se verá a impossibilidade de seguir as *deducções* com o primeiro systema de signaes, ao passo que o segundo basta sempre.

Portanto, esta experiencia é bastante para mostrar quanto os signaes algebricos são indispensaveis ás *deducções mathematicas*.

31 — Ha, porém, outra circumstancia importante: a experiencia póde extender-se á *inducção*.

Com effeito, nós vemos que esses problemas têm todos um aspecto commum; póde-se, pois, desejar conhecer a lei geral que exprime a dependencia das *incognitas* para os *dados*.

Ora, os enunciados geraes não permittiriam apanhal-a; entretanto que ella se patenteará comparando as formulas especiaes.

Para isso retomemos os problemas sómente com os signaes algebricos.

Procuremos em primeiro lugar dividir uma somma em duas partes, das quaes a primeira seja igual á segunda mais um certo numero.

Representemos a segunda por x.

Chamemos d a differença entre a primeira parte e essa segunda, a primeira parte será pois $x + d$.

Chamemos a somma a.

Teremos então a equação:

$$x + x + d = a,$$

ou

$$2x + d = a,$$

ou

$$2x = a - d,$$

ou

$$x = \frac{a - d}{2}.$$

Supponhamos que se trata de dividir a somma em tres partes, das quaes a primeira é maior que a segunda de um certo numero dado e a segunda maior que a terceira de um certo numero tambem dado.

Chamemos a 3ª parte x.

Chamemos o excesso da 2ª sobre a 3ª d; a segunda será pois $x + d$.

Quanto á primeira, notemos que ha toda vantagem em designar o seu excesso sobre a segunda pela letra d, inicial da palavra differença.

Ora, para fazel-o sem confusão, o expediente adoptado consiste em juntar um *indice*, um signal á d.

Este signal póde ser um numero, ou um traço, ou uma outra letra.

Mas si fôr numero, não deve em geral ser collocado superiormente para não confundir-se com o *expoente*, que é o indice especial das potencias.

Neste caso costuma-se collocal-o ordinariamente á direita e abaixo da letra que indica o numero.

Além disso, o indice é sempre escripto em caracter menor do que a letra que elle modifica.

A' vista desta observação representaremos por d_1 (d_1 indica d um ou d primo) a differença entre a primeira parte e a segunda; ella será, pois, $x + d + d_1$; sendo a somma a, teremos a equação em signaes abreviados e indeterminados:

$$x + x + d + x + d + d_1 = a,$$

ou

$$3x + 2d + d_1 = a,$$

donde

$$3x = a - 2d - d_1,$$

e, portanto,

$$x = \frac{a - 2d - d_1}{3}.$$

Si fosse uma somma a dividir por quatro pessoas, teriamos:

4ª parte	x
3ª »	$x + d$
2ª »	$x + d + d_1$
1ª »	$x + d + d_1 + d_2$
Somma.	a

Equação

$$x + x + d + x + d + d_1 + x + d + d_1 + d_2 = a,$$

donde

$$x = \frac{a - 3d - 2d_1 - d_2}{4}.$$

O confronto desta formula com as duas precedentes nos patenteia immediatamente a lei geral que prende a menor parte aos numeros dados.

Por meio desta, seria facil obter a lei geral das outras partes em relação aos dados.

Vê-se, pois, que a linguagem algebrica é indispensavel não só para auxiliar as *deducções* como as *inducções mathematicas*.

32 — Esta prova artificial deve ser seguida, segundo A. Comte, da comparação natural referente a uma questão que já foi resolvida no Calculo Arithmetico.

Referimo-nos ao problema das *combinações*.

Nós tinhamos reconhecido que o numero das combinações quaesquer era igual ao dos arranjos analogos dividido pelas permutações do grupamento.

Exprimamos esse enunciado algebricamente.

Para isso vejamos como se póde condensar em symbolos concisos, claros e geraes cada uma das noções que entram neste enunciado :

A noção de *combinação* representaremos pela letra C, inicial da palavra.

Mas, para que esse symbolo corresponda ao pensamento integral, é preciso que elle designe ao mesmo tempo a totalidade dos objectos e a taxa de grupamento.

Representemos a totalidade por *m* e a taxa de grupamento por *n*.

Isso posto, adoptemos esses numeros para indices e colloquemos a totalidade *m* acima de C, por ser o maior dos indices, tendo, porém, o cuidado de pôl-o, não á direita, mas á esquerda, para distinguil-o da notação propria ao *expoente*.

O numero de combinações em cada caso será designado com a mesma concisão pelo symbolo $^{m}C_{n}$.

Quanto aos arranjos, por motivos analogos, seriamos levados a representar pelo symbolo $^{m}A_{n}$.

E as permutações dependendo só do numero da totalidade, exigiriam apenas um indice, desde então collocado em baixo.

Chega-se assim ao symbolo P_{n} .

De sorte que a nossa formula inicial das combinações em linguagem algebrica fica sendo

$$^{m}C_{n} = \frac{^{m}A_{n}}{P_{n}}.$$

Em vista de ser a formula dos arranjos por meio das permutações a seguinte

$$^{m}A_{n} = \frac{P_{m}}{P_{m-n}},$$

a formula final das combinações será

$$^{m}C_{n} = \frac{1}{P_{n}} \times \frac{P_{m}}{P_{m-n}}$$

ou

$$^{m}C_{n} = \frac{P_{m}}{P_{n} \times P_{m-n}}$$

Porém

$$P_{m} = 1.2.3.\ldots.m,$$

donde

$$^{m}C_{n} = \frac{1.2.3\ldots n\ldots m}{1.2.3\ldots n \times 1.2.3\ldots.(m-n)},$$

que se póde ainda representar assim :

$$^{m}C_{n} = \frac{(m-n+1)\,(m-n+2)\ldots.(m-2)\,(m-1)m}{1.3.3\ldots\ldots n},$$

onde os parenthesis servem para que as operações indicadas se refiram ás quantidades que nelles se acham.

Esta formula, abstrahindo do problema das combinações, tem o enunciado do theorema numerico que vimos em Arithmetica.

Em linguagem algebrica, si designarmos por $^{m}P_{n}$ uma fracção sob essa forma, cujo numerador comece por m e que tenha n factores, teremos:

$$^{m}P_{n} = \frac{m\,(m+1)\,\ldots.(m+n-1)}{1.2.3.4\ldots\ldots n}.$$

Ora, isolemos os maiores factores do numerador e do denominador e os compararemos.

Esses factores são $m+n-1$ e n, cuja differença é m —1.

De sorte que

$$\frac{m+n-1}{n} = \frac{n+m-1}{n}$$

Assim a formula torna-se:

$${}^{m}P_{n} = \frac{m\,(m+1)\ldots.(m+n-2)}{1.2.3.\ldots.\,(n.-1)}\left(1+\frac{m-1}{n}\right)$$

ou

$$\frac{m\,(m+1)\ldots\ldots(m+n-2)}{1.2.3.\ldots\ldots\,(n-1)} + \frac{(m-1)\,m\,(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2.3.\ldots\ldots\ldots(n-1)\,n}.$$

isto é,

$${}^{m}P_{n} = {}^{m}P_{n-1} + {}^{m-1}P_{n}.$$

Ora, no problema das repartições teriamos

$${}^{m}R_{n} = {}^{m}R_{n-1} + {}^{m-1}R_{n},$$

o que patenteia a analogia das duas leis com muito maior facilidade do que quando são expressas pela notação arithmetica.

Reconhece-se assim, antes do inicio das especulações algebricas, quanto o surto dellas deve ser assistido por um judicioso emprego dos signaes que mais lhe convém (5 c).

33 — Notemos, emfim, que a disposição philosophica resultante dessas provas scientificas consiste em considerar essa linguagem parcial como uma instituição secundaria, cuja efficacia geral não se deve nem menospresar, nem exagerar.

Ella é menos capaz do que as linguas, propriamente ditas, de assistir á meditação, porque não comporta uma constituição fixa e completa.

Arbitrariamente composta de signaes, que não têm relação alguma com as idéas correspondentes, ella só faci

---

(5 c) Notas do curso do cidadão R. Teixeira Mendes.

lita a combinação destas em virtude da extrema simplicidade dellas.

Não devemos olhal-a sinão como um *supplemento especial* da linguagem universal, da qual não póde nunca tornar-se inteiramente independente.

Toda a sua efficacia consiste em secundar a elaboração *inductiva* e *deductiva* dos detalhes do calculo algebrico, sem que possa de modo algum ter parte na construcção das theorias relativas á *grandeza indeterminada*.

(A. Comte — *Synthèse subjective*.)

34 — A UTILISAÇÃO NORMAL DA LINGUAGEM ALGEBRICA; SUA INFLUENCIA AGGRAVANTE SOBRE A ANARCHIA ACADEMICA — Em vez de usar moderadamente da linguagem algebrica, como um mero instrumento de deducção e mesmo de inducção, capaz de auxiliar poderosamente as elaborações mathematicas, o regimen academico abusou do seu emprego, exagerando assás o seu papel. « Ella permittiu, assim, as usurpações das mediocridades laboriosas, pela substituição dos signaes aos pensamentos.

Deve ser tanto quanto possivel excluida, emfim, do discurso mathematico, não sómente como symptoma de máo gosto e pedantismo, mas como indicio de incapacidade intellectual.

Convém sómente aos detalhes algebricos, cujo desenvolvimento, desculpavel sob o surto empirico, repugna ao estado normal, em que cada ouvinte ou leitor deve pessoalmente suppril-a, afim de que o encadeamento das concepções seja mais bem apanhado.»

35 — SUA UTILIZAÇÃO PESSOAL E COMPARAÇÃO COM A LINGUAGEM GERAL — Emfim, a linguagem algebrica só deve ser empregada individualmente para desenvolver os detalhes dos raciocinios abstractos sobre as grandezas indeterminadas.

« Os seus artificios devem ser apreciados á medida que surgem, nas occasiões mais aptas para caracterisal-as. Os principaes devem ser indicados desde o começo.»

Apreciada philosophicamente, vê-se que a linguagem algebrica é de uma extrema concisão, porquanto se compõe principalmente de substantivos, de poucos adjectivos (*expoentes, indices*, etc.), de alguns adverbios (*mais, menos*, etc.), e de um unico verbo (*ser*), quasi sempre subentendido. (5 d)

Aliás, a penuria desta linguagem parcial é consoante os seus fins, attenta a simplicidade e generalidade dos raciocinios que deve exprimir.

§ 6

Applicação dos symbolos algebricos para exprimir as relações numericas resultantes do calculo arithmetico. Duplo aperfeiçoamento da linguagem algebrica

36 — Recorrendo á linguagem algebrica, póde-se com facilidade traduzir succintamente as relações numericas a que nos conduziu o calculo dos valores.

Começando pela numeração systematica, a concepção de um numero qualquer, como elemento da escala numerica, exprime-se concisamente pela fórmula

$$N = a + b\beta + c\beta^2 + d\beta^3 + e\beta^4 + \ldots + l\beta^m,$$

onde N representa o numero considerado, β a base numeral adoptada, e $a, b, c, d, e \ldots . l$ os numeros inferiores a ella.

(5 d) O emprego dos signaes + (*mais*) e — (*menos*) é attribuido a Rudolff (1522), assim como o de radical $\surd$, que apenas é uma corrupção da letra minuscula e manuscripta *r*, inicial da palavra *raiz*.

O signal = (*igual*) é devido a Robert Recorde (1557); e os signaes > (*maior*) e < (*menor*) são devidos a Harriot.

O ponto como signal de multiplicação e os dois pontos como signal de divisão foram empregados por Leibnitz.

A barra de fracção é encontrada nas obras de Léonard de Pise.

O signal de multiplicação × é de Oughtred (1631). Parece que

Apreciada philosophicamente, esta formula resume em si todas as combinações essenciaes do calculo arithmetico; mas, para melhor comprehender o verdadeiro papel da linguagem algebrica, vamos representál-a separadamente.

37 — OS PROBLEMAS DA ADDICÇÃO E DA SUBTRACÇÃO — No caso da addicção, representando por a e b dois numeros quaesquer a addicionar, e por s a sua somma, esta será expressa evidentemente por $s = a + b$.

Suppondo que uma destas parcellas fica constante e que a outra recebe variações, já vimos que a somma varia tambem e do mesmo modo:

Essa dependencia da somma para com a parcella póde ser succintamente expressa por $y = a + x$, onde x representa a parcella variavel, a a parcella constante e y a somma assim formada.

Raciocinando de modo analogo relativamente ao caso da subtracção, chega-se ás expressões $d = a - b$ e $y = a - x$, em que d representa a differença, a o minuendo e b ou x o minuidor, que suppomos variavel na segunda expressão.

38 — MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO — Para a multiplicação, representando por p o producto e por a e b os respectivos factores, exprimir-se-á esta relação numerica fazendo $p = a \times b$ ou, mais simplesmente, $p = ab$.

---

foi Miguel Stieffel (1544) quem primeiro supprimiu o signal indicando a multiplicação, escrevendo *ab* invez de $a \times b$.

O parenthesis ( ) e o colchete [ ] são devidos a Albert Girard.

O signal $\therefore$ (*logo*) foi usado pelos academicos do seculo XVIII.

Emfim, o uso dos expoentes fraccionarios é devido a Stevin (1548-1620).

Wallis creou os expoentes negativos, bem como o signal ∞ (*infinito*), empregado para representar uma quantidade infinitamente grande. Entre os romanos, este signal designava ordinariamente *mil*, mas a expressão *mil* significava tambem algumas vezes um numero muito grande. (Ver Obry Terquem — *Bulletin des Sciences Mathematiques*). Usa-se a combinação desses signaes como em $\pm$ (*mais ou menos*) $\gtrless$ (*maior ou menor*), etc.

O producto variando directamente com qualquer de seus factores, póde-se tambem representar semelhante dependencia pela expressão $y = ax$, em que y é o producto, a um dos factores supposto constante, e x o outro, hypotheticamente variavel.

Suppondo que este factor se torne infinitamente grande, já vimos que o producto sel-o-á tambem, e este facto póde ser traduzido algebricamente, escrevendo-se $y = a \times \infty = \infty$.

Si, ao contrario, o factor variavel torna-se infinitamente pequeno, a ponto de poder-se consideral-o como nullo, tal circumstancia traduz-se algebricamente pela expressão $y = a \times o = o$.

Emfim, si os dois factores variarem simultaneamente, em razão inversa, de sorte a tornar-se um infinitamente grande e o outro infinitamente pequeno, o facto será representado algebricamente pela expressão $y = o \times \infty$; e semelhante producto será indeterminado si a lei de variação dos factores não for reconhecidamente a mesma.

Quanto á divisão, designando-se por a o dividendo, por b o divisor e q o quociente, semelhante relação será traduzida symbolicamente pela expressão

$$q = \frac{a}{b}$$

Suppondo que o dividendo fique constante e o divisor varie, traduziremos a variação inversa do quociente pela expressão

$$y = \frac{a}{x},$$

onde y recebe variações dependentes de x.

Si nestas variações o divisor x tornar-se infinitamente pequeno e, portanto, o quociente infinitamente grande, a expressão precedente póde ser representada por

$$y = \frac{a}{o} = \infty.$$

Si, ao contrario, o dividendo fôr nullo, será

$$y = \frac{0}{x} = 0 \text{ (6 a)}.$$

39 — A POTENCIAÇÃO E A RADICIAÇÃO — Representando por a um numero qualquer e formando o producto de m factores iguaes a elle, teremos evidentemente a sua potencia do grau m.

Chamando p esta potencia, podemos traduzil-a pela expressão $p = a^m$.

Si o numero dado tornar-se maior ou menor umas tantas vezes, a sua potencia crescerá ou decrescerá proporcionalmente; e essa dependencia póde ser resumida na expressão $y = x^m$, onde x é o numero variavel e m o grau da potencia resultante que chamamos y.

Para representar algebricamente a raiz qualquer de um numero, costuma-se empregar o symbolo $\sqrt{\ }$ que, conforme dissemos, é apenas uma corrupção da letra r, inicial da palavra raiz.

Assim, pois, representando por a um numero qualquer e por m o indice da raiz a extrahir, que chamaremos r, póde-se exprimil-a escrevendo

$$r = \sqrt[m]{a}.$$

Suppondo que o numero dado soffre variações, é evidente que a raiz variará tambem, e tal dependencia poderá ser representada pela expressão

$$y = \sqrt[m]{x}.$$

(6a) Em nota especial no fim deste paragrapho desenvolveremos algebricamente a doutrina da *divisibilidade*, conforme a tratamos na arithmetica (theoria da divisão, § 21).

Ahi, como é uso em linguagem mathematica, empregamos uma serie de pontos (ordinariamente quatro ou mais) para significar uma successão de termos ou de expressões.

40 — Nas progressões arithmeticas, as questões fundamentaes, relativas á determinação do valor de um termo qualquer e da somma de uma parte da serie, podem ser traduzidas succintamente pelas relações algebricas :

$$l = a \pm (n - 1)r \text{ e } S = \frac{(a + l)\, n}{2},$$

devendo-se adoptar na primeira o signal *mais*, ou o signal menos, conforme a progressão fôr crescente ou decrescente, e admittir-se em ambas que a é o primeiro termo da progressão, l o ultimo considerado, r a razão ou base e n o numero de termos que se considera.

Introduzindo a primeira formula na segunda, mediante a substituição de l nesta ultima, teremos

$$S = \frac{(2a + nr - r)n}{2}$$

ou

$$S = \frac{(2a - nr + r)n}{2}.$$

sendo a primeira para as progressões crescentes e a segunda para as decrescentes.

Si, por exemplo, a progressão fôr a serie dos numeros impares, teremos, por ser $r = 2$ e $a = 1$, que $l = 1 + (n - 1)\, 2$. $l = 1 + 2n - 2$ ou $l = 2n - 1$, que é a formula dos numeros impares.

Neste caso virá para a somma de um numero qualquer de termos a expressão

$$S = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = \frac{2n \times n}{2} = \frac{2n^2}{2} \text{ ou } S = n^2.$$

Si a progressão fôr a serie dos numeros pares, por ser $a = 2$ e $r = 2$, teremos $l = 2 + (n - 1)\, 2 = 2 + 2n - 2$ ou $l = 2n$, que é a formula geral dos numeros pares.

Juntando a unidade a um numero par qualquer $2n$, ter-se-á um numero impar ; de sorte que $2n + 1$ exprime tambem os numeros impares.

Combinando esta formula com a já citada, vê-se que $2n \pm 1$ é a formula geral dos numeros impares.

No caso dos numeros pares, virá para a somma de um numero qualquer de termos a expressão

$$S = \frac{(2 + 2n)n}{2} = \frac{2n + 2n^2}{2} \text{ ou } S = n + n^2.$$

Si a progressão fôr a serie natural dos numeros inteiros, será $l = 1 + (n - 1) = 1 + n - 1$ ou $l = n$.

Neste caso, para a somma de um numero qualquer de termos virá

$$S = \frac{(1 + n)n}{2}$$

ou

$$S = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Esta formula, como as duas precedentes, foi obtida introduzindo a *razão* na formula geral da *somma*, mediante a substituição de l pela sua expressão generica.

Comparando os resultados precedentes, percebe-se porque a somma de um numero qualquer de termos da serie dos pares $n + n^2$ é o dobro da de igual numero da serie natural,

$$\frac{n + n^2}{2} = \frac{n(n + 1)}{2},$$

e porque esta ultima equivale á metade do producto do ultimo *termo* considerado pelo seguinte.

Finalmente, a formula da razão será

$$r = \frac{l - a}{n - 1}$$

si a progressão fôr crescente, e

$$r = \frac{a - l}{n - 1}$$

si fôr decrescente.

Para applicar estas formulas á *insersão* de *m meios differenciaes,* basta substituir nos respectivos denominadores n — 1 por m + 1, que é então o numero de termos precedentes ao ultimo.

41 — Os *numeros figurados,* distinguindo-se em series de diversas ordens, conforme vimos em arithmetica, dão lugar a relações distinctas, que podem ser expressas algebricamente.

Para a sommação de *m* termos da serie dos numeros triangulares ou figurados de 2ª ordem, teremos, conforme o que foi dito em arithmetica (§ 36), a expressão seguinte:

$$S_2 = \frac{m\,(m+1)\,(m+2)}{1.\ 2.\ 3.}.$$

Um termo de ordem qualquer de semelhante serie sendo equivalente, como vimos, á somma de igual numero na serie natural, é pois expresso por

$$S_1 = \frac{(1+n)n}{2},$$

já indicada na secção precedente.

Para a sommação de *m* termos da serie dos numeros pyramidaes triangulares ou figurados de 3ª ordem, virá a expressão :

$$S_3 = \frac{m\,(m+1)\,(m+2)\,(m+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.$$

Um termo de ordem qualquer de semelhante serie equivalendo, como vimos, á somma de igual numero de termos da serie precedente, será traduzido pela expressão de S_2.

Para a sommação dos numeros pyramidaes quadrangulares ou figurados de 4ª ordem, teremos

$$S_4 = \frac{m\,(m+1)\,(m+2)\,(m+3)\,(m+4)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5}$$

e assim por diante.

Vimos porque estas expressões se acham comprehendidas na formula geral das *repartições*, a qual póde ser expressa do modo seguinte:

$$^{m}R_{n} = \frac{(m+1)\,(m+2)\ldots(m+n-2)\,(m+n-1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ (n-2)\,(n-1)},$$

onde basta fazer successivamente $n = 4, 5, 6\ldots$ e diminuir m de uma unidade para obter as formulas precedentes.

Mostrámos em Arithmetica a connexidade existente entre esta ultima formula e a das combinações: essa dependencia póde ser representada algebricamente pela expressão

$$^{m}R_{n} = {}^{m+n-1}C_{n-1};$$

mas, pelo que dissemos na *Theoria das Combinações*,

$$^{m}C_{n} = {}^{m}C_{m-n}.$$

Substituindo, portanto, esta naquella, será tambem:

$$^{m+n}-{}^{1}C_{n-1} = {}^{m+n-1}C_{m},$$

donde, por conseguinte, póde-se dizer que

$$^{m}R_{n} = {}^{m+n-1}C_{m}.$$

Inversamente, para passar das combinações ás repartições, facilmente se mostra que basta a formula

$$^{m}C_{n} = {}^{m-n}R_{n+1}.$$

Porque:

$$^{m}C_{2} = \frac{m\,(m-1)}{1.\ 2} = \frac{(m-1)\ m}{1.\ 2} = {}^{m-2}R_{3}$$

$$^{m}C_{3} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.\ 2.\ 3} = \frac{(m-2)\,(m-1)\ m}{1.\ 2.\ 3.} = {}^{m-3}R_{4}$$

$$^{m}C_{4} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = \frac{(m-3)\,(m-2)\,(m-1)\ m}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = {}^{m-4}R_{5}$$

.....

.....

donde se induz

$$^{m}C_{n} = \frac{m\ (m-1)\ (m-2)\ (m-3)\ldots\ (m-n+2)\ (m-n+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4\ \ldots\ldots\ (n-1)\ n}$$

ou

$$^{m}C_{n} = \frac{(m-n+1)\ (m-n+2)\ldots.(m-3)\ (m-2)\ m-1)\ m}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4\ldots\ldots\ldots.(n-1)\ n} = {}^{m-n}R_{n+1}.$$

Querendo exprimir este resultado por meio dos *arranjos* e *permutações* ou sómente por meio destes ou daquelles, poremos :

$$^{m}C_{n} = \frac{^{m}A_{n}}{P_{n}} = \frac{^{m}A_{n}}{^{n}A_{n}} = \frac{P_{m}}{P_{m-n} \times P_{n}} = {}^{m-n}R_{n+1}.$$

Para a somma dos productos dos numeros inteiros, tomados dois a dois em sua ordem natural, a formula obtida é expressa por

$$2^{m-1}R_{4} = \frac{2\ (m)\ (m+1)\ (m+2)}{1.\quad 2.\quad 3.} = \frac{(m)\ (m+1)\ (m+2)}{3} = s_{2}\ ;$$

para a somma dos productos dos mesmos numeros, tres a tres, será

$$2.\ 3.\ ^{m-1}R_{5} = \frac{m.\ (m+1)\ (m+2)\ (m+3)}{4} = s_{3}\ ;$$

para a somma dos productos, considerados quatro a quatro, virá

$$S_{4} = \frac{m\ (m+1)\ (m+2)\ (m+3)\ (m+4)}{5},\ \text{etc.}$$

Para a somma dos n primeiros numeros quadrados, a formula obtida será algebricamente representada por

$$S_{2} = \frac{(2\ n+1)\ n+\ (n+1)}{1.\quad 2.\quad 3}\ ;$$

para a somma dos cubos dos n primeiros numeros inteiros, teriamos

$$S_{3} = \frac{n^{2}\ (n+1)^{2}}{4}.$$

Para as outras potencias, mais adiante estabeleceremos as formulas algebricas por um meio mais simples.

42 — Só nos resta, para ter uma justa idéa da constituição normal da linguagem algebrica, apreciar o duplo aperfeiçoamento que lhe introduziu Augusto Comte.

O primeiro aperfeiçoamento consiste essencialmente no uso do Espaço para as meditações numericas.

Comquanto ordinariamente a instituição do Espaço apenas seja utilizada em Geometria, nada impede de aproveital-a no Calculo, quer arithmetico, quer algebrico, para secundar os estudos mais abstractos.

Dando um caracter poetico a tal instituição, Augusto Comte costumava meditar sobre os numeros determinados, ou indeterminados, vendo-os modelados no Espaço qual impressos num painel branco em caracteres verdes.

O segundo aperfeiçoamento consiste em utilizar-se dos sons para melhor reter as formulas algebricas.

Outrosim, embóra as imagens auditivas se adaptem melhor aos casos em que o sentimento tem mais intervenção, ellas podem, como as visuaes, assistir tambem ás mais aridas meditações.

Dahi a possibilidade de nos habituarmos a escutar os signaes algebricos.

Sendo elles alphabeticos e, portanto, providos de sons proprios, o effeito de sua repetição nas formulas algebricas dá a estas uma certa cadencia semelhante á do verso, facilitando assim a sua fixação na memoria.

Outro tanto não acontece com os signaes hyeroglíphicos, que, por não terem sons proprios, não suscitam espontaneamente sinão imagens visuaes.

Assim, pois, o *espaço* póde dar-nos ao mesmo tempo o éco dos sons algebricos e o molde das formulas respectivas.

Desenvolvendo assim a assistencia dos sons nas meditações algebricas, a mathematica nos manifesta desde o seu inicio toda a efficacia de uma plena instituição dos signaes.

Ella nos mostra ao mesmo tempo que, para bem elaborar os pensamentos humanos, é mistér o concurso dos sentidos sob o ascendente do que pertence á audição.

Comquanto este ultimo seja empregado ordinariamente nas especulações concretas, elle convém igualmente aos estudos abstractos, cuja extrema simplicidade compensa assás as difficuldades que a tal respeito provêm da abstracção.

«Extendida, tanto quanto possivel, a instituição phonica da linguagem algebrica deve normalmente utilizar o concurso da arte com a sciencia. Sob um regimen menos empirico do que aquelle em que surgiu o Calculo das relações, tal assistencia teria sido logo indicada pela natureza alphabetica das notações, de accôrdo com o uso espontaneamente introduzido pela poesia de unir sempre a audição á visão, para assistir á meditação. »

Assim, pois, nada impede que se facilite a reproducção das formulas algebricas, fazendo mesmo concorrer com a voz natural instrumentos artificiaes a este fim apropriados.

Deste modo ver-se-á começar para os elementos do discurso algebrico a assistencia normal da arte musical, applicada ás formulas compostas, nas sciencias mais elevadas, onde o sentimento compensa bem as difficuldades (6 b).

Tendo feito a apreciação geral do Calculo Algebrico, e conhecendo assim o seu verdadeiro objecto e alcance, bem como o desenvolvimento systematico que deve ter a linguagem mathematica, podemos abordar agora a seu estudo especial.

(6 b) A. COMTE — *Synthèse subjetive* Chap. deuxième.

NOTA A — A doutrina da divisibilidade, tal como a concebemos em Arithmetica, póde ser apresentada mui succintamente por meio da linguagem algebrica. Antes, porém, de fazel-o, estabeleçamos sob esta fórma as propriedades citadas para lhes servirem de base.

1ª Propriedade — *O numero que divide as parcellas de uma somma, divide tambem a somma.*

E' o que fazemos no capitulo seguinte:

$$N = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 + \ldots + a_2 b^r$$

Divisibilidade por 2:

Sendo:

$$b = 10 = 2 \times 5 \text{ é } b^m = 10^m = 2^m \times 5^m,$$

temos

$$N = a_0 + a_1 \times 2 \times 5 + a_2 \times 2^2 \times 5^2 + a_3 \times 2^3 \times 5^3 + \ldots + a_r \times \times 2^r \times 5^r$$

Demonstração:

Sejam *a* e *b* as parcellas de uma somma *s*, e *d* o numero que as divide: si *d* divide exactamente *a* e *b*, os quocientes respectivos serão numeros inteiros.

Representando estes por *q* e *q'*, teremos, por ser o dividendo igual ao producto do divisor pelo quociente: $a = dq$ e $b = dq'$; sommando estas igualdades, membro a membro, virá: $a + b = dq + + dq' = d(q + q')$.

Como, porém, $a + b = s$, por hypothese, teremos que $s = d \times \times (q + q')$.

Dividindo ambos os membros desta igualdade por *d*, será $\frac{s}{d} = q + q'$, onde se vê que *d* divide *s*, visto como $q + q'$ é um numero inteiro.

2ª Propriedade — *O numero que divide a somma* s *e uma de suas parcellas, divide tambem a outra.* Sejam *a* e *b* as parcellas, *s* a somma e *d* o numero que divide esta, bem como a parcella *a*.

Trata-se de mostrar que *d* divide *b*. Si *d* divide *s* e *a*, os respectivos quocientes serão numeros inteiros.

Representando-se estes por *q* e *q'*, teremos $s = dq$ e $a = dq'$. Subtrahindo-se esta igualdade da precedente, virá $s - a = dq - - dq' = d(q - q')$.

Como, porém, por hypothese, $s = a + b$, será $s - a = b$.

Substituindo $s - a$ por b na igualdade acima, virá $b = d(q - q')$.

Dividindo ambos os membros desta igualdade por d, obteremos $\frac{b}{d} = q - q'$.

Ora, $q - q'$ sendo numero inteiro, como differença entre dois numeros inteiros, vê-se que d divide exactamente b, visto como não ha resto.

Esta propriedade annuncia-se tambem deste modo:

O numero que divide o minuendo e minuidor, divide tambem o resto.

3ª Propriedade — *O numero que divide os factores de um producto, divide tambem o producto.*

Mas a parte

$$a_1 \times 2 \times 5 + a_2 \times 2^2 \times 5^2 + a_3 \times 2^3 \times 5^3 + \ldots + a^r \times \times 2^r \times 5^r$$

é divisivel por 2; logo, para que N o seja, é necessario e bastante que 2 divida a_0 (1ª propriedade).

Sejam p o producto, a e b os factores e d o numero que os divide: trata-se de mostrar que d divide *p*.

Si, por hypothese *d* divide exactamente *a* e *b*, os respectivos quocientes serão numeros inteiros.

Representando-se estes por *q* e *q'*, teremos: $a = dq$ e $b = dq'$.

Multiplicando estas duas igualdades, membro a membro, virá: $a \times b = dq \times dq'$.

Por ser hypotheticamente $a \times b = p$, a igualdade precedente torna-se: $p = dq \times dq'$.

Dividindo ambos os membros desta igualdade por *d*, será

$$\frac{p}{d} = dqq',$$

onde se vê que d divide exactamente p por ser dqq' um numero inteiro como resultante da multiplicação de numeros inteiros. Esta propriedade enuncia-se tambem deste modo: *O numero que divide outro divide qualquer de seus multiplos.*

4ª Propriedade — *Si um numero dividir uma das parcellas de uma somma e não dividir a outra, tambem não dividirá a somma; e os restos das divisões da somma e da parcella não divisivel pelo mesmo numero serão iguaes.*

Sejam *s* a somma, *a* e *b* as parcellas e *d* o numero que divide aquella e não divide esta.

Provemos que *d* tambem não divide *s* e que os restos das duas divisões são iguaes.

Chamando *q* e *q'* os quocientes e *r* o resto da divisão de *b* por *d*, teremos $a = dq$ e $b = dq' + r$.

Sommando estas igualdades, virá $a + b = dq + dq' + r$, ou $s = d(q + q') + r$.

Dividindo por *d* ambos os membros desta igualdade, obtem-se

$$\frac{s}{d} = q + q' + \frac{r}{d},$$

onde se vê que *d* não divide *s* porque ha um resto, e que este é o mesmo que resultou por hypothese da divisão de *b* por *d*.

Estabeleçamos agora os caracteres de divisibilidade por *2, 4, 5, 25, 3, 9, 11* e *7* no systema decimal, recorrendo á expressão geral dos numeros em um systema qualquer de numeração.

Assim, *si o algarismo das unidades de um numero N fôr zero ou divisivel por 2, N tambem o será.*

Divisibilidade por 4:

A parte:

$$a_2 \times 2^2 \times 5^2 + a_3 \times 2^3 \times 5^3 + \ldots + a_r \times 2^r \times 5^r$$

da expressão de N sendo divisivel por $2^2 = 4$ (3ª propriedade, e porque a somma de muitos multiplos de um numero é ainda um multiplo delle), para que N o seja é necessario e bastante que quatro divida

$$a_0 + a_1 \times 2 \times 5 = a_0 + a_1 \times 10.$$

Assim, *si o numero formado pelos dois ultimos algarismos da direita de N fôr divisivel por 4, ou si estes forem zeros, N será divisivel por 4.*

No caso contrario, o resto de sua divisão por 4 será igual ao da divisão de N pelo mesmo divisor (4ª propriedade).

Por uma marcha semelhante, estabelecer-se-ia o caracter de divisibilidade por 8.

Divisibilidade por 5:

A parte:

$$a_1 \times 2 \times 5 + a_2 \times 2^2 \times 5^2 + \ldots a_r \times 2^r \times 5^r$$

da expressão de N sendo divisivel por 5, para que N o seja é necessario e bastante que 5 divida a_0.

Assim, *si o algarismo das unidades de N fôr zero, ou divisivel por 5, N tambem sel-o-á.*

Divisibilidade por 25 :

A parte :

$$a_2 \times 2^2 \times 5^2 + a_3 \times 2^3 \times 5^3 + \ldots + a_r \times 2^r \times 5^r$$

da expressão de N sendo divisivel por $5^2 = 25$, para que N o seja é necessario e bastante que 25 divida $a_0 + a_1 \times 10$.

Assim, *si o numero formado pelos dois ultimos algarismos da direita de N fôr divisivel por 25, ou si estes fôrem zeros, N tambem será divisivel.*

Pode-se adoptar marcha analoga para deduzir os caracteres de divisibilidade por 5^3 ou 125, etc.

Divisibilidade por 3:

Sendo $b = 10 = 9 + 1 = 3 \times 3 + 1$ ou multiplo de $3 + 1$; $a = 10^2 = 99 + 1 = 3 \times 33 + 1$ ou mult. de $3 + 1$; $b^3 = 10^3 = 999 + 1 = 3 \times 333 + 1$ ou mult. de $3 + 1$ e em geral, $b^m = 10^m =$ mult. de $3 + 1$, temos portanto $N = a_0 + a_1$ (mult. de $3 + 1$) $+ a_2$ (mult. de $3 + 1$) $+ a_3$ (mult. de $3 + 1$) $+ \ldots + a_r$ (mult. de $3 + 1$) $= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_r) + (a_1$ mult. de $3 + a_2$ mult. de $3 + a_3$ mult. de $3 + \ldots + a_r$ mult. de 3).

A segunda parte da expressão de *N* sendo divisivel por 3, para que *N* o seja, é necessario e bastante que 3 divida a primeira parte.

Assim, *si a somma dos valores absolutos dos algarismos de um numero fôr divisivel por 3, este numero tambem sel-o-á.*

Divisibilidade por 9:

Sendo $b = 10 = 9 + 1$, $b^2 = 10^2 = 99 + 1 = 9 \times 11 + 1$ ou mult. de $9 + 1$, $b^3 = 10^3 = 999 + 1 = 9 \times 111 + 1$ ou mult. de $9 + 1$, e em geral, $b^m = 10^m =$ mult. de $9 + 1$, temos portanto $N = a_0 + a_1 (9 + 1) + a_2$ (mult. de $9 + 1$) $+ a_3$ (mult. de $9 + 1$) $+ \ldots + a_r$ (mult. de $9 + 1$) $= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + (a_1 \times 9 + a_2$ mult. de $9 + a_3$ mult. de $9 + \ldots + a_r$ mult. de 9).

A segunda parte da expressão de *N* sendo divisivel por 9, para que *N* o seja é necessario e bastante que 9 divida a primeira parte.

Assim, *si a somma dos valores absolutos dos algarismos de um numero N fôr divisivel por 9, N tambem sel-o-á.*

Divisibilidade por 11:

Sendo $b = 10 = 11 - 1$, $b^2 = 10^2 = 99 + 1 = 11 \times 9 + 1$ ou mult. de $11 + 1$, $b^3 = 10^3 = 990 + 10 = 11 \times 90 + 11 - 1 = 11 \times 91 - 1$ ou mult. de $11 - 1$, $b^4 = 10^4 = 9999 + 1 = 11 \times 909 + 1$ ou mult. de $11 + 1$, $b^5 = 10^5 = 99990 + 10 = 11 \times 9090 + 11 - 1 = 11 \times 9091 - 1$ ou mult. de $11 - 1$, e, em geral, $b^{2m} = 10^{2m}$ = mult. de $11 + 1$, $b^{2m+1} = 10^{2m} + 10$ = mult. de $11 - 1$, temos, pois, $N = a_0 + a_1 (11 - 1) + a_2$ (mult. de $11 + 1$) $+ a_3$ (mult. de $11 - 1$) $+ a_4$ (mult. de $11 + 1$) $+ a_5$ (mult. de $11 - 1$) $+ \ldots +$ $+ a_{2m}$ (mult. de $11 + 1$) $+ a_{2m+1}$ (mult. de $11 - 1$) $+ \ldots = [(a_0 +$ $+ a_2 + a_4 + \ldots + a_{2m} + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2m+1} +$ $+ \ldots)] + (a_1 \times 11 + a_2$ mult. de $11 + a_3$ mult. de $11 + \ldots + a_r$ mult. de 11).

A segunda parte da expressão de *N* sendo divisivel por 11, para que *N* o seja, é necessario e bastante que 11 divida a primeira parte. (2ª propriedade).

Assim, *si a differença entre a somma dos valores absolutos dos algarismos de ordem impar e a somma dos valores absolutos dos algarismos de ordem par de um numero N fôr zero ou um numero divisivel por 11, N tambem sel-o-á.*

Divisibilidade por 7:

Sendo $b = 10 = 7 + 3$, $b^2 = 10^2 = 91 + 9 = 7 \times 13 + 3^2$ ou mult. de $7 + 3^2$, $b^3 = 10^3 = 973 + 27 = 7 \times 139 + 3^3$ ou mult. de $7 + 3^3$, $b^4 = 10^4 = 9.919 + 81 = 7 \times 1.417 + 3^4$ ou mult. de $7 +$ $+ 3^4$, e, em geral, $b^m = 10^m$ = mult. de $7 + 3^m$, temos, pois, $N =$

$= a_0 + a_1 (7 + 3) + a_2$ (mult. de $7 + 3^2$) $+ a_3$ (mul. de $7 + 3^3$) $+ \ldots + a_r$ (mult. de $7 + 3^r$) $= (a_0 + a_1 \times 3 + a_2 \times 3^2 + a_3 \times 3^3 + \ldots + a_r \times 3^r) + (a_1 \times 7 + a_2$ mult. de $7 + a_3$ mult. de $7 + \ldots + a_r$ mult. de 7).

A segunda parte da expressão de *N* sendo divisivel por sete, para que *N* o seja, é necessario e bastante que sete divida a primeira parte.

Assim, *si a somma dos valores absolutos dos algarismos de um numero N, a partir da direita respectivamente multiplicados pelas potencias successivas de tres, a começar da potencia de gráo zero, fôr divisivel por sete, N tambem sel-o-á.*

A divisibilidade por sete póde ainda ser estabelecida do modo seguinte:

$N = a_0 + a_1 (7 + 3) + a_2$ (mult. de $7 + 3^2$) $+ a_3$ (mult. $7 + 3^3$) $+ \ldots + a_r$ (mult. de $7 + 3^r$) $= a_0 + a_1 \times 7 + a_1 \times 3 + a_2$ mult. de $7 + a_2 \times 3^2 + a_3$ mult. de $7 + a_3 \times 3^3 + \ldots + a_r$ mult. de $7 + a_r \times 3^r = a_1 \times 7 + a_2$ mult. de $7 + a_3$ mult. de $7 + \ldots + a_r$ mult. de 7) $+ a_0 + a_1 \times 3 + a_2 (7 + 2) + a_3 (7 \times 4 - 1) + a_4 (7 \times 12 - 3) + a_5 (7 \times 35 - 2) + a^6 (7 \times 104 + 1) + a_7 (7 \times 312 + 3) + a_8 (7 \times 937 + 2) + a_9$ (mult. de $7 - 1$) $+ a_{10}$ (mult de $7 - 8$) $+ a_{11}$ (mul. de $7 - 2$) $+ \ldots =$ ($a_1 \times 7 + a_2$ mnlt. de $7 + \ldots$, a_r mult. de $7 =$ mult. de 7) $=$ mult. de $7 + [(a_0 + a_1 \times 3 + a_2 \times 2) - (a_3 + a_4 \times 3 + a_5 \times 2) + (a_6 + a_7 \times 3 + a_8 \times 2) - (a_9 + a_{10} \times 3 + a_{11} \times 2) + \ldots] =$ mult. de $7 + [(a_0 + a_1 \times 3 + a_2 \times 2) + a_6 + a_7 \times 3 + a_8 \times 2) + a_{12} + a_{13} \times 3 + a_{14} \times 2) + \ldots] - [(a_3 + a_4 \times 3 + a_5 \times 2) + (a_9 + a_{10} \times 3 + a_{11} \times 2) + a_{15} + a_{16} \times 3 + a_{17} \times 2) + \ldots]$.

A primeira parte da expressão de *N* sendo divisivel por 7, para que *N* o seja, é necessario e bastante que 7 divida a segunda parte.

Assim, *dividindo um numero N em classes de tres algarismos da direita para a esquerda, multiplicando depois o segundo algarismo de cada classe por 3 e o terceiro por 2, sommando em seguida — de um lado, os volores absolutos das classes de ordem impar, — de outro lado — os das classes de ordem par, e subtrahindo — por ultimo — a segunda somma da primeira: si a differença obtida for zero, ou um numero divisivel por 7, N tambem sel-o-á.*

Vimos precedentemente que é possivel estabelecer por via simples e uniforme os caracteres de divisibilidade dos numeros no systema decimal.

Essa marcha é inteiramente geral, pois, baseada no emprego da formula

$$N = a_0 + a_1\, b + a_2\, b^2 + a_3\, b^3 + \ldots + a_r\, b^r,$$

póde ser adoptada para o estabelecimento dos caracteres de divisibilidade em qualquer systema de numeração.

Mostremos isso por dois exemplos.

Divisibilidade por 2 no systema septimal:

Temos:

$b = 6 + 1 = 2 \times 3 + 1$ ou mult. de $2 + 1$, $b^2 = 6^2 + 2 \times 6 + 1 = 2^2 \times 3^2 + 2^2 \times 3 + 1 = 2\,(2 \times 3^2 + 2 \times 3) + 1$ ou mult. de $2 + 1$, $b^3 = 6^3 + 3 \times 6^2 + 3 \times 6 + 1 = 2^3 \times 3^3 + 2^2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 1 = 2\,(2^2 \times 3^3 + 2 \times 3^3 + 3^2) + 1$ ou mult. de $2 + 1$;

simultaneamente acharemos

$b^4 =$ mult. de $2 + 1$ e, em geral, $b^m =$ mult. de $2 + 1$.

Substituindo na formula geral, obtemos:

$N = a_0 + a_1$ (mult. de $2 + 1$) $+ a_2$ (mult. de $2 + 1$) $+ a_3$ (mult. de $2 + 1$) $+ \ldots + a_r$ (mul. de $2 + 1$) $= (a_2 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_r) +$ $+ a_1$ mult. de $2 + a_2$ mult. de $2 + a_3$ mult. de $2 + \ldots + a_r$ mult. de 2).

Universidade de São Paulo
Faculdade de Filosofia
Departamento de Matemática

Mas a segunda parte da expressão de N é divisivel por 2, logo, para que N o seja, é necessario e bastante que 2 divida a primeira parte.

Assim, *si a somma dos valores absolutos dos algarismos de um numero fôr divisivel por 2, esse numero tambem sel-o-á.*

Divisibilidade por 3 no systema duodecimal:

Temos:

$b = 3 \times 4$, $b^2 = 3^2 \times 4^2$, $b^3 = 3^3 \times 4^3$, e, em geral, $b^m = 3^m \times 4^m$.

Fazendo estas substituições na formula geral, encontramos:

$N = a_0 + (a_1 \times 3 \times 4 + a_2 \times 3^2 \times 4^2 + a_3 \times 3^3 \times 4^3 + \ldots + a_r \times \times 3^r \times 4^r)$.

A segunda parte da expressão de N sendo divisivel por 3, para que N o seja, é necessario e bastante que 3 divida a primeira parte.

Assim, *si o algarismo das unidades de um numero N fôr divisivel por 3, N tambem sel-o-á.*

Vejamos agora o que na questão de divisibilidade é possivel obter de commum a todos os systemas de numeração.

Theoremas geraes de divisibilidade:

1.º Todo numero D que divide a potencia m da base de um systema de numeração, si dividir o numero formado pelos m ultimos algarismos de um numero N escripto neste systema, tambem dividirá N.

Temos:

$$N = a_0 + a_1\, b + a_2\, b^2 + a_3\, b^3 + \ldots + a_r\, b^r.$$

Mas b^m = mult. de D, donde b^{m+1} = mult. de D, b^{m+2} = mult. de D, ... b^r = mult. de D, portanto, $N = (a_0 + a_1\, b + a_2\, b^2 + a_3\, b^3 + + \ldots + a_{m-1}\, b^{m-1}) + a_m$ mult. de $D + a_{m+1}$ mult. de $D + \ldots + + a_r$ mult. de D.

E como a segunda parte da expressão de N é divisivel por D, si a primeira o fôr, N tambem sel-o-á.

2.° Todo numero D que divide a base de um systema de numeração diminuida de uma unidade, si dividir a somma dos algarismos de um numero N escripto nesse systema, tambem dividirá N.

Temos, pois,

$$b = b - 1 + 1,$$

ou, fazendo provisoriamente

$b - 1 = \beta$, $b = \beta + 1$; portanto, $b^2 = \beta^2 + 2\beta + 1 = \beta(\beta + 2) + 1$ ou mult. de $\beta + 1$ ou mult. de $(b - 1) + 1$, $b^3 = \beta^3 + 3\beta^2 + 3\beta + 1 = \beta(\beta^2 + 3\beta + 3) + 1$ ou mult. de $\beta + 1$ ou mult. de $(b - 1) + 1$.

Semelhantemente acharemos

b^4 = mult. de $(b - 1) + 1$ e, em geral, b^m = mult. de $(b - 1) + 1$.

Assim, procedendo ás convenientes substituições em

$N = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 + \ldots + a_r b^r$, obtemos $N = a_0 + a_1[(b - 1) + 1] + a_2[\text{mult. de } (b - 1) + 1] + a_3[\text{mult. de } (b - 1) + 1] + \ldots + a_r[\text{mult. de } (b - 1) + 1] = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_r) + [a_1(b - 1) + a_2 \text{ mult. de } (b - 1) + a_3 \text{ mult. de } (b - 1) + \ldots + a_r \text{ mult. de } (b - 1)]$.

A segunda parte da expressão de N sendo um multiplo de $b - 1$, todo numero D, que dividir $b - 1$, dividirá esta parte, portanto, si dividir o primeiro, dividirá tambem N.

3.° Todo numero D que divide a base de um systema de numeração augmentada de uma unidade, si dividir a differença entre a somma dos valores absolutos dos algarismos de ordem impar e a somma dos valores absolutos dos algarismos de ordem par de um numero N escripto nesse systema, tambem dividirá N.

Temos

$b = b + 1 - 1$ ou, fazendo provisoriamente $b + 1 = \beta$, $b = \beta - 1$; portanto, $b^2 = \beta^2 - 2\beta + 1 = \beta(\beta - 2) + 1$ ou mult. de $\beta + 1$ ou mult. de $(b + 1) + 1$, $b^3 = \beta^3 - 3\beta^2 + 3\beta - 1 = \beta(\beta^2 - 3\beta + 3) - 1$ ou mult. de $\beta - 1$ ou mult. de $(b + 1) - 1$, $b^4 = \beta^4 - 4\beta^3 + 6\beta^2 - 4\beta + 1 = \beta(\beta^3 - 4\beta^2 + 6\beta - 4) + 1 =$ mult. de $\beta + 1$.

Do mesmo modo se provaria que $b^5 =$ mult. de $\beta - 1$, $b^6 =$ mult. de $\beta + 1$, etc.; isto é, que toda potencia de b de grau par é mult. de $\beta + 1$ e que toda potencia de b de grau impar é mult. de $\beta - 1$.

Suppondo $r = 2m$, temos :

$N = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 + \ldots a_{r-1} b^{r-1} + a_r b^r = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 + \ldots a_{2m-1} b^{2m-1} + a_{2m} b^{2m} = a_0 + a_1(\beta - 1) + a_2$ (mult. de $\beta + 1$) $+ a_3$ (mult. de $\beta - 1$) $+ a_4$ (mult. de $\beta + 1$) $+ \ldots + a_{2m-1}$ (mult. de $\beta - 1$) $+ a_{2m}$ (mult. de $\beta + 1$) $= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \ldots - a_{2m-1} + a_{2m} +$ mult. de $\beta(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_{2m}) =$ mult. de $\beta + [(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots a_{2m}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots a_{2m-1})]$.

Logo, todo o numero é um multiplo de β mais a differença entre as sommas dos valores absolutos dos algarismos de ordem impar e a dos de ordem par.

SEGUNDA PARTE

Instituição fundamental da Algebra

CAPITULO III

APRECIAÇÃO DAS RELAÇÕES ELEMENTARES QUE PERMITTEM SUBORDINAR O ABSTRACTO AO CONCRETO (FORMAÇÕES SIMPLES); ESTUDO ESPECIAL DESTAS RELAÇÕES E DE SUAS COMBINAÇÕES ENTRE SI (FORMAÇÕES COMPOSTAS)

§ 7

Apreciação geral das leis elementares que permittem subordinar o abstracto ao concreto (formações simples)

43 — Mostrando o objecto e o verdadeiro alcance da Algebra, dissemos no capitulo anteprecedente que teve ella uma dupla origem, abstracta e concreta, respectivamente representada pela arithmetica e pela geometria.

E' nesta dupla fonte que se encontra o germen das relações elementares que lhe devem permittir a subordinação do abstracto ao concreto, isto é, os recursos indispensaveis para que as nossas concepções traduzam algebricamente a realidade exterior.

Antes de aprecial-os devemos, porém, corrigir a irracional denominação que se lhes deu a partir do fim do seculo XVII, e sobretudo no principio do XVIII.

Refutando o materialismo abstracto, já vimos que a anarchia scientifica conduziu a desviar a palavra *analyse*

Maria A. C.

de seu sentido proprio para applical-a ao conjuncto do calculo, especialmente algebrico.

Essa usurpação foi contemporanea de uma outra que precisamos caracterisar.

No paragrapho precedente dissemos que o pensamento mathematico levava a distinguir as grandezas algebricas em *variaveis* e *constantes*.

O desenvolvimento do mesmo pensamento conduz a dispôr as variaveis em duas categorias.

Porque, nas relações algebricas quaesquer, umas, variaveis, são consideradas como tendo a iniciativa da variação, ao passo que as outras não mudam senão arrastadas por aquellas.

A's primeiras deu-se o nome de *variaveis independentes* e ás segundas, isto é, ás *variaveis dependentes*, deu-se impropriamente, naquella época, o qualificativo de *funcção* das *variaveis independentes*.

Note-se que essa distincção é puramente subjectiva no ponto de vista algebrico, si bem que concretamente a distincção seja indicada muitas vezes.

Assim, por exemplo, quando se trata de phenomenos dynamicos, isto é, quando se considera o *tempo* entre variaveis, é claro que essa variavel é espontaneamente indicada como independente.

Mas, subjectivamente, o tempo póde tornar-se a variavel dependente.

Em geral, a distincção resolve-se na differença entre as variaveis que são conhecidas e as incognitas.

Ora, em mathematica a palavra *funcção* não póde, evidentemente, convir á variavel dependente. Usado, a principio, em sociologia para designar os actos convergentes de cada homem, ou de cada classe social para a existencia commum, o vocabulo passou á biologia com a mesma accepção relativamente aos actos da natureza viva.

Mas não podia se applicar aqui, porque aquella

noção mathematica nada indica que se assemelhe a tal sentido.

De sorte que, a admittir-se a usurpação dos geometras, ficaria a linguagem scientifica tendo um mesmo termo com sentidos distinctos.

Em nossos dias a palavra *funcção* foi tambem desnaturada em Chimica.

Respeitando o passado, Augusto Comte submetteu-se, a principio, ao uso consagrado; mais tarde, porém, corrigiu o abuso mathematico, substituindo a palavra *funcção* pelo vocabulo *formação*, que tem a mesma origem de *formula*, tambem adoptada pela linguagem mathematica, nome esse que ficou mantido.

A primeira (formação) applica-se a qualquer modo de dependencia, *implicita* ou *explicita*; a segunda (*formula*) refere-se especialmente á dependencia *explicita*.

Semelhante reforma não alterou a notação algebrica, por isso que a letra inicial do novo termo sendo a mesma do antigo, continuou-se a empregal-a para indicar a dependencia em questão.

O espirito philosophico de Lagrange teria sem duvida repudiado tambem a palavra *funcção* si não fosse uma exagerada deferencia para com Euler, que a tinha vulgarisado nos seus trabalhos, os quaes, embora numerosos e uteis, se resentem de vistas geraes.

44 — Afim de termos uma ideia precisa dos meios de que dispõe a algebra, e podermos disciplinar a sua cultura, é necessario, antes de tudo, fazermos a *enumeração* das leis numericas que effectivamente ella possue, em condições de serem elaboradas para interpretar a natureza.

As difficuldades com que lutamos para fazer a passagem do concreto para o abstracto são principalmente devidas ao insignificante numero dessas leis ou formações elementares. E' verdade que o numero de formações abstractas consideradas na algebra é realmente infinito.

Entretanto, é facil verificar que existe entre ellas um pequeno numero de formações simples e irreductiveis de que se compõem todas as outras.

Essas formações simples constituem verdadeiramente as unicas leis elementares de que dispõe a algebra para passar do concreto para o abstracto.

Enumerando e classificando estas formações simples e irreductiveis, teremos, pois, enumerado e classificado as formações compostas.

Para isto representemos por a uma grandeza constante, por x uma variavel independente e por y a variavel correlativa que della depende. Os differentes modos de dependencia abstracta que podemos conceber entre x e y são expressos pelas dez formações elementares seguintes:

Formações elementares	1.º conjugado	$y = a + x$	Formação	somma	Formações algebricas ou naturaes
		$y = a - x$	»	differença	
	2.º »	$y = ax$	»	producto	
		$y = \frac{a}{x}$	»	quociente	
	3.º »	$y = x^a$	»	potencia	
		$y = \sqrt[a]{x}$ ou $x^{\frac{1}{a}}$	»	raiz	
	4.º »	$y = a^x$	»	exponencial	Formações transcendentes ou subsidiarias
		$y = log.\ x$	»	logarithmica	
	5.º «	$y = sen.\ x$	»	circular directa	
		$y = arc.\ sen.\ x$	»	circular inversa	

Apreciando essas dez leis elementares em seu conjunto, vê-se que ellas se succedem aos pares, porque cada formação suppõe a sua inversa, isto é, aquella que teria lugar quando na anterior ou na directa se referisse x a y, em lugar de referir y a x.

Ellas são, assim, divididas em cinco pares ou conjugados, observando-se que os tres primeiros se succedem na mesma ordem que as operações da Arithmetica, onde aliás se acham contidas desde a numeração systematica,

As formações que constituem estes tres pares foram denominadas *algebricas*, para distinguil-as das que compõem os dois ultimos, que foram chamadas *transcendentes*.

Semelhantes qualificativos são evidentemente improprios, por isso que todas essas formações podem ser elaboradas pela Algebra e são, por conseguinte, algebricas. Mas veremos que obedeceram elles á necessidade de distinguir os tres primeiros pares, que são naturalmente fornecidos pela Arithmetica e pela Geometria, do quarto e do quinto, que tiveram, respectivamente, aquelle uma origem puramente abstracta e este uma fonte exclusivamente concreta.

Por este motivo convem manter uma tal distincção, chamando, porém, mais propriamente—naturaes—aos seis primeiros elementos, e subsidiarios—aos quatro ultimos.

Mostremos agora que de facto os tres primeiros pares de elementos algebricos tiveram ao mesmo tempo uma origem arithmetica e geometrica, cuja ligação final deviam operar.

45 — Referidas a essa dupla origem, encontramos a principio na Arithmetica, desde a numeração, as noções directas de *somma*, de *producto* e de *potencia*, e, por conseguinte, as inversas de *differença*, de *quociente* e de *raiz*. E' o que se póde immediatamente constatar apreciando a constituição de um numero qualquer.

Sob esse ponto de vista, taes formações tiveram, portanto, uma origem abstracta. Porque, embora a ideia de numero fosse, a principio, concreta, tornou-se ella gradualmente abstracta até permittir a formação systematica da escala, que serviu de base á instituição das *avaliações* fundamentaes. Dahi até a constituição definitiva das *for-*

mações elementares, houve, sem duvida, um progresso consideravel do espirito humano; porquanto, com o desenvolvimento deste, as noções de *somma*, *differença*, *producto*, *quociente*, *potencia* e *raiz*, que só se applicavam a numeros particulares, se estenderam a symbolos geraes representando numeros indeterminados.

Referidos á Geometria, encontramos tambem ahi a origem dos tres primeiros pares de *formações elementares*. Porque as medidas lineares forneceram a fonte das *formações somma* e *differença*, e as superficiaes originaram as quatro seguintes. Assim é que na avaliação da area de um *rectangulo* se encontra o germen da *formação producto* e, por conseguinte, da sua inversa; porquanto essa avaliação se opera sempre multiplicando o numero que representa o comprimento da *base* por aquelle que exprime a *altura*: de modo que, si a representa *base* constante e x a altura variavel de um rectangulo, sua area y será expressa por $y = ax$.

Si, porém, fôr a a area constante do rectangulo, x um lado variavel e y o outro, este será representado por

$$y = \frac{a}{x}$$

Sabemos, emfim, que a formação potencia, e, por conseguinte, a sua inversa, tiveram sua origem na avaliação da area de um *quadrado* e na do volume de um *cubo*; e, embora só se referissem, a principio, ao 2º e 3º graus, foram depois generalisadas pela Arithmetica para um grau qualquer.

Aliás semelhante origem nos é lembrada pela linguagem vulgar, quando fallamos no *quadrado* e no *cubo* de uma quantidade para exprimir a 2ª e a 3ª potencias da mesma.

Todas as formações algebricas ou naturaes acham-se, pois, contidas no primitivo surto da Arithmetica e da Geometria.

Somente quando a Algebra se separou da segunda é que ellas perderam o seu caracter concreto, para conservarem apenas a natureza abstracta inherente á primeira.

46 — IMPORTANTES CONSEQUENCIAS DA DUPLA ORIGEM DAS FORMAÇÕES ALGEBRICAS: ABSTRACÇÃO E CONTINUIDADE — Vê-se, portanto, que as seis formações algebricas elementares, quando consideradas, quanto á sua origem, são *abstractas* ou *concretas*, conforme emanam da Arithmetica ou da Geometria.

Estas duas condições a que satisfazem espontaneamente são de uma importancia capital porque offerecem ás especulações algebricas duas preciosas vantagens, apparentemente incompativeis: a abstracção devida á origem arithmetica, e a continuidade fornecida pela origem geometrica.

Si taes formações proviessem somente da Arithmetica, seriam necessariamente descontinuas, como o são os numeros inteiros, e só poderiam se tornar continuas mediante os artificios emanados da Geometria.

Porque foi realmente a Geometria que inspirou a ideia geral de *fracção* (nas medidas lineares), pela qual se constituiu a continuidade dos numeros, a titulo de limite normal do decrescimento infinito dos seus intervallos.

Assim devia ser, porque a continuidade é propria á existencia concreta: sem continuidade não se póde conceber as leis naturaes, porque ellas são de facto formações concretas continuas, e a continuidade das variações concretas exige a continuidade das relações abstractas que as representam.

Ella manifesta-se, a principio, nos phenomenos de extensão, e depois nos de movimento, onde tudo se refere ao tempo, que não é susceptivel de intermittencia.

E como as leis dos phenomenos de extensão e de movimento quasi que são as unicas que até hoje se tem conseguido exprimir algebricamente, concluimos que todas as *formações elementares* que não forem continuas

não se prestam ao seu verdadeiro papel, isto é, á subordinação do abstracto ao concreto.

De outro lado, si as formações algebricas proviessem somente da Geometria, ellas não teriam perdido seu caracter concreto.

E como as formações concretas não podem ser concebidas independentemente dos phenomenos em que se manifestam, estes phenomenos não poderiam ser traduzidos abstractamente e, portanto, a Algebra não existiria.

Devemos, pois, concluir que todas as formações algebricas que não forem *abstractas* e *continuas* devem ser repellidas, como viciosas e improprias ao dominio mathematico.

E como todas as outras formações são constituidas pela combinação daquellas formações simples, podemos affirmar de um modo cathegorico que todas as formações algebricas devem ser *abstractas* e *continuas*.

Estas duas propriedades, communs a todas as formações verdadeiramente algebricas, isto é, a *abstracção*, proveniente da Arithmetica, e a *continuidade*, oriunda da Geometria, permittem á Algebra a realisação do seu verdadeiro papel encyclopedico, ligando aquellas duas sciencias, isto é, preparando a transição do estudo de uma para o da outra.

Tendo apreciado de um modo geral as formações algebricas naturaes, devemos agora fazer o mesmo em relação ás subsidiarias, impropriamente chamadas *transcendentes*, isto é, ás do 4º e 5º pares.

47 — As formações do 4º par são de origem moderna.

A sua introducção foi devida a uma inversão do ponto de vista peculiar ao par precedente.

Com effeito, a *formação exponencial* foi obtida modernamente generalisando a *formação potencia*, isto é, fazendo *constante* o que nella é *variavel*, e variavel o que nella é constante, isto é, o seu *expoente*.

Este expoente era constante na formação primitiva e constituia a verdadeira base, isto é, o modulo caracteristico da formação, relativo á variavel independente, que impropriamente se chamou *base* de cada potencia. Foi pela inversão desta harmonia que se obteve a formação exponencial, onde, portanto, se fixou a grandeza que primitivamente variava e se fez variar a que era fixa.

A condição de continuidade da nova formação ficou assim garantida :

Porque essa generalisação permittiu considerar os *expoentes* como podendo ser numeros quaesquer, inteiros ou fraccionarios ; de sorte que as *raizes* passaram a ser classificadas entre as *potencias*, como os *quocientes* já o tinham sido entre os *productos*.

A *formação logarithmica* não é mais do que uma inversão da *exponencial*, pois que o *logarithmo* de um numero foi algebricamente considerado como o *expoente a que se deve elevar a base para obter esse numero*. Veremos que esta concepção algebrica dos logarithmos resultou a principio da Arithmetica, mediante a comparação das duas *progressões*, por *differença* (serie natural dos numeros) e por *quociente* (serie das potencias da base numeral), implicitamente contidas na propria numeração systematica.

Assim, pois, a formação exponencial e a sua inversa tiveram uma origem exclusivamente abstracta ; foram construidas artificialmente, e por isso o 4º par recebeu o nome de *artificial*.

As formações do 5º par tiveram, ao contrario, uma origem exclusivamente concreta e natural, pois que emanaram directamente da geometria, conforme o indicam as suas denominações.

Com effeito, a primeira, chamada, com acerto, *circular directa*, traduz em geometria a relação existente entre um *arco* x e o seu *seno* y.

Chama-se seno de um arco á metade da *corda* que subentende o arco duplo, ou, o que é o mesmo, á perpen-

dicular tirada da extremidade de um arco para o diametro que passa pela outra extremidade; sendo facil mostrar que as variações do *seno* dependem das variações do *arco*.

Quanto á segunda, conhecida pelo nome de *circular inversa*, é realmente uma mera inversão da precedente; porque chamado y o arco e x o seno, ella nos mostra simplesmente que *y é o arco cujo seno é x*; sendo facil mostrar que as variações daquelle dependem das variações deste.

Assim concebidas, essas formações elementares $y = sen.\ x$ e $y = arc.\ sen.\ x$ são *formações simples* e têm um caracter concreto. Mas o seu emprego torna-se legitimo, porque foram transformadas em formações abstractas, compostas das precedentes, mediante propriedades que lhes são proprias.

Graças aos trabalhos de Euler, e principalmente á sua concepção algebrica sobre os logarithmos, veremos que foram ellas representadas pelas seguintes formações abstractas:

$$sen.\ x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \text{ e } arc.\ sen.\ x = \sqrt{1-x^2} \times$$

$$\times\left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^5 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}x^7 + \ldots\right)$$

que são, como se vê, *formações compostas* com as anteriores e avaliaveis como ellas.

Este ultimo par torna-se, pois, bastardo e suspeito, quando comparado com os precedentes; por isso, deu-se-lhe o nome de *par excepcional*.

Elle e o anterior differindo dos outros pela sua origem, tiveram por isso a denominação de subsidiarios, para distinguil-os dos outros, espontaneamente incorporados ao dominio algebrico, e que por isso foram chamados *naturaes*.

Semelhantes denominações têm a vantagem de indicar o caracter normal de uns e a natureza artificial e excepcional dos outros, salientando ao mesmo tempo o contraste que lhes é proprio quanto á sua origem.

Além desta importancia historica, uma tal distincção tem a vantagem dogmatica de mostrar o grau de difficuldade que encontra a algebra quando passa da elaboração dos primeiros pares á consideração dos ultimos.

48 — As formações elementares que temos considerado constituem os unicos meios de que dispõe o *calculo algebrico* para permittir o concurso dos signaes no estudo do Mundo.

Embora reconheçamos que ao seu minguado numero se deve em grande parte a difficuldade de effectuar a passagem do concreto para o abstracto, devemos renunciar á idéa de augmental-os.

Isto seria impossivel de realizar-se em virtude da condição de continuidade que é imposta a toda a formação abstracta verdadeiramente mathematica.

Demais, a experiencia do passado demonstra inductivamente essa impossibilidade; porque as formações que possuimos, salvo as do 4º par, que datam de pouco mais de um seculo, foram instituidas desde a evolução preliminar da arithmetica e da geometria.

O par introduzido modernamente pouco ou nenhum accrescimo veio trazer á mathematica, que já estava definitivamente constituida, graças aos trabalhos de Descartes, Newton e Leibnitz.

Dahi para cá não se creou nenhum elemento novo e não ha possibilidade de fazel-o.

A mathematica já attingiu ao grau de desenvolvimento a que podia chegar, mesmo porque o progresso é um aperfeiçoamento continuo, mas limitado.

Pensando-se em crear uma nova formação elementar, diz Comte, concebe-se sua difficuldade quasi como insoluvel, por isso que apresenta duas condições quasi contradi-

ctorias: a de uma formação avaliavel numericamente, e a de não poder esta ser composta de nenhuma daquellas que se póde avaliar.

Tambem não possuimos ideia alguma dos meios que poderiam dirigir esta invenção.

As unicas formações abstractas novas que se têm creado, isto é, a formação exponencial e sua inversa, o foram por um artificio que evidentemente se acha esgotado e não póde fornecer mais nenhuma outra. Este artificio surgiu depois que Descartes inventou os *expoentes* inteiros e positivos ; depois que Wallis (7ª) generalisou a concepção de Descartes, instituindo os expoentes negativos e Stevin os fraccionarios, e finalmente depois que Neper, aproveitando o desenvolvimento dado por Newton ás ideias de Wallis, instituiu a theoria dos *logarithmos*.

(7ª) O geometra inglez John Wallis, nasceu em 1616 e falleceu em 1703. Suas obras mathematicas foram publicadas sob o titulo de *J. Wallisii opera mathematica* (697-1699. 3º v. in fol.).

As principaes são: O Tratado das secções conicas (pelo methodo de Descartes) ; a Algebra, precedida da historia desta sciencia ; a Arithmetica dos infinitos (a mais importante), publicada em 1655, vinte annos, por consequencia, depois da apparição dos *indivisiveis de Cavalieri* ; o Tratado de movimento, etc.

No primeiro daquelles trabalhos, occupando-se da parabola como curva do 2º grau, empregou com efficacia os expoentes negativos e fraccionarios, conforme faremos hoje. Foi o primeiro que considerou o problema da *interpolação*, procurando determinar a area do circulo pela interpolação de um termo entre *1* e $\frac{2}{3}$ na serie,

$$1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}, \ldots$$

Foi elle quem primeiro resolveu o problema proposto por Pascal sobre a area do segmento de uma cycloïde ; e, ao mesmo tempo que Wren e Huyghens, deu a solução do problema da *theoria dos choques*, fundada sobre o principio da *conservação da quantidade de movimento*, que, desde então, tomou lugar na Mecanica. (Estes dois ultimos consideraram os corpos elasticos e Wallis os corpos molles).

Considerando o logarithmo de um numero sob o ponto de vista algebrico, isto é, como o *expoente* a que se deve elevar a *base* para obter esse numero, puderam todos os numeros desde então ser olhados como potencias diversas de uma base constante.

Desde logo tornou-se indispensavel considerar a variabilidade do expoente em toda relação de base fixa.

Essa circumstancia permittiu estabelecer a continuidade da *formação potencia* e fez surgir della a *formação exponencial*, que teve, assim, uma origem puramente abstracta.

A descoberta de formações semelhantes ás circulares, com o fim de ampliar o seu numero, não poderia ser tambem conseguida, como o attesta o mallogro da tentativa que se fez para o caso da ellipse.

Veremos, com effeito, que a difficuldade de descobrir, para outras curvas, relações algebricas semelhantes ás do circulo se reduz essencialmente á obrigação de achar a lei segundo a qual a corda de um arco qualquer se liga ás de suas duas partes.

Ora, esta descoberta só é directamente possivel para o circulo, e só póde indirectamente se extender ás curvas verdadeiramente rectificaveis, mediante as formações normalmente completadas por aquellas que o proprio circulo forneceu.

De sorte que todas as tentativas que se fizessem a tal respeito não levariam a imaginação humana senão a gravitar em torno das formações circulares, já descobertas.

49 — Combinadas entre si, as dez formações elementares que temos considerado bastaram para que a Algebra transformasse todas as leis geometricas e mecanicas em verdadeiras equações, e constituisse estas para o caso das leis astronomicas.

Para isto foi, porém, indispensavel que se constituisse uma outra especie de *relações* algebricas, as quaes, em

vez de serem directamente estabelecidas entre as grandezas consideradas, são, ao contrario, instituidas por via indirecta, e mediante o emprego de grandezas auxiliares ligadas áquellas.

De sorte que a Algebra, que, a principio era simplesmente o *calculo das formações directas*, teve necessidade de ser completada pelo *calculo das formações indirectas*, em virtude do insignificante numero de suas leis elementares.

Foi por este modo, isto é, pelo concurso do duplo *calculo das formações*, que a Mathematica conseguiu traduzir systematicamente os phenomenos geometricos e mecanicos, terrestres ou celestes, chegando mesmo a exprimir os phenomenos physicos mais elementares, taes como os de peso, luz, etc.

Emfim, se a limitação de nossa intelligencia não permittiu que os recursos da Algebra fossem ampliados, nada temos por isso a lamentar.

O pequeno numero de leis elementares de que dispomos dirigiu o surto da Algebra exigido pela Geometria e a Mecanica, permittindo a systematisação de ambas, bem como a construcção da Astronomia. Graças a ellas, o espirito humano poude se desprender das meditações mathematicas e elevar-se á instituição da Sociologia e da Moral.

Portanto, devemos reconhecer que o conhecimento destas leis algebricas se acha sufficientemente attingido sob qualquer aspecto, visto como satisfaz plenamente ás exigencias humanas.

E', pois, inutil e viciosa qualquer tentativa no sentido de augmental-as.

Aqui, como em toda parte, devemos systematisar o emprego de nossas forças quaesquer, evitando todo o disperdicio dellas, de modo a dar-lhes sempre a sua melhor utilisação.

§ 8º

Estudo especial das formações simples

50 — Baseando-nos na apreciação geral que foi feita no paragrapho precedente, devemos agora caracterisar cada um dos 10 elementos algebricos.

Para isso cumpre examinar successivamente em todos elles o modo pelo qual a variavel independente forma a variavel dependente, a partir da base constante.

Esta base entra necessariamente em todas as formações *algebricas* ou *naturaes* e só deixa de figurar de modo explicito nas duas ultimas *transcendentes* ou *subsidiarias*.

Neste exame devemos, pois, manter systematicamente a divisão espontanea já estabelecida entre os tres primeiros pares e os dois ultimos, distinguindo nestes o par artificial do excepcional.

Tendo feito taes distincções, estudemos successivamente todos estes pares, comparando-os entre si e caracterisando em cada um o elemento directo e o inverso.

51 — APRECIAÇÃO ESPECIAL DAS LEIS DO PRIMEIRO PAR: FORMAÇÕES SOMMA E DIFFERENÇA — Este primeiro par distingue-se principalmente dos outros porque a base constante não influe sobre a sua variação: os accrescimos e decrescimos da formação são sempre iguaes aos que recebe a variavel, a partir da base constante.

Esta circumstancia permitte tambem distinguir o elemento *directo* do *inverso*; porque no 1º, como no 2º, o valor da formação y é igual ao da base constante a, quando a variavel x torna-se nulla.

Dahi em diante, porém, á medida que a variavel fôr crescendo, a primeira formação cresce desse valor, ao passo que a segunda decresce.

Esse contraste tornar-se-á mais sensivel quando os valores attribuidos á variavel forem maiores do que a base.

Fazendo-se successivamente x igual a a, $2a$, $3a$.... virá para a primeira formação:

$$y = a + a \quad y = a + 2a \quad y = a + 3a....$$

ou

$$y = 2a \quad y = 3a \quad y = 4a....$$

e para a segunda:

$$y = a - a \quad y = a - 2a \quad y = a - 3a....$$

ou

$$y = o \; y = -a \quad y = -2a.$$

Este resultado nos mostra que, quando os valores da variavel forem maiores que a base, a primeira formação não apresenta nenhuma modificação especial; mas que a segunda torna-se negativa, crescendo sempre mediante os valores positivos dados á variavel.

O estudo das variações desta segunda formação fornece, pois, a origem abstracta das *quantidades negativas*, tão necessarias á algebra quanto as positivas.

Este facto, que no dominio abstracto accentua bem a distincção entre os dois elementos que consideramos, serve ao mesmo tempo para mostrar mais uma vez a subordinação deste dominio ao concreto, unico que póde justificar e interpretar cabalmente essa opposição de signal.

Sob o aspecto concreto, semelhante contraste é indicado naturalmente em Geometria, consistindo ahi na opposição de sentido quando se contam comprimentos a partir de uma origem constante, isto é, para a sua direita e para a esquerda, ou acima e abaixo; em mecanica *tempo*, quando este é contado tambem a partir de uma origem, conforme se acha antes ou depois della (8 a).

(8 a) Eis as considerações mais importantes expendidas a tal respeito pelo illustre mestre Benjamin Constant no seu opusculo sobre as «Quantidades Negativas».

«A distincção, diz elle, das quantidades em positivas e negativas não é só uma circumstancia accidental que se póde dar na

Vê-se assim que a mudança de signal, abstractamente resultante da subtracção, corresponde de facto ao resultado de uma subtracção concreta entre *comprimentos* ou *tempos*, na qual a applicação da variavel independente sôbre a base constante excede á origem fixada.

Uma tal correspondencia acha-se implicitamente comprehendida, desde o inicio do calculo, na propria numeração, que reduz o contraste entre *ajuntar* e *subtrahir* ao do sentido segundo o qual se percorre a escala numerica.

Póde-se, portanto, considerar a *subtracção* algebrica como uma addição em que se ajunta á base uma grandeza negativa, em lugar de uma grandeza positiva.

---

determinação dos valores numericos das expressões algebricas, por onde se é levado a considerar quantidades isoladas affectas dos signaes + e —; esta distincção corresponde maravilhosamente na passagem do concreto para o abstracto á opposição de sentido de que muitas grandezas são susceptiveis, tendo assim uma significação clara ao espirito, e apresentando-se como um caracter importante da linguagem algebrica, que póde concorrer para tornal-a a mais perfeita linguagem do raciocinio.

A sciencia mathematica apresentaria, com effeito, mui grave lacuna, limitando-se a considerar as grandezas unicamente quanto aos seus valores, sem attender ao seu modo de existencia.

Assim, por exemplo: si sobre uma recta estiver um ponto 30^m á direita de outro e um segundo 30^m á esquerda; si um acontecimento tem lugar 10 annos depois da éra christã e outro 10 annos antes; si um individuo possuir mil francos e outro dever a mesma quantia; si um relogio adiantar sete minutos e outro atrazar-se sete minutos; si a velocidade de um movel augmentar de oito metros por segundo e a de outro diminuir oito metros em igual tempo, etc., os numeros 30^m, 10 annos, mil francos, sete minutos e oito metros não bastarão para determinar as grandezas correspondentes.

Cada um delles representa duas grandezas homogeneas e iguaes, mas cujo modo de existencia tem lugar em sentido directamente opposto, que não vem designado nos numeros que se representam.

Na passagem do concreto para o abstracto é pois indispensavel que se attenda a esse duplo aspecto, que muitas grandezas podem apresentar.

O simples valor numerico não basta á sua determinação, é necessario que se lhe ajunte alguma cousa que corresponda na lin-

Approximadas assim uma da outra, as formações *somma* e *differença* ficam, entretanto, distinctas, por isso que o accrescimo da variavel independente faz augmentar a primeira e diminuir a segunda.

Mas, qualquer que seja o modo, abstracto ou concreto, a que se deva a mudança correlativa de signal ou de sentido, os dois casos se acham igualmente separados pela annullação da grandeza produzida.

Vê-se, portanto, que as *quantidades negativas* tornam-se tão proprias á Algebra como as *quantidades positivas*, de conformidade com uma tendencia espontanea a contar tanto por *falta* como por *excesso*, quando se trata de diminuir os numeros.

Assim, pois, deve-se sempre submetter ás mesmas regras algebricas todas as quantidades, negativas ou positivas, olhando o signal como se elle indicasse uma combinação que fica subentendida.

Uma tal uniformidade é indispensavel porque, sem ella, não poderia a Algebra sempre manter a indeterminação necessaria das grandezas consideradas, constantes ou variaveis.

No caso contrario, seria preciso a todo instante restringir, em graus diversos e commummente inaprecia-

---

guagem ordinaria ás ideias que exprimimos com as palavras: á direita, á esquerda, antes, depois, acima, abaixo, etc.

A linguagem algebrica seria evidentemente defeituosa sinão possuisse symbolos ou caracteres quaesquer equivalentes a estas palavras.

Estes caracteres, attendendo á natureza dessa linguagem, devem ser ao mesmo tempo os mais simples e os mais geraes e, portanto, independentes da natureza concreta das grandezas consideradas.

E' pela opposição dos signaes + e —, que abstractamente resulta da subtracção, que a algebra satisfaz completamente estas condições.

Quando duas grandezas da mesma espécie têm situações directamente oppostas, exprime-se esta circumstancia, affectando uma dellas do signal + e outra do signal —; e affectam-se ambas do signal + ou ambas do signal — quando têm a mesma situação.»

veis, as hypotheses feitas sobre os valores arbitrarios, desde que se recusasse a admittir os resultados subtractivos do mesmo modo que os additivos.

Aliás, a uniformidade do tratamento das grandezas oppostas resulta em Algebra da obrigação fundamental de fazer sempre a abstracção dos valores para sómente considerar as relações.

Relativamente á geometria e á mecanica, ella é devida á continuidade necessaria das variações quaesquer.

A correspondencia geral dos dois modos, abstracto ou concreto, segundo o qual se produz o contraste do signal ou do sentido, não póde offerecer nenhum embaraço nos casos elementares.

Sómente veremos surgir uma grave difficuldade quando procurarmos extender essa correspondencia a combinações quaesquer das grandezas consideradas.

Para resolvel-a foi preciso que o genio philosophico de Descartes descobrisse uma lei inductiva, directamente indispensavel a taes casos.

De um modo geral, consiste ella em que = *a correspondencia elementar entre o signal e o sentido persiste nas combinações quaesquer que podem resultar das especulações abstractas e concretas sobre a grandeza indeterminada*.

Dest'arte os differentes modos de uma relação geometrica ou mecanica, representada por uma mesma formula, tornam-se susceptiveis de uma consideração uniforme, que póde tambem se extender ás disposições indecisas que se teria sem isso de afastar.

Pela mesma razão existe sempre uma exacta coincidencia da equação directamente instituida entre grandezas quaesquer que tenham mudado de sentido, e aquella que se deduz da lei propria ao sentido primitivo, mudando ahi o signal das quantidades correspondentes.

Veremos na Algebra superior que o numero dos casos que podem assim ser reunidos numa mesma for-

mula é sempre igual á potencia de 2, indicada pelo numero de elementos variaveis ou constantes, desconhecidos ou conhecidos, susceptiveis de uma tal variação de signal.

Então poderiamos apreciar quanto a lei cartesiana facilita a interpretação das hypotheses indecisas.

Graças a ella, basta simplesmente formar a equação geometrica ou mecanica para um só dos casos proprios a cada phenomeno considerado.

Porquanto se tem de antemão certeza de que todos os outros se acharão comprehendidos nelle, desde que se tenha em vista as mudanças de signal das quantidades correspondentes.

Vejamos agora qual a reacção exercida sobre as dos outros pares de formações naturaes pela consideração das quantidades negativas, introduzidas pelo primeiro.

52 — LEIS DO SEGUNDO PAR: FORMAÇÕES. PRODUCTO E QUOCIENTE — Relativamente ao segundo par de formações, comecemos por observar que, á semelhança das outras, devem ellas distinguir-se algebricamente pela variavel independente, que se acha na primeira multiplicada e na segunda dividida pela *base*.

Essa circumstancia dá logar a que as duas formações não se confundam arithmeticamente ; pois que os accrescimos da variavel, a partir da base constante, produzem num caso numeros inteiros e no outro fracções propriamente ditas.

Algebricamente consideradas, ainda se distinguem das duas precedentes, porque, ao contrario destas, os accrescimos da formação não podem ser iguaes aos da variavel.

A consideração das *quantidades negativas*, oriunda do primeiro par, exerce sobre o segundo uma influencia que se manifesta no signal do *producto* e do *quociente*.

Veremos que estas combinações exigem que se dê ao producto e ao quociente o signal positivo ou negativo,

Universidade de S. Paulo
Faculdade de Filosofia
Departamento de Matemática

conforme á variavel e a base têm o mesmo signal ou têm signaes contrarios.

Esta reacção das quantidades negativas sobre o segundo par permitte, além disto, fazer coincidir os seus elementos, isto é, considerar a formação producto como um quociente, e a formação quociente como um producto.

Basta para isso extender aos *expoentes* a modificação relativa aos signaes, que foi feita sobre os coefficientes na *formação differença*.

Com effeito, sendo

$$y = \frac{a}{x}$$

o mesmo que

$$y = a \times \frac{1}{x},$$

podemos considerar esta formação como um *producto* e pol-a sob a fórma

$$y = ax^{-1}.$$

Porque multiplicando ambos os termos da relação

$$\frac{1}{x} \text{ por } x,$$

ella não se altera e vemos que é

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} = x^{1-2} = x^{-1},$$

visto como a relação por quociente entre duas potencias de um mesmo numero é ainda uma potencia deste, indicada pela relação por differença dos seus expoentes.

De sorte que a formação quociente se transforma numa formação producto, considerando neste como sendo negativo o expoente da variavel.

Assim assimilada á *formação producto*, a *formação quociente* não deixa, entretanto, de ser distincta, como acontece com as differenças algebricas transformadas em

sommas pelo decrescimento da variavel dependente, mediante o accrescimo da variavel independente. Porque, semelhantemente, os accrescimos da formação quociente correspondem aos decrescimos da sua variavel e viceversa, o que não acontece na formação producto.

53 — Basta generalisar, ainda mais, a noção de potencia, concebendo-a como susceptivel de expoentes fraccionarios, para termos uma justa idéa do *terceiro par de formações algebricas.*

Sem uma tal extensão, a noção de potencia não poderia adquirir a inteira generalidade que exige seu destino abstracto e concreto. Ella apenas surgiu em geometria e generalisou-se em arithmetica para os expoentes inteiros e positivos, mas, dando a estes ora a fórma de uma differença, ora a de uma fracção, a Algebra extendeu-a successivamente ás potencias negativas e fraccionarias.

Apreciada directamente sob cada um destes aspectos, a *potencia* se torna ora um *quociente*,

$$\left(y = x^{-a} = \frac{1}{x^a}\right),$$

ora uma raiz

$$\left(y = x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}\right).$$

Sob este ultimo ponto de vista, as duas formações do terceiro par coincidem sem se confundirem.

O contraste entre as duas combinações que ellas representam é expresso na primeira pela multiplicação do expoente da variavel pelo grau da potencia

$$\left(y = (x^1)^a = x^{1 \times a}\right),$$

e na segunda pela divisão do mesmo expoente pelo indice da raiz

$$\left(y = \sqrt[a]{x^1} = x^{\frac{1}{a}}\right)$$

De um modo geral, para elevar a^m á potencia n temos que multiplicar m por n, e para extrahir a raiz n de a^m, temos que dividir m por n.

Além dessa analogia, guardam entre si uma outra que resulta da influencia da variavel: os accrescimos ou decrescimos desta correspondem tambem a accrescimos ou decrescimos das formações, o que não tem lugar em nenhuma das anteriores.

Todavia estes dois elementos se distinguem sempre entre si; porque suppondo a numero inteiro, os valores da formação directa são sempre maiores ou menores que os da variavel, conforme esta é maior ou menor que a unidade, ao passo que na inversa se dá o contrario.

Além disto, a *directa* só gera numeros *commensuraveis*, inteiros ou fraccionarios, ao passo que a *indirecta* produz quasi sempre numeros *incommensuraveis*.

Este ultimo elemento motiva, assim, o *calculo approximado* e por vezes dá lugar a expressões que não podem ser avaliadas, nem exacta, nem approximadamente.

Taes são aquellas que indicam a *extracção da raiz par de uma quantidade negativa* e que se chamaram impropriamente *imaginarias*: dar-lhes-emos a denominação mais propria de *irracionaes singulares*.

A possibilidade de considerar os expoentes, a principio negativos e depois fraccionarios, preparou inteiramente o advento do quarto par de formações algebricas, de que especialmente nos vamos occupar.

54 — Importa, com effeito, referir o advento do *par artificial* ás diversas assimilações entre os dois elementos de cada um dos *pares naturaes*, pois que seria impossivel instituil-o sem essas generalisações prévias.

Assim amadurecida, a instituição que completou os elementos algebricos não exigiu grandes esforços, quando a sua necessidade se fez sentir bastante.

Desde que os expoentes foram indifferentemente additivos ou subtractivos, inteiros ou fraccionarios, e mesmo

no limite, incommensuraveis, poude-se-lhes attribuir a continuidade que exigia o advento da *formação exponencial*.

Comparadas umas ás outras, as diversas potencias tinham sempre representado a variação do expoente como exercendo sobre o resultado uma influencia inteiramente distincta das relações habituaes.

Bastava que um impulso especial, que só podia ser abstracto, viesse directamente chamar a attenção sobre este novel elemento algebrico.

Tal impulso surgiu da instituição arithmetica dos *logarithmos,* que precedeu dum seculo o advento da formação exponencial, quando a extensão da geometria e da mecanica o tinha assaz solicitado.

Os grandes calculos numericos exigidos pelas necessidades theoricas e praticas, sobretudo da astronomia e da navegação, levaram naturalmente a simplificai-os o mais possivel.

Eis o que determinou a instituição dos logarithmos numa época em que se precisava abreviar todas as operações arithmeticas, construindo uma taboa propria a reduzir as mais complicadas ás mais simples.

Cada par de elementos algebricos ficou, desde então, numericamente reduzido ao precedente.

A fonte imperceptivel da concepção dos logarithmos acha-se, como dissemos, na propria numeração systematica, que faz espontaneamente surgir a comparação das duas principaes progressões, por *differença* e por *quociente*.

A' inspecção de um numero muito grande, sobretudo quando escripto systematicamente, descobre-se, com effeito, a correspondencia natural entre a progressão arithmetica do lugar dos diversos algarismos e a progressão geometrica do valor das unidades respectivas.

Nada impedia de sentir que uma tal correlação não

depende de modo algum das bases proprias ás duas progressões :

1	*10*	10^2	10^3	10^4.	.	.	.
0	*1*	*2*	*3*	*4.*	.	.	.,

e subsiste quando são diminuidas para approximar-lhes os termos consecutivos.

Guiado por esta observação, o inventor dos logarithmos (8b) concebeu a possibilidade já presentida num opusculo especial *(Arenaria)* do maior geometra da antiguidade *(Archimedes)*, de converter as *multiplicações* e *divisões* em *addições* e *subtracções*.

Para isso era preciso que todos os numeros fossem directamente concebidos como sendo os termos de uma progressão geometrica, á qual se faria sempre corresponder uma progressão arithmetica, cujos termos seriam convenientemente avaliados uma vez por todas.

Com esta instituição arithmetica o setimo elemento algebrico teria immediatamente surgido si a cultura mathematica tivesse sido systematisada.

Referidos a seus logarithmos, todos os numeros tornavam-se, com effeito, potencias de uma base commum, successivamente affecta dos expoentes necessarios, ás mais das vezes fraccionarios que inteiros, e não menos subtractivos que additivos.

(8b) John Néper (1550-1617) tornou-se celebre pela invenção dos *logarithmos* divulgada em 1614 na sua obra *Mirifeci logarithmorum canonis descriptis*.

Neste livro elle não communicou o methodo de construcção de seus logarithmos, mas prometteu dal-o. A morte impediu-o de cumprir sua promessa, que foi satisfeita por seu filho Robert Néper publicando as obras posthumas de seu pai. Nestas, além de dar o methodo de construcção das taboas de logarithmos, o autor indica a vantagem do systema de logarithmo de base 10 (os logarithmos neperianos têm por base $e = 2{,}71828...$), que foi empregada por seu amigo Briggs nas taboas que publicou em 1618.

Ora, chamando a esta base e x o expoente variavel da potencia y, é claro que a formação $y = a^x$ se achava constituida. Porquanto, excluindo a hypothese de $a=1$, caso em que todos os valores de y seriam iguaes á unidade, torna-se evidente que ella forneceria todos os numeros imaginarios, desde 0 até $+\infty$, fazendo variar continuamente x desde 0 até $+\infty$ ou $-\infty$ e suppondo $a \gtrless 1$.

Deve-se, pois, olhar a instituição dos logarithmos como a fonte arithmetica da inteira generalisação algebricamente realisada para as potencias, segundo os modos acima indicados.

Deste concurso devia espontaneamente resultar a formação exponencial, quando o desenvolvimento do dominio mathematico tivesse exigido assaz a introducção de um novo par algebrico.

Só ha que admirar aqui a lentidão de um tal apparecimento, muito explicavel pela ausencia de vistas geraes e de direcção philosophica:

Graças a esse tardio complemento, a instituição fundamental do calculo das relações acha-se tão desenvolvida quanto é possivel (8c).

55 — Não admitte ella senão um supplemento excepcional, representado pelo quinto par de formações algebricas, que devemos agora especialmente apreciar.

Historicamente considerado, elle precedeu o par artificial a que dogmaticamente deve succeder.

Nascidas das applicações da algebra ao principal problema da geometria preliminar, as *formações circulares* offerecem ao espirito mathematico recursos que lhes são proprios e que importa caracterisar aqui.

Ellas ficaram puramente concretas até a evolução preparativa attingir sua phase final e, entretanto, pres-

---

(8c). A. Comte. — «Synthèse subjective» — Chapitre deuxième, pag. 210.

taram, assim, por muito tempo, preciosos serviços, donde resultou sua incorporação espontanea ao dominio da algebra.

Uma tal anomalia provém de sua aptidão excepcional em comportar avaliações sufficientes, e mesmo importantes transformações, sem terem recebido a investidura abstracta que lhes foi tardiamente conferida.

Veremos que as mais importantes propriedades destas formações só se manifestaram depois dos trabalhos de Archimedes e sobretudo de Hipparco, o maior astronomo da antiguidade.

Mas sua plena efficacia sómente se desenvolveu depois que os arabes completaram os trabalhos dos gregos.

Um tal complemento permittiu modernamente que a elaboração especial da trigonometria reagisse gradualmente sobre a constituição geral da Algebra, incorporando a esta as formações chamadas *trigonometricas*.

As mais simples destas, sómente emanadas do circulo, occuparam ahi por muito tempo o lugar em que se acha o *par artificial*, implicitamente contido nellas.

Mas, por não se conhecer essa ligação, não se podia considerar o *par artificial* como assaz abstracto, conforme convinha ao calculo das relações.

Isto não impediu de utilizal-o para quantidades conhecidas, quando era plenamente avaliavel e, sob certos aspectos, a respeito das incognitas, conforme as transformações que comportava. Entretanto, só foi inteiramente incorporado á algebra quando o estudo das *series* permittiu approximal-o do *par artificial*, comparando-o igualmente com os pares naturaes e admittindo para as quantidades correspondentes, constantes ou variaveis, todas as hypotheses numericamente possiveis.

Desde então, foi sempre licito empregarem-se as formações emanadas do circulo, sem alterar o caracter abstracto das verdadeiras equações, considerando esses elementos

supplementares como equivalendo a combinações assignalaveis dos diversos elementos essenciaes.

56 — O feliz exito das formações circulares levou naturalmente a viciosas tentativas para dar-se maior extensão á mathematica abstracta, tirando da *ellipse* relações irracionalmente comparadas ás do *circulo*.

Importa caracterisar essa aberração, não só pelos vestigios, que deixou por muito tempo, mas, sobretudo, para prevenir todo desvio analogo, fazendo melhor sobresair a restricção normal dos elementos algebricos.

«Vistas philosophicamente, essas formações *ellipticas* não podem nunca preencher as duas condições necessarias — de avaliação e de transformação — que permittiram o emprego das formações circulares, antes de se tornarem plenamente abstractas.

Concebe-se a possibilidade de avaliar as *cordas* de todos os *arcos* do circulo, por isso que semelhante calculo, realizado para um raio qualquer, se applica immediatamente a qualquer outro.

Mas a falta de semelhança entre as ellipses, onde differe a relação dos eixos, deve sempre impedir a construcção de taboas ellipticas, verdadeiramente comparaveis ás taboas circulares.

Todos os calculos feitos a esse respeito não poderiam jámais servir senão para as ellipses cujos eixos são proporcionaes aos do typo adoptado.

A cada um dos valores, em numero infinito, que admitte a relação dos eixos, seria preciso especialmente adoptar uma nova taboa, o que faz directamente evidenciar a inanidade de um tal projecto.»

Extendida a outras curvas, a mesma tentativa não deixaria de ser chimerica senão para as que, como o circulo, são sempre semelhantes entre si, em vista de suas grandezas dependerem de uma só medida.

Espontaneamente conforme a esta condição, a *parabola* comportaria taboas verdadeiramente analogas ás do

circulo ; construindo-as para um *parametro* qualquer da curva, ellas poderiam immediatamente convir a qualquer outro. Não se deve despresar um tal recurso, ainda que só possa servir em casos até hoje hypotheticos.

Todavia, importa reconhecer que essa extensão dos elementos algebricos seria apenas apparente, por isso que a lei geral da rectificação parabolica se acha, desde muito tempo, referida aos cinco pares normalmente proprios ao calculo das relações. (8 d)

Taes são as considerações que devem preservar os estudos mathematicos dessas tentativas vãs, que surgiram de um modo empirico para a ellipse, viciosamente assimilada ao circulo.

Ellas apenas serviram para confirmar a irrevogavel restricção do dominio da Algebra aos dez elementos espontaneamente emanados da arithmetica e da geometria.

Bastam normalmente as considerações que temos feito para ter-se uma justa idéa das *formações algebricas*, como base fundamental do calculo das relações.

Todavia, como o ramo *indirecto* deste calculo exige que se saiba discernir sem confusão todas as formações simples que compõem uma formação qualquer dada, vamos ampliar o nosso estudo, apreciando de um modo geral as *formações compostas* e ensinando especialmente a discernir os seus elementos. Tal será o assumpto do paragrapho seguinte.

§ 9

Combinação das formações simples : formações compostas

57 — A fim de completar a *theoria das formações*, apreciemos agora as formações compostas dos elementos algebricos que temos considerado.

(8 d) Poder-se-ia desde logo, segundo esta lei, preencher a condição de transformação, tanto quanto a de avaliação, instituindo para a parabola um theorema equivalente ao do quadrilatero inscripto ao circulo. (A. Comte — «Synthèse subjective», chapitre II.)

Comquanto estes sejam apenas dez, o numero de formações compostas é realmente illimitado: pois que infinitas são as combinacões que é possivel fazer-se com estes elementos, ligando-os dois a dois, tres a tres... e podendo cada um figurar em toda combinação um numero qualquer de vezes.

Foi, portanto, com este pequeno grupo de elementos que o espirito humano conseguiu formar o numero infinito das leis algebricas compostas.

Deste facto conclue-se immediatamente, em primeiro lugar, que um numero mais ou menos consideravel das formações compostas, impossivel de assignalar *a priori*, póde corresponder a relações puramente chimericas.

De sorte que, elaborando indisciplinadamente taes formações, podemos nos estar entregando a um trabalho completamente ocioso.

Si a Algebra fosse estudada isolada e simplesmente como o *calculo das formações*, admittiria sem duvida toda a sorte de formações abstractas, quer continuas, quer descontinuas.

Estudada, porém, como parte integrante da mathematica, onde deve essencialmente ligar a Arithmetica á Geometria e á Mecanica, exclue systematicamente do seu dominio as formações descontinuas, porquanto vimos que não podem ellas traduzir a existencia concreta, que tem por base essencial a continuidade.

E' verdade que os phenomenos naturaes apresentam algumas vezes casos de descontinuidade; mas estes, ou são excepções e porisso mesmo parciaes, não admittindo portanto a generalidade que a Algebra attribue ás questões que lhe são accessiveis, ou são apenas apparentes, devido á imperfeição dos nossos meios de aprecial-os.

As formações compostas que não forem continuas não são por conseguinte proprias para ligar o dominio abstracto ao concreto, e não devem por isso ser consideradas em mathematica.

Esta, do mesmo modo que exclue as formações concretas por falta de *abstracção*, exclue tambem as formações abstractas que não gosam da continuidade.

Em segundo lugar, suppondo mesmo que todas as *formações compostas* correspondessem a relações naturaes, nada nos autorisaria a pensar que ellas bastassem para traduzir o conjuncto das leis naturaes.

Porque para isso seria necessario que todos os phenomenos, em ultima analyse, fossem regidos pelo diminutissimo numero de leis elementares de que dispomos. Ora, essa hypothese está em desaccordo com a Primeira lei de Philosophia Primeira (*formar a hypothese mais simples de accordo com os dados adquiridos*), quando mesmo os nossos elementos algebricos fossem incomparavelmente mais numerosos do que são.

A' vista dessas considerações, não é pela abundancia das leis algebricas compostas que devemos medir o nosso poder effectivo para a interpretação numerica da ordem immutavel que nos domina.

E' pela extrema penuria de elementos algebricos com que taes leis são constituidas que podemos avaliar quanto são precarias as nossas condições a tal respeito.

58 — Na ligação de duas ou mais formações simples, já dissemos que se obtem sempre uma formação composta, qualquer que seja a lei numerica que as prenda. Portanto, a classificação das formações compostas assenta sobre a das formações simples e admitte as mesmas divisões.

Assim, se dividem, como estas, em *algebricas* e *transcendentes*, sendo algebricas as que só contêm elementos algebricos e transcendentes as que encerram um ou mais elementos transcendentes.

As *algebricas* dividem-se em *racionaes* e *irracionaes*, sendo racionaes as que somente se compõem de elementos racionaes, e irracionaes as que contêm um ou mais elementos irracionaes.

As racionaes dividem-se em *inteiras* e *fraccionarias*, estando no primeiro caso as que só contêm elementos inteiros e no segundo as que se compõem de um ou mais elementos fraccionarios.

As formações inteiras classificam-se tambem em graus e as de cada grau em *completas* e *incompletas*.

O *grau* de uma formação a uma só variavel independente, como são as de que ora tratamos, é sempre dado pelo maior expoente que tem esta variavel.

Quando na formação entram termos affectos de todas as potencias da variavel, desde a que determina o seu grau até a de grau zero, ella é chamada *completa*, e é *incompleta* quando privada de um ou mais desses termos.

Assim, por exemplo, $y = ax + b$ é uma formação racional, inteira, do 1º grau e completa, e $y = ax$ é incompleta.

Assim, tambem, o typo geral das formações completas do 2º grau de uma só variavel independente é:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

que comprehende tres typos incompletos, a saber:

$$y = ax^2 + c \quad y = ax^2 + bx \quad \text{e} \quad y = ax^2.$$

Todas as formações algebricas racionaes de fórma inteira e de uma só variavel independente podem ser comprehendidas no seguinte typo geral:

$$y = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Tx + U,$$

que representa a formação completa de um grau qualquer m, encerrando, assim, $m + 1$ termos.

A distincção das formações em *algebricas* ou *naturaes* e *transcendentes* ou subsidiarias é da maior importancia em algebra, porque, como havemos de ver, as equações que contêm as ultimas formações são de natureza muito differente das que se compõem com as primeiras; na elaboração das equações chamadas transcendentes, a algebra está muito mais atrazada que relativamente ás equações algebricas propriamente ditas.

Universidade de São Paulo
Faculdade
Departamento
Matemática

A distincção das formações algebricas inteiras em diversos *graus* é tambem de grande importancia, porquanto da *a priori*, ideia exacta das difficuldades que encontra a algebra na resolução das equações algebricas que dellas se compõem.

Porque, si uma equação de grau m comprehende todas as de graus inferiores, é obvio que a difficuldade de resolvel-a comprehende tambem todas as difficuldades de resolver as de graus inferiores.

A distincção das formações algebricas em *racionaes* e *irracionaes* é tambem de grande relevancia; porquanto as equações em que entram estas ultimas formações, chamadas *equações irracionaes*, apresentam na sua elaboração algebrica difficuldades superiores ás que correspondem ás *equações racionaes*.

As equações irracionaes exigem um trabalho prévio —a sua transformação em outras racionaes; e esta transformação apresenta, ao menos praticamente, as mais serias difficuldades: os calculos que origina são as mais das vezes inexequiveis, em virtude de sua complicação.

Quanto á divisão das formações racionaes em *inteiras* e *fraccionarias*, é ella secundaria, porque facilmente se transformam estas naquellas.

59 — De accordo com o modo por que se acham ligadas á variavel, podem ser as formações *explicitas* e *implicitas*.

Já sabemos que uma formação é explicita quando estão claramente indicadas todas as operações a effectuar-se sobre as *constantes* e a *variavel*, para obter-se o valor da *formação*, como por exemplo:

$$y = \frac{3ax + b}{x^2 + c};$$

e sabemos que é *implicita* quando estas operações não estão indicadas, sendo necessarias transformações prévias para que fiquem ellas precisamente definidas.

Assim:

$$ay + bx - c = 3by + 2cx - d$$

é uma formação implicita em que y é a variavel dependente, x a independente, e a, b, c, d quantidades constantes.

Veremos que toda formação implicita deve ser considerada uma equação não resolvida.

Transformar a formação implicita na explicita corresponde a resolver a equação.

Cada membro de uma formação implicita sendo tambem uma formação, póde-se dizer que «*a equação é a igualdade entre duas formações implicitas*».

E como as formações que figuram na Algebra são abstractas, podendo as circulares ser consideradas como taes, a definição mais completa de equação é — *a igualdade entre duas formações abstractas das grandezas que se consideram.*

Veremos que essa definição é sómente rigorosa para as equações *a mais de uma variavel*, que são as que podem traduzir leis naturaes.

Entretanto as equações *a uma só variavel* devem ser incluidas na definição, considerando-as como casos particulares de equações *a mais de uma variavel.*

As formações implicitas ou equações admittem a mesma classificação que as explicitas.

Ellas podem ser algebricas ou transcendentes: as algebricas, *racionaes* ou *irracionaes*; as racionaes, *inteiras* ou *fraccionarias*; as inteiras, de diversos *graus*; e as de cada grau, *completas* ou *incompletas.*

Nas formações consideradas até aqui temos attendido sómente á unidade variavel, sem ter em vista sua pluralidade.

Consideremol-a agora, tratando das formações de diversas variaveis independentes.

As formações de mais de uma variavel são sempre

compostas, mesmo nos casos menos complicados em que cada uma depende de uma só operação ligando as duas variaveis, como em $y = xz$.

Para ver-se que a formação $y = z \times x$ não se póde equiparar á formação simples $y = ax$, basta lembrar que, a cada valor da variavel x, na segunda, corresponde um só valor para y, ao passo que na primeira corresponde realmente uma infinidade de valores, por isso que z é tambem variavel independente e como tal póde receber um numero infinito de valores correspondentes a cada um dos de x.

A variação de y é, portanto, dupla, e essa duplicidade de variação corresponde á duplicidade da operação necessaria para avaliar a formação.

Como as formações simples que entram nas formações a mais de uma variavel são sempre as dez já consideradas, segue-se que a divisão desta especie de formações compostas é a já estabelecida em relação ás de uma só variavel.

Assim as formações *a mais de uma variavel* podem ser algebricas e transcendentes; racionaes e irracionaes; inteiras e fraccionarias, segundo a natureza dos elementos que contêm; as inteiras classificam-se em formações do 1º, 2º... graus, e as de cada grau são completas ou incompletas.

O grau é dado pela maior somma dos expoentes das variaveis em um só termo.

Assim, considerando as formações:

1) $$u = ax + by^2 + cxy + dz^3 + e$$

(2) $$u = ax^3z^3 + y^4 + dxyz^3 + e$$

(3) $$u = z^5 + bxy^3 + cxyz + f,$$

em que x, y, z são variaveis independentes, o grau da 1ª é 3, o da 2ª é 6 e o da 3ª é 5.

Do mesmo modo que as formações de uma só variavel, as de mais de uma podem ser *explicitas* ou *implicitas*.

As formações implicitas de mais de uma variavel admittem as mesmas classificações que as de uma só variavel:

Ellas são algebricas ou transcendentes, racionaes ou irracionaes, inteiras ou fraccionarias; as inteiras podem ser do 1º 2º 3º etc., graus e em cada grau podem ser completas ou incompletas.

Uma formação implicita a m variaveis de um grau qualquer, para ser completa, deve conter todas as potencias das variaveis, desde as que marcam o seu grau até a primeira potencia, um termo independente das variaveis, e finalmente termos em que figurem as combinações 2 a 2, 3 a 3, etc., das mesmas variaveis, comtanto que a somma dos seus expoentes não exceda ao grau da formação.

Assim, a formação implicita a duas variaveis:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

é completa do 2º grau.

A formação implicita a duas variaveis:

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fy^2 + Gx + Hy + Ixy + J = 0$$

é completa do 3º grau.

60 — Relativamente ás formações implicitas ha ainda uma distincção importante a fazer: é a que se refere ao *grau* de *implicidade*.

Uma formação de uma ou mais variaveis póde ser implicita em graus diversos, conforme se considera isolada ou simultanea com outras.

A maior ou menor implicidade é medida pelo numero de relações em que figuram as mesmas variaveis.

Assim, por exemplo, é maior no systema de relações:

$$(A)\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d', \end{cases}$$

em que ha duas formações y e z ligadas entre si e dependendo de uma só variavel x, do que na seguinte:

$$(B)\ ax + by = c,$$

onde a formação y não se acha combinada com outras.

Igualmente é maior a implicidade em

$$(C)\ \begin{cases} ax + by + cz + du = e \\ a'x + d'y + c'z + d'u = e', \end{cases}$$

onde entram as formações z e u dependendo de duas variaveis x e y, do que em

$$(D)\ ax + by + cz = d,$$

onde só a formação z está dependendo de x e de y.

Geralmente, quanto maior fôr o numero de formações implicitas combinadas entre si, tanto maior será o grau de implicidade do systema correspondente.

Estes differentes graus de implicidade, representados pelas formações implicitas simultaneas, ou, como se diz, pelos *systemas de equações simultaneas*, são da maior importancia algebrica, como motivando a theoria geral da *eliminação*, que havemos de estudar na *algebra superior*.

Não se deve confundir o *grau* de *implicidade* das formações com o seu *grau* de *indeterminação*.

Sendo a *variavel dependente* uma quantidade indeterminada, vê-se que a sua indeterminação cresce com o numero de variaveis independentes ou arbitrarias a que se acha ligada.

Os differentes graus de indeterminação de uma variavel dependente são medidos, pois, pelo numero de variaveis arbitrarias de que ella depende.

Por exemplo, tão indeterminada é a variavel dependente ou formação y na relação *(B)* como no systema de relações *(A)*, apesar de estar nestas ultimas combinada com z. E assim por diante.

O grau de indeterminação sendo sempre marcado pelo excesso do numero de variaveis sobre o das equações, é evidente que diminuirá á medida que crescer o numero destas no systema considerado.

Costuma-se distinguir o caso em que uma formação composta depende, *immediatamente*, da variavel ou das variaveis independentes, daquelle em que dellas depende *mediatamente*, isto é, por intermedio de outras formações.

Da-se-lhe neste ultimo caso a denominação de *formação mediata* ou *formação* de *formação*, para distinguil-a da *formação immediata* ou formação incomplexa.

Assim, por exemplo:

$$u = ax + by + \sqrt{z}$$

é uma formação immediata ou incomplexa de x y e z, ao passo que $y = z\ (log.\ x)^m$ e

$$y = \sqrt{log\, x \times \sqrt[n]{z} \div sen\, x}$$

são *formações mediatas* ou complexas.

Veremos, entretanto, que semelhante distincção não tem grande importancia, por ser sempre possivel transformar qualquer *formação mediata* ou *complexa* numa outra *immediata* ou *imcomplexa*

61 — Agora examinemos o modo abreviado de indicar que uma grandeza é *formação* de outra.

Emprega-se para isso a letra inicial da palavra *formação*, maiuscula ou minuscula, com accentos, com indices, ou sem elles, no alphabeto latino, ou grego, sem que por isso fiquem excluidos outros signaes.

Assim, $y = f\ (x)$, quer dizer que «y é formação de x», sem que esteja indicado o modo particular de dependencia das duas variaveis.

Duas formações differentes da mesma variavel são representadas com carrcteristicos differentes; assim

$$y = F(x)$$
$$y = f(x)$$

significam formações diversas da variavel x.

As formações de mais de uma variavel são indicadas geralmente do mesmo modo.

Por exemplo, para exprimir que uma formação z depende immediatamente de duas, tres.... variaveis, escreve-se :

$$z = f(x, y),$$
$$z = f(x, y, u),$$

e finalmente

$$z = f(x, y, u, t...),$$

typo mais geral de uma formação immediata de x, y, u... etc.

Si se tratasse de uma formação *mediata*, ou *formação* de *formação* de duas, tres, etc., variaveis, escrever-se-ia:

$$y = f(f_1(x))$$
$$y = F(F_1(F_2(x)))$$
.....
.....

e

$$y = f(f_1(f_2(f_3(\ldots. f_n(x)))))),$$

expressão mais geral de uma formação mediata de uma só variavel.

Indica-se em geral uma formação implicita de uma variavel independente escrevendo :

$$f(x, y) = F(x, y);$$

e como a differença destas formações ainda é uma formação, póde-se substituir a sua igualdade pela nullidade de sua differença, escrevendo:

$$f(x, y) = 0.$$

Para as formações implicitas de mais de uma variavel segue-se a mesma notação.

Afim de formar um resumo das differentes classes e grupos de formações considerados, apresentamos o seguinte quadro, onde se acham especificadas todas as categorias, divisões e sub-divisões que ellas comportam:

FORMAÇÕES ABSTRACTAS
Simples
algebricas ou naturaes
transcendentes ou subsidiarias
racionaes
irracionaes
artificiaes
excepcionaes
inteiras
fraccionarias
de diversos graus
completas e incompletas
Compostas
Grau de indeterminação
1º 2º 3º ... m.
cada gr.
explicitas
implicitas
algebricas
transcendentes
racionaes
irracionaes
inteiras
fraccionarias
1º grau 2º » ...
cada grau
completas
incompletas
Gr. de implicitação
1º 2º ... m.
cada gr.
algebricas
transc.
racionaes
irracionaes
inteiras
frac.
1º grau 2º » ...
cada gr.
completas
incompletas

62 — DISCRIMINAÇÃO DAS FORMAÇÕES SIMPLES QUE ENTRAM NUMA FORMAÇÃO COMPOSTA QUALQUER — Como applicação vamos emfim discriminar as formações simples que entram numa formação composta qualquer:

1°. Tomemos para exemplo a formação composta descoberta por Euler (9ª) para traduzir abstractamente a *formação circular directa*, isto é,

$$sen.\ x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Fazendo

$$e^{x\sqrt{-1}} = u,\ e^{-x\sqrt{-1}} = \frac{1}{u} = t,\ x\sqrt{-1} = p,\ u - t = q,$$

$$q \times \frac{1}{2\sqrt{-1}} = r,$$

virá,

$$r = q \times \frac{1}{2\sqrt{-1}} = \frac{u-t}{2\sqrt{-1}} = \frac{e^{p} - e^{-p}}{2\sqrt{-1}} =$$

$$= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = sen.\ x,$$

o que nos mostra haver ao todo cinco formações simples.

(9a) «Leonardo Euler, nasceu em Bâle (Suissa) em 1707 e morreu em S. Petersburgo em 1783.

Começou a aprender mathematica com seu pae, que havia sido discipulo de Jacques Bernouilli, de cujo irmão João Bernouilli recebeu lições sobre a mesma sciencia.

Os filhos deste, Daniel e Nicoláu Bernouilli, amigos de Euler, foram com elle nomeados para a Academia de S. Petersburgo. Em 1741 publicou um tratado de mecanica.

Escreveu tambem uma nova theoria sobre a musica, aliás muito geometrica para os musicos e uma introducção á arithmetica. Ganhou, com Daniel Bernouilli e Mac-Laurin, o premio proposto pela Academia de Paris para a melhor memoria sobre o fluxo e refluxo do mar. Escreveu depois um prodigioso numero de memorias, cujas mais importantes são: a do *methodo das isoperimetros*, sobre a theoria do movimento dos planetas, sobre os cometas, sobre o

2°. Seja ainda proposta a formação

$$y = \sqrt{\frac{ax + b - sen.\ x}{arc.\ sen.\ x \times a^x}}$$

A titulo de artificio empreguemos ainda lettras auxiliares para facilitar a discriminação. Façamos:

$$\frac{ax + b - sen.\ x}{arc.\ sen.\ x \times a^x} = s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad y = \sqrt{s} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} ax + b - sen.\ x = t \\ arc.\ sen.\ x \times a^x = u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases} \qquad s = \frac{t}{u} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} ax + b = v \\ sen.\ x = w \quad (3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases} \qquad t = v - w \qquad (4)$$

$$\begin{cases} ax = p \quad (5) \\ p + b = q \quad (6). \end{cases}$$

$$\begin{cases} arc.\ sen.\ x = m \\ a^x = n \quad (8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases} \qquad u = m \times n \qquad (9)$$

Temos assim 9 formações simples na constituição da formação composta considerada.

---

principal problema da balistica, sobre a optica, sobre a construcção e manobra dos navios, sobre a artilheria, etc.

Publicou, por fim, a *Introducção á Analyse Infinitesimal* e a *Instituição* do *calculo differencial e integral*, obras que ficaram classicas durante muito tempo.

Contrario ás theorias de Newton sobre a optica, elle viu o triumpho de suas ideias praticamente attestado por Dollond; logo depois que D'Alembert resolveu o importante problema da precessão dos equinoxios e da mutação do eixo terrestre, Euler publicou a sua bella theoria sobre o movimento dos solidos (em 1765).

Tendo perdido a vista que lhe restava, continuou entretanto a trabalhar, publicando os *Elementos de Algebra* e tres grossos volumes sobre a Diotrica, que ditava ao seu famulo.

Ao mesmo tempo a Academia publicava suas cartas a uma princeza da Allemanha, sua theoria da lua, etc; emfim, no ultimo periodo de sua vida, publicou os seus celebres trabalhos sobre a hydrodinamica. A algebra lhe deve a identificação das funcções circulares

3º. Seja, emfim, proposta a formação

$$y = \left(\frac{a^{x^{y^z}} \times sen.^2 x - lg.\ (x-y)}{1 - x^2 + \sqrt{ax+y}} \right)^2$$

Façamos :

$$\frac{a^{x^{y^z}} \times sen.^2 x - log\ (x-y)}{1 - x^2 + \sqrt{ax+y}} = m \text{ virá } y = m^2 \quad (1)$$

$$a^{x^{y^z}} \times sen.^2 x - log\,(x-y) = n \quad 1 - x^2 + \sqrt{ax+y} = t \quad m = \frac{n}{t} \quad (2)$$

$$a^{x^{y^z}} \times sen.^2 x = u \qquad log\ (x-y) = v \qquad n = u - v \quad (3)$$

$$a^{x^{y^z}} = s \qquad sen.^2 x = r \qquad u = sr \quad (4)$$

$$a^{x^y} = q \qquad s = q^z \quad (5)$$

$$a^x = p \quad (6)$$

$$q = p^y \quad (7)$$

$$sen.\ x = l \quad (8)$$

$$r = l^2 \quad (9)$$

$$x - y = b \quad (10)$$

$$v = log.\ b \quad (11)$$

$$1 - x^2 = h \qquad \sqrt{ax+y} = j \qquad t = h + j \quad (12)$$

$$x^2 = i \qquad i = x^2 \quad (13)$$

$$ax + y = k \qquad ax = w \quad (14)$$

$$k = w + y \quad (15)$$

Temos, assim, 15 formações simples.

---

e das funcções exponenciaes, bem como a definição algebrica dos logarithmos, importantes melhoramentos sobre a theoria das series, que elle ensinou a não empregar sinão quando fossem convergentes.

E' sobretudo pela parte que tomou na fundação da mecanica celeste que Euler se immortalisou.»

Augusto Comte qualificava-o de — o mais fecundo e menos philosopho dos grandes geometras.

Universidade de São Paulo
Filosofia
Departamento de Matemática

63 — Este estudo da instituição fundamental do calculo algebrico que temos feito até aqui não ficaria completo si não apreciassemos um duplo complemento que lhe é proprio. O primeiro refere-se ás diversas fórmas de que as relações algebricas se têm revestido e aos motivos que levaram a preferir a fórma de *equação* á de *proporção*: o segundo é relativo não só á generalidade das grandezas *constantes* ou *variaveis* que figuram nas equações, mas ainda ao meio de verificar o sentido concreto destas, bem como a distincção entre as equações *directas* e *indirectas* donde resultou a divisão geral do calculo das relações.

Tal será o assumpto dos dois proximos capitulos. (9b)

CAPITULO IV

FÓRMAS QUE TÊM TOMADO AS RELAÇÕES ALGEBRICAS: FÓRMA DE PROPORÇÃO E FÓRMA DE EQUAÇÃO; SUPERIORIDADE DESTA SOBRE AQUELLA; FÓRMA DE DESIGUALDADE E FÓRMA DE IGUALDADE; VANTAGENS DESTA ULTIMA

§ 10

Relação sob a fórma de proporção

64 — Ha no relativismo de nossas concepções um facto incontestavel em todos os tempos. Esta verdade teve uma de suas mais frisantes confirmações nas duas fórmas que, em épocas differentes, as relações algebricas receberam, a saber: a *fórma de proporção e a de equação.*

65 — Estudemos resumidamente a theoria das proporções, afim de podermos comparal-as com as equações.

(9b) Quando redigia este capitulo, chegou-me a triste noticia da morte de meu pae, horrivelmente victimado pelo choque de um bonde electrico. Por um piedoso testemunho de amor filial, inscrevi o seu nome num dos acrosticos, ligando-o, nos dois outros, á memoria de minha mãe e de meu irmão, já fallecidos.

Que se me releve exprimir assim a effusão de um intimo sentimento que tão dolorosamente se prende aqui a essa fatal coincidencia.

Heloisa

Chama-se *proporção por quociente* ou simplesmente *proporção* a igualdade entre duas *razões* ou relações por quociente.

Assim, por exemplo, a relação por quociente entre 12 e 4 sendo igual á que existe entre 6 e 2, estes quatro numeros acham-se em proporção.

Em geral, si a razão entre a e b é a mesma entre c e d, as grandezas representadas por estas letras formam uma proporção que os antigos exprimiam deste modo:

$$a : b : : c : d$$

e que os modernos traduzem mais succintamente pela igualdade dos dois quocientes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Os primeiros termos das razões foram denominados *antecedentes* e os segundos *consequentes*.

O primeiro e o ultimo termos da proporção foram qualificados de *extremos* e os intermediarios de *meios*.

Tendo assim caracterisado as *proporções* por quociente, vejamos agora quaes as suas propriedades. Todas ellas podem ser estutadas sob a fórma primitiva que tiveram, nos V, VI, VII, VIII e IX livros da Geometria de Euclides; mas nos limitaremos ás principaes, despindo-as da linguagem geometrica de que mui naturalmente as revestiu o geometra grego.

66 — LEI FUNDAMENTAL DAS PROPORÇÕES POR QUOCIENTE — A propriedade mais importante consiste *em que em toda proporção o producto dos extremos é igual ao producto dos meios*.

Para demonstral-a, consideremos a proporção

$$a : b : : c : d$$

ou mais simplesmente

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Multiplicando pelo producto *bd* ambos os membros desta igualdade, não a alteramos evidentemente, e virá:

$$\frac{a \times bd}{b} = \frac{c \times bd}{d}$$

ou, simplificando as fracções obtidas,

$$a \times d = c \times b$$

quod erat demonstrandum.

Esta propriedade é fundamental, porque permitte deduzir todas as outras. Della resultam as seguintes consequencias:

1ª CONSEQUENCIA — *O extremo incognito de uma proporção é igual ao producto dos meios dividido pelo extremo conhecido.*

Com effeito, consideremos a proporção

$$a : b : : c : x,$$

na qual suppomos incognito o extremo x.

Applicando-lhe a propriedade fundamental, obteremos

$$a \times x = b \times c,$$

dividindo ambos os membros desta igualdade por a, teremos

$$x = \frac{b \times c}{a},$$

onde se vê que o extremo x é igual ao producto dos meios b e c, dividido pelo extremo conhecido a. Si este fôr tomado para unidade, a questão se resolve simplesmente pela *multiplicação dos meios.*

2ª CONSEQUENCIA — *O meio incognito de uma proporção é igual ao producto dos extremos dividido pelo meio conhecido.*

Com effeito, consideremos a proporção

$$a : x : : c : d.$$

Applicando-lhe a propriedade fundamental, obtemos

$$x \times c = a \times d,$$

dividindo ambos os membros desta igualdade por c, virá

$$x = \frac{a \times d}{c}$$ q. e. d.

Si o meio conhecido fôr tomado para a unidade, o incognito será simplesmente igual ao producto dos *extremos.*

3ª CONSEQUENCIA — *Quando são iguaes os meios de uma proporção, o meio incognito, chamado então média proporcional, equivale á raiz quadrada do producto dos extremos.*

Supponhamos a proporção *continua*

$$a : x : : x : d.$$

Neste caso, em virtude da propriedade fundamental, tem-se

$$x \times x = a \times d$$

ou

$$x^2 = a \times d,$$

donde se conclue que

$$x = \sqrt{a \times d}$$

q. e. d.

A reciproca da propriedade fundamental é tambem verdadeira: *Quando quatro grandezas são taes que o producto de duas seja igual ao producto das outras duas, ellas formam uma proporção em que dois dos factores são os extremos e os outros dois os meios.*

Supponhamos que

$$a \times d = b \times c.$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por *db*, obteremos

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d}$$

igualdade que, simplificada, nos dá a proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

q. e. d.

Desta reciproca resultam os corollarios seguintes:

1° COROLLARIO — *Póde-se alternar, inverter e transpor os termos de uma proporção sem que esta deixe de existir.*

Alternar é trocar o logar dos meios. Assim, alternando a proporção

$$a : b : : c : d,$$

teremos:

$$a : c : : b : d$$

ou

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Inverter é passar os *extremos* para *meios* e os *meios* para *extremos*. Assim, invertendo a proporção considerada, teremos

$$b : a : : d : c \text{ ou } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Transpor é trocar o logar das *razões*, o que, sendo feito na proporção dada, nos fornece:

$$c : d : : a : b \text{ ou } \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Ora, todas estas mutações podem ser effectuadas porque o producto dos extremos persiste igual ao producto dos meios.

2° COROLLARIO — *Multiplicando pela mesma quantidade todos os termos de uma proporção, os productos obtidos formam ainda uma proporção.*

Porque o producto dos extremos continúa a ser igual ao producto dos meios, e vimos que, neste caso, existe ainda proporção.

3º COROLLARIO — *Dividindo pela mesma quantidade todos os termos de uma proporção, os quocientes obtidos formam ainda uma proporção.*

Isto pela mesma razão que precedentemente.

67 — OUTRAS PROPRIEDADES — São importantes as propriedades seguintes:

1ª PROPRIEDADE — *Em qualquer proporção a somma ou differença dos dois primeiros termos está para o segundo, assim como a somma ou differença dos dois ultimos está para o quarto.*

Seja proposta a proporção

$$a : b :: c : d;$$

trata-se de mostrar que

$$a \pm b : b :: c \pm d : d$$

ou

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}.$$

Juntando ou subtrahindo *1* a ambas as razões da proporção dada, a igualdade subsistirá, e teremos

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$$

ou reduzindo o inteiro á fracção

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d},$$

ou

$$a \pm b : b :: c \pm d : d \qquad \text{q. e. d.}$$

Desta propriedade resulta immediatamente uma outra. Porque alternando a proporção obtida, isto é:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d},$$

obteremos

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d},$$

onde vemos que *em toda proporção a somma ou a differença dos dois primeiros termos está para a somma ou differença dos dois ultimos, assim como o segundo está para o quarto.*

2ª PROPRIEDADE — *Em qualquer proporção, a somma ou differença dos dois primeiros termos está para o primeiro delles, assim como a somma ou differença dos dois ultimos está para o terceiro.*

Com effeito, supponhamos a proporção

$$a : b :: c : d;$$

applicando-lhe a propriedade precedente, virá

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

ou alternando

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d},$$

Alternando por sua vez a proposta, tem-se

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Comparando esta proporção com a precedente, vê-se que são iguaes as segundas razões.

Ora, duas quantidades iguaes a uma terceira sendo iguaes entre si, virá

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c}$$

ou alternando

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$$

q. e. d.

A proporção precedente, sendo alternada, nos deixa vêr uma consequencia desta propriedade:

A somma ou differença dos dois primeiros termos está para a somma ou differença dos dois ultimos, assim como o primeiro está para o terceiro.

3ª PROPRIEDADE — *Em qualquer proporção a somma ou differença dos antecedentes está para a somma ou differença dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para o seu consequente.*

Com effeito, consideremos a mesma proporção

$$a : b :: c : d;$$

alternando-a, teremos

$$a : c :: b : d.$$

Applicando a esta a primeira propriedade, virá

$$\frac{a \pm c}{c} = \frac{b \pm d}{d};$$

alternando, emfim, esta proporção, obteremos

$$\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{c}{d}$$

q. e. d.

A proporção precedente, sendo alternada, nos permitte concluir esta propridade que *em qualquer pro-*

porção a somma ou differença dos antecedentes está para um antecedente, assim como a somma ou differença dos consequentes está para o seu consequente.

4ª PROPRIEDADE — *Em qualquer proporção a somma dos antecedentes está para a sua differença, assim como a somma dos consequentes está para a sua differença.*

Com effeito, seja a proporção

$$a : b :: c : d.$$

Applicando-lhe a propriedade precedente, obtemos

$$a \pm c : b \pm d :: c : d.$$

Separando as duas proporções contidas nesta, teremos

$$a + c : b + d :: c : d \text{ e } a - c : b - d :: c : d$$

ou

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{c}{d}$$

e

$$\frac{a - c}{b - d} = \frac{c}{d}.$$

Estas duas proporções têm a razão commum

$$\frac{c}{d};$$

logo as outras duas razões são iguaes e portanto virá

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{a - c}{b - d},$$

alternando finalmente esta proporção, obtem-se

$$\frac{a + c}{a - c} = \frac{b + d}{b - d}$$

q. e. d.

E' corollario desta propriedade a seguinte:

Numa serie de razões iguaes, a somma dos antecedentes está para a somma dos consequentes, como qualquer antecedente está para o seu consequente.

Porque sendo a serie proposta

$$A : a :: B : b :: C : c :: D : d, \text{ etc.}$$

e isolando-se della as duas primeiras razões iguaes

$$A : a :: B : b,$$

e applicando a esta proporção a terceira propriedade, teremos

$$A + B : a + b :: B : b.$$

Porém na proporção formada pelas segunda e terceira razões iguaes, isto é

$$B : b :: C : c,$$

ha uma razão commum com a precedente; logo formarão as duas a proporção

$$A + B : a + b :: C : c.$$

Applicando a esta proporção a terceira propriedade, vem

$$A + B + C : a + b + c :: C : c, \text{ etc.}$$

q. e. d.

5ª PROPRIDADE — *Multiplicando ordenadamente os termos de duas ou mais proporções, os productos obtidos tambem estarão em proporção.*

Sejam as proporções

$$a : b :: c : d$$

$$a' : b' :: c' : d'$$

$$a'' : b'' :: c'' : d''$$

Universidade de S. Paulo
Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

ou

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$$

$$\frac{a''}{b''} = \frac{c''}{d''}.$$

Multiplicando ordenadamente estas tres igualdades de accôrdo com a regra da multiplicação das fracções, teremos

$$\frac{a \times a' \times a''}{b \times b' \times b''} = \frac{c \times c' \times c''}{d \times d' \times d''}.$$

Sendo este resultado uma igualdade de duas razões por quociente, segue-se que os productos obtidos estão em proporção

q. e. d.

Como corollario desta propriedade mostra-se que *os quadrados, cubos e quaesquer potencias do mesmo grau de quatro numeros em proporção tambem estão em proporção.*

Porque elevar ao quadrado, cubo, etc. os termos de uma proporção equivale a multiplicar ordenadamente duas, tres, etc. proporções, cujos termos correspondentes sejam iguaes, e, em virtude do que acaba de ser demonstrado, esses productos estarão em proporção.

Reciprocamente, *as raizes quadradas, cubicas, etc. de quatro numeros em proporção tambem ficam em proporção.*

Porque si a proporção proposta fôr

$$a : b :: c : d \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

extrahindo a raiz de um grau qualquer de ambos os membros desta igualdade, o que evidentemente a não altera, resulta

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

ou porque se extrae a raiz de uma fracção extrahindo a raiz de ambos os seus termos,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}},$$

resultado este que exprime igualdade de razões por quociente, e por conseguinte proporção,

q. e. d.

68 — INSPIRAÇÃO GEOMETRICA DA IDEIA ABSTRACTA DE PROPORÇÃO — A concepção das proporções foi não só inspirada, mas mesmo solicitada pelo surto especial da geometria antiga.

Já vimos em arithmetica que a *razão* de duas linhas é tão abstracta e natural como a razão de dois numeros, visto como a mesma definição convem a ambas.

Ora, a igualdade de duas rasões geometricas, isto é, a proporção por quociente, resultou espontaneamente das especulações sobre a medida da extensão.

Dahi veio o nome de *proporção geometrica*, mui justamente dado a esta especie de relações, que representou para a *geometria especial* ou dos antigos o mesmo papel que a Algebra representa hoje para a *geometria geral* ou dos modernos.

69 — SOBRE AS PROPORÇÕES ARITHMETICAS — Sob o nome de proporção por *differença* ou mais propriamente de *equidifferença*, a arithmetica fez surgir uma outra sorte de igualdade entre relações numericas.

Estudando-a, já vimos qual a distincção entre as *relações por differença e as relações por quociente*.

A igualdade entre duas relações por differença, isto é, a *equidifferença*, denominou-se, por isso *proporção arithmetica*.

Assim, pois, si quatro numeros forem taes que a differença entre os dois primeiros seja igual á differença entre os dois ultimos, diz-se que elles estão em *equidifferença* ou em *proporção arithmetica*, segundo os antigos, que a exprimiam collocando um ponto entre os dois primeiros numeros, dois pontos entre o segundo e terceiro e um ponto entre os dois ultimos; por exemplo 7. 5: 14.12, que se traduz 7 está para 5, assim como 14 está para 12.

Porém, a maneira moderna e mais simples de exprimir a equidifferença consiste em indicar a avaliação das razões, a saber:

$$7 - 5 = 14 - 12$$

e, em geral, ao envez de

$$a.\ b:\ c.\ d,$$

escreve-se

$$a - b = c - d$$

Do mesmo modo que nas proporções por quociente, todos os quatro numeros que constituem a equidifferença são chamados, em commum, *termos* della; ao primeiro e quarto da-se o nome de *extremos* e ao segundo e terceiro o de *meios*; os primeiro e terceiro são os *antecedentes* e os segundo e quarto, *consequentes*.

A propriedade fundamental das equidifferenças é que *a somma dos meios é igual a somma dos extremos*.

Com effeito, seja proposta uma equidifferença qualquer

$$a.\ b:\ c.\ d \text{ ou } a - b = c - d.$$

Trata-se de mostrar que

$$a + d = b + c;$$

juntando-se a ambos os membros da igualdade precedente a quantidade

$$b + d,$$

resulta

$$a - b + b + d = c - d + b + d;$$

attendendo-se que

$$b - b = o \text{ e } d - d = o,$$

vem

$$a + d = b + c$$

como queriamos demonstrar.

Reciprocamente, *se a somma de duas quantidades for igual á somma de outras duas, as quatro quantidades constituem uma equidifferença de que duas parcellas são os meios e as outras duas são os extremos.*

Seja

$$a + d = b + c,$$

Subtrahindo-se a ambos os membros desta igualdade a quantidade b, vem

$$a + d - b = b + c - b$$

Subtrahindo-se ainda a quantidade d, vem

$$a + d - b - d = b + c - b - d;$$

attendendo-se agora que

$$d - d = o, \text{ e } b - b = o,$$

tem-se

$$a - b = c - d,$$

resultado que exprime a igualdade de duas razões por differença e conseguintemente uma equidifferença.

Como corollario da propriedade fundamental e de sua reciproca, resultam:

1º. *Um extremo incognito de uma equidifferença é igual a somma dos meios, menos o extremo conhecido.*

Porque, si

$$a.\ b:\ c.\ x$$

é uma equidifferença, esta sujeita á propriedade fundamental e, por, conseguinte,

$$a + x = b + c\ ;$$

subtrahindo a ambos os membros desta igualdade a quantidade a, vem

$$x = b + c - a$$

c. q. d.

2º. *Um meio incognito de uma equidifferença é igual á somma dos extremos, menos o meio conhecido.*

Porque, si

$$a.\ b:\ x.\ d$$

é uma equidifferença, goza da propriedade fundamental, e, portanto,

$$b + x = a + d.$$

Subtrahindo a ambos os membros desta igualdade a quantidade b, vem

$$x = a + d - b$$

c. q. d.

No caso particular em que a equidifferença tem os meios iguaes, chama-se-lhe *equidifferença continua*; e o meio incognito, que neste caso se denomina *meio differencial* ou *média arithmetica*, é igual á *semi-somma dos extremos*.

Porque, sendo

$$a.\ x:\ x.\ b$$

a *equidifferença continua*, em virtude da propriedade fundamental,

$$x + x = a + b,$$

ou

$$2x = a + b;$$

dividindo-se ambos os membros desta ultima igualdade por 2 vem,

$$x = \frac{a + b}{2}$$

para a média arithmetica das duas quantidades que formam os *extremos*.

Em geral obtem-se a média arithmetica de muitas quantidades dividindo-se sua somma pelo numero dellas.

Assim, por exemplo, a média arithmetica entre 2, 15, 20 e 43 será

$$\frac{2 + 15 + 20 + 43}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

3°. *Póde-se sommar ou subtrahir o mesmo numero a ambos os antecedentes, a ambos os consequentes, ao primeiro e ao segundo termos, ou aos terceiro e quarto sem perturbar a equidifferença.*

Porque, apezar de taes combinações, a somma dos meios continúa a ser igual á somma dos extremos e, portanto, a igualdade subsiste.

70 — A forma de equidifferença representa uma reacção da arithmetica sobre a geometria.

Quando esta já havia determinado o advento das *proporções* propriamente ditas, impellindo deste modo as especulações numericas para o calculo das relações, o calculo dos valores determinou por sua vez o advento das

equidifferenças, impellindo tambem o surto das proporções até as equações propriamente ditas (10 b).

A forma de equação desenvolveu-se especialmente nas meditações arithmeticas, de sorte que não foi systematisada senão muito tardiamente.

A nossa apreciação deve, pois, restringir-se á comparação entre as *proporções geometricas* e as *equações*, porque as *equidifferenças* já representam um esboço destas ultimas.

Antes, porém, precisamos examinar de um modo geral, em que consiste a forma de *equação*.

E' o que faremos no paragrapho seguinte.

§ 11

Relações sob a forma de equação

71 — A equação deve ser algebricamente definida como sendo a igualdade entre duas formações abstractas das grandezas que se consideram.

Estas duas formações podem ser simples ou compostas, algebricas ou transcendentes, de uma só variavel ou de muitas; e as grandezas consideradas podem figurar em numero qualquer.

Isto já nos mostra a superioridade da forma de *equação* sobre a de *proporção*, onde, em cada relação isolada, as grandezas combinadas não podem ser mais de quatro.

(10 b) Remarquez de plus que l'équation renferme les deux sortes de proportions, ce qui confirme encore notre vue *a priori* que toute forme de comparaison mathématique est réductible à la forme d'équation.....

La proportion ne doit actuellement figurer en mathématiques que comme monument historique isolé mais frappant des différentes formes de calcul qui ont été employées avant d'arriver á l'equation: on ne doit en parler à des élèves que pour leur faire voir la supériorité de l'équation sur cette forme surannée. (A. Comte— *Essais sur la philosophie mathématique.*)

As applicações mais usuaes da theoria das proporções são por este motivo denominadas *regras de tres*.

Nellas se consideram, com effeito, quatro grandezas, das quaes tres são dadas e uma *incognita*.

Quando a questão encerra maior numero de grandezas, decompõe-se a *regra de tres composta* em tantas *regras de tres simples* quantas são as grandezas consideradas menos uma. Cada *regra de tres simples* se resolve por uma *proporção*, e o producto das proporções, finalmente obtido, fornece a *proporção* final que resolve a questão (11 a).

Em resumo, a forma de *equação* é tambem a de uma igualdade, como acontece na *proporção*.

Notemos, porém, que na equação a igualdade se realisa entre duas formações quaesquer, simples ou compostas, sem nenhuma restricção quanto ao numero de seus termos e das grandezas combinadas, ao passo que na proporção não podem estas ultimas exceder a quatro.

72 — FORMA DE DESIGUALDADE — Acabamos de vêr que uma *equação* em mathematica, não é mais do que uma comparação, que ahi é tão precisa quanto possivel.

Ora, toda comparação sendo binaria, isto é, fazendo-se sempre entre duas quantidades, não se pode conceber entre ellas senão tres sortes de comparações, a saber: a de superioridade, a de inferioridade e a de igualdade, ou, em resumo, a comparação de *desigualdade* e a de *igualdade*.

Observemos, porém, que toda comparação de desigualdade é em si mesma vaga e só pode adquirir precisão quando é transformada numa comparação de igualdade.

Quando dizemos, por exemplo, que uma grandeza é maior ou menor que uma outra, não temos sinão um conhecimento imperfeito de sua mutua relação. Mas,

---

(11 a) No Appendice deste livro trataremos destas applicações da Algebra dos antigos.

quando dizemos que uma grandeza é igual á outra, exprimimos ao contrario um facto preciso.

Todavia, si na comparação de desigualdade mostrarmos que certa quantidade é maior que outra de *tanto*, ou menor de *tanto*, desde logo a comparação se torna precisa. Mas, notemos que neste caso a comparação de *desigualdade* não é no fundo sinão uma comparação de *igualdade*, e que somente differe desta pela forma; porque é como se dissessemos que aquella quantidade é igual a outra mais *tanto* ou menos *tanto*.

Assim, pois, a equação é a forma de comparação por excellencia em mathematica, visto como a comparação de igualdade é o modo essencial de comparar as quantidades, e qualquer comparação entre estas se reduz sempre, quando é precisa, a uma comparação de igualdade.

Pode-se dizer que tambem se reduz a esta, mesmo quando é vaga: apenas neste caso ha alguma cousa de indeterminado no segundo membro da comparação.

Porque dizer que

$$a > b \text{ ou } a < b,$$

é no fundo o mesmo que exprimir

$$a = b + \delta \text{ ou } a = b - \delta,$$

sendo δ uma quantidade indeterminada.

Comquanto as relações de igualdade sejam as mais usuaes e mais proprias aos raciocinios mathematicos, acontece algumas vezes estabelecerem-se comparações por meio de desigualdades (quasi sempre combinadas com igualdades), as quaes, sendo bem constituidas, conduzem a resultados uteis e satisfactorios.

Em todo caso, á vista da observação acima, é preferivel substituir sempre toda comparação de *desigualdade* por uma comparação de *igualdade* indeterminada.

Assim procedendo, tem-se a vantajem de simplificar a syntaxe algebrica, por isso que deste modo ha apenas uma unica ordem de comparações a regulamentar neste dominio.

Temos supposto até aqui, para não complicar os enunciados, que a comparação é feita entre duas quantidades simples.

Si supposermos agora que cada um dos membros da comparação é uma formação algebrica muito complicada, é evidente que tudo que precede terá ainda inteira applicação, porque cada um delles pode ser considerado, pelo menos mentalmente, como formado de um só termo.

Notemos ainda que todas as transformações operadas sobre cada membro, não consistem, por mais complicadas que sejam, sinão em comparações, quer de desigualdade, quer de igualdade, sempre reductiveis a esta ultima.

Devido á perfeita concisão da linguagem algebrica pode-se seguir ao mesmo tempo todas essas comparações.

Vê-se, portanto, que para resolver uma questão qualquer sobre as quantidades, a difficuldade consiste em reduzil-a a uma ou a muitas comparações de igualdade.

Conseguido isto, nada mais é preciso para que o calculo se encarregue de elaborar as equações obtidas quando isto é possivel.

Pelo que fica dito, sente-se bem que toda equação não é mais do que uma comparação analoga ás que fazemos ordinariamente em linguagem vulgar, porém, somente mais precisa (11 b).

73 — Vejamos agora como é possivel referir todas as igualdades que constituem as equações a um pequeno

---

(11 b) Aliás a linguagem algebrica nos deixa vêr semelhante analogia, porque os signaes $= > e <$ designam abreviadamente os tres gráos geraes de comparação, isto é, de igualdade, de superioridade e de inferioridade. (A. Comte. — Essais sur la philosophie mathematique.)

numero de typos fundamentaes que comprehendam todos os outros.

Comquanto as equações possam tomar uma infinidade de formas diversas, por causa da diversidade infinita de *formações* que podem constituir os seus dois membros, as transformações algebricas permittem reduzil-as a um pequeno numero de *typos* que encerrem todos os outros.

E' assim que, considerando a principio as equações mais simples, a uma incognita, vê-se facilmente que todas ellas se acham comprehendidas no typo:

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \ldots + A_{m-1}x = A^m,$$

onde fazendo successivamente

$$m = 1, 2, 3, 4\ldots,$$

obtem-se os typos completos das equações algebricas dos 1°, 2°, 3°, 4°.... gráos a uma incognita, a saber:

$$A_0x = A_1$$
$$A_0x^2 + A_1x = A_2$$
$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x = A_3$$
$$A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x = A_4$$

.....
.....

cada uma das quaes contém um numero de termos indicado pelo respectivo gráo augmentado de uma unidade.

Estes typos *completos* contêm, por seu turno, os incompletos, taes como:

$A_0x = 0$, $A_0x^2 + A_1x = 0$, $A_0x^2 = A_2$, $A_0x^2 = 0$, $A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x = 0$, $A_0x^3 + A_1x^2 = A_3$, $A_0x^3 + A_2x = A_3$, $A_0x^3 = A_3$, $A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x = 0$, $A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 = A_4$, $A_0x^4 + A_1x^3 + A_3x = A_4$, $A_0x^4 + A_2x^2 + A_3x = A_4$, $A_0x^4 + A_1x^3 = A_4$, $A_0x^4 + A_2x^2 = A_4$, $A_0x^4 + A_3x = A_4$, etc.

Relativamente ás equações algebricas a mais de uma incognita, é facil de ver que cada typo deve comprehender

as mais altas potencias de cada uma das incognitas em termos distinctos e bem assim outros termos que encerrem todas as combinações dessas potencias em todos os gráos, até o termo independente dellas, comtanto que a somma desses gráos não exceda em cada um ao gráo da equação.

Assim, por exemplo, o typo completo das equações do 1º gráo a duas incognitas será:

$$Ax + By = C.$$

o typo completo das equações do 2º gráo a duas incognitas será:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F;$$

o typo completo das equações do 3º gráo a duas incognitas será

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy = J$$

e assim por diante.

A lei das *repartições*, indicada na arithmetica, nos dá o meio facil de determinar *a priori* o numero de termos de taes equações. Com effeito, na formula

$${}^{m}R_{3} = \frac{(m+1)\ (m+2)}{1.\ \ 2.}$$

fazendo $m = 1$ obtem-se 3, que é o numero de termos da equação do 1º gráo a duas variaveis; na mesma formula fazendo $m = 2$, tem-se 6, que é um numero de termos da equação do 2º gráo a duas variaveis; suppondo ainda nesta mesma formula que $m = 3$, chega-se a 10, que é o numero de termos da equação de duas variaveis do 3º gráo; si a equação fosse do 4º gráo seria preciso pôr na formula $m = 4$, o que produziria 15 termos.

Para o caso de tres variaveis os resultados seriam dados pela formula de ${}^{m}R_{4}$, substituindo m pelo gráo da equação; para o caso de quatro variaveis, seriam pela formula de ${}^{m}R_{5}$, e assim por diante.

74 — Importa reconhecer que os typos precedentemente indicados podem ser substituidos por outros mais simples, dividindo ambos os membros de cada equação pelo coefficiente do primeiro termo. Cada um dos quocientes obtidos sendo ainda numero conhecido poder-se-á represental-o por uma só lettra; de sorte que os typos considerados podem ser expressos pelas igualdades seguintes:

$$x = B$$

$$x^2 + Bx = C$$

$$x^3 + Bx^2 + Cx = D$$

$$x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx = E$$

e assim por diante.

Emfim, os typos precedentes podem ainda ser substituidos pelos seguintes, onde se vê que os termos de cada equação se concentram no primeiro membro:

$$x + p = o$$

$$x^2 + px + q = o$$

$$x^3 + px^2 + qx + h = o$$

$$x^4 + px^3 + qx^2 + hx + l = o$$

e assim por diante.

Com effeito, verificando-se a igualdade entre os dois membros de uma equação, é evidente que se pode substituir a igualdade delles pela annullação de sua differença.

Essa transformação foi pela primeira vez realisada pelo geometra inglez Harriot (1560—1621). Ella, conforme veremos, trouxe grandes vantagens para a theoria das equações, porque permittiu comparal-as quando se apresentaram acompanhadas de outras, para traduzirem numericamente uma questão qualquer, formando o que se chama um *systema de equações*. Como tal, deve este comportar soluções communs para as respectivas incognitas,

o que significa dizer que devem estas ser satisfeitas pelos mesmos numeros em todas as equações.

75 — EXPLICIDADE E IMPLICIDADE DAS EQUAÇÕES — As equações, taes como têm sido consideradas, não são mais do que *formações implicitas*, nas quaes as *variaveis* são representadas pelas incognitas, e as *constantes* pelas quantidades dadas que figuram na equação como coefficientes daquellas.

Passar esta formação do estado implicito para o explicito, eis em que consiste o que se chama a resolução da equação.

Resolver uma equação é, portanto, passal-a do estado implicito para o explicito.

Isto importa em indicar claramente quaes as avaliações que devem ser effectuadas sobre os *dados*, para determinar as *incognitas*.

Obtida assim a *formula* que resolve a equação entre as grandezas consideradas numa questão qualquer, a algebra tem desempenhado a sua missão, cabendo á arithmetica a avaliação final da mesma formula.

Porque esta indica explicitamente a relação existente entre a *incognita* e os *dados*, só restando avaliar as combinações indicadas.

Nestas condições, vê-se claramente que em toda questão mathematica ha sempre duas phases distinctas: uma preliminar em que se estabelecem as relações numericas existentes entre as grandezas consideradas da questão, e outra final em que, depois de elaboradas taes relações, são ellas avaliadas numericamente.

A primeira phase da questão é sempre a mais complexa, porquanto exige, não só que se aprehendam as relações existentes entre as grandezas consideradas, mas tambem que se elaborem taes relações, passando-as do estado implicito para o explicito.

O complemento deste trabalho logico, representado pela segunda phase da questão, já se torna mais facil, por

isso que as combinações numericas indicadas são quasi sempre exequiveis, pelo menos approximadamente.

A sua impossibilidade é de ordinario apparente, desapparecendo muitas vezes mediante uma interpretação racional dos resultados obtidos.

A primeira phase da questão offerece naturalmente um duplo aspecto, concreto e abstracto.

Porque para resolver as equações é preciso estabelecel-as e isto exige que se apreciem as grandezas consideradas no phenomeno sob o ponto de vista de suas relações mutuas, antes de exprimil-as numericamente.

Traduzidas algebricamente taes relações, é mister tornal-as explicitas, isto é, resolver as equações obtidas.

Por ahi se vê a impossibilidade de instituir regras fixas para o estabelecimento das equações.

Quanto á sua resolução, objecto definitivo da algebra, é facil reconhecer que essa questão offereceu um grande numero de problemas, crescendo a difficuldade conforme a natureza das formações componentes (11 c).

Pode-se ter uma idéa de sua classificação comtemplando o conjuncto das equações acima indicadas como typos (133).

Foram ellas, como as mais simples, que attrahiram a attenção dos primeiros algebristas.

E apezar de todos os esforços até hoje tentados pelos maiores genios, não se conseguiu resolver de um modo

---

(*11 c.*) Tomando a expressão geral $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + l$ e igualando-a a um numero qualquer n, e suppondo $a.b.c.... l$ conhecidos, vê-se que ella corresponde ao seguinte problema: *Dado um numero, determinar qual a base em que elle seria representado pela somma dos multiplos indicados da referida base.* Esse problema geral abrange varios casos particulares, representados pelas equações $n = ax + b$, $n = ax^2 + bx + c$, $n = ax^3 + bx^2 + cx + d$, etc. O problema inverso a este seria expresso pela mesma equação, suppondo, porém, que n é desconhecido. E' o problema geral da numeração em que se determina um numero, sendo dadas as diversas potencias da *base* e os numeros inferiores a ella.

geral senão os quatro primeiros typos, conforme veremos.

Depois que se chegou a resolver esses quatro typos de equação procurou-se remontar á solução do typo geral

$$Ax_0^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + Kx = L.$$

Para isso tratou-se de comparar os resultados obtidos até então.

Semelhante comparação levou a reconhecer que toda a equação do 1º gráo é satisfeita por um só numero, quando o problema é possivel; que as equações do 2º gráo comportam duas soluções; as do 3º gráo, tres e as do 4º, quatro...

Esses numeros, que satisfazem as equações, foram chamados *raizes*, por extensão do nome que tem no caso em que a equação se reduz ao termo do mais elevado expoente, segundo o typo $x^m = A$, do qual resulta immediatamente que

$$x = \sqrt[m]{a}$$

Essa serie de especulações conduziu emfim ao problema inverso ao da resolução, que consiste em formar uma equação tendo para *raizes* numeros propostos.

Veremos adiante que isto equivale a saber como os coefficientes se formam com as raizes.

Resultado de uma evolução que conta seculos, a resolução das equações é, entretanto, uma das partes mais imperfeitas do dominio mathematico.

Todavia, graças aos expedientes de que se serviu o espirito humano, o pequeno numero de casos soluveis satisfaz plenamente ás suas necessidades.

76 — Tão consideraveis resultados são devidos sobretudo aos trabalhos de Viete que pode com justiça ser olhado como o verdadeiro fundador da moderna algebra.

Os seus antecessores só praticavam as operações

sobre numeros *determinados*: sómente a incognita e suas potencias eram representadas por abreviações ou por symbolos (Vide nota B).

NOTA B. Já dissemos nos «Apontamentos de arithmetica» que o primeiro trabalho conhecido tratando de algebra foi o de Diophante (325 a 409), que se suppõe resumir todos os conhecimentos dos gregos sobre tal assumpto.

Esta obra era dividida em trese livros dos quaes somente os seis primeiros chegaram até nós.

Encontra-se ahi a resolução em numeros inteiros das equações indeterminadas do primeiro gráo a duas incognitas, e um grande numero de problemas resolvidos por meio das equações do 1º e 2º gráos.

As difficuldades crescem ahi gradualmente, sendo provavel que os sete ultimos livros nos dessem uma alta idéa do autor.

Este só faz uso no seu tratado de um signal de subtracção e emprega periphrases para indicar a addição, a multiplicação e a divisão.

Os arabes e os indianos succederam-se aos gregos com mais ou menos successo na cultura do calculo algebrico.

Entre estes ultimos destaca-se sobretudo a obra de Brahmegupta, tratando da arithmetica, da algebra e da geometria, publicada no VI seculo.

Comquanto esta obra seja exposta com mais clareza, mais ordem e methodo que a de Diophante, não ha duvida que foi inspirada pelos trabalhos dos gregos.

A obra de Brahmegupta foi imperfeitamente commentada no seculo XII pelo seu compatriota Bhascara (1114) e traduzida por diversos sabios inglezes, no começo do seculo passado.

Entre os arabes a mais antiga obra que se conhece sobre a algebra é a de Mohamed ben Musa, publicada em 8.0 e traduzida no XII e XIII seculos em diversas linguas, estando averiguado que este sabio tirou dos indianos uma parte dos seus conhecimentos.

A obra de Mohamed ben Musa trata da addição, da subtracção e da multiplicação das expressões que contêm uma quantidade desconhecida, ou seu quadrado, ou sua raiz quadrada.

As regras da addição e da subtracção são ahi demonstradas por meio de linhas representando as quantidades.

Occupa-se de alguns exemplos de equações do 2º gráo, em que depois de explicações muito obscuras, chega a construir as raizes positivas, unicas aliás que toma em consideração.

Dos Mouros da Hespanha (sobretudo de Cordova), legitimos herdeiros da cultura mathematica dos arabes, os estudos algebricos

As operações não eram feitas com os proprios signaes, e quando as lettras eram utilisadas, o producto de duas quantidades era representado por uma outra lettra. (Charles — Histoire des methodes géometriques).

---

passaram á França e á Italia, onde foram cultivados na idade media, principalmente por Gerbert e Leonard de Pisa.

O primeiro (930-1003), nasceu em Aurillac (França), fundou na abbadia de Bobbio uma escola de grande reputação em toda a Europa, e que em parte contribuiu para a sua elevação ao papado, sob o nome de Sylvestre II.

Nas suas obras Gerbert trata de um problema importante para a época, porque depende de uma equação de 2º gráo.

Apresenta tambem ahi a formula para a sommação dos termos de uma progressão arithmetica e attribue-se-lhe a descoberta de um certo numero de formulas geometricas, exprimindo os arcos dos diversos polygonos regulares.

O segundo, Leonard de Pisa, igualmente conhecido pelo nome de Fibonacci nasceu em 1157 e falleceu no meiado do seculo XII; esteve por muito tempo no oriente, e depois do seu regresso, vulgarizou na Europa a arithmetica e a algebra dos arabes.

Foi elle quem iniciou a era dos torneios scientificos, tão frequentes na idade media, e nos quaes os sabios propunham entre si a resolução de diversas questões mathematicas.

Dois geometras da côrte de Frederico II lhe propuzeram diversos problemas.

Meditando sobre sua solução, Leonard fez varias descobertas que consignou na sua celebre obra dedicada ao imperador, sob o titulo de *Liber abaci*, isto é, tratado do abacus (chama-se abacus a um quadro dividido em quadrados encerrando os numeros simples e com o qual se faziam as operações arithmeticas.)

Por processos graphicos conseguio achar a expressão da somma dos quadrados da serie natural dos numeros e da sommação da serie dos impares.

Aliás taes resultados já tinham sido divulgados por Archimedes, que os obteve por um outro methodo e os applicou á determinação do arco da parabola.

Brahmegupta já havia dado a somma dos cubos dos *m* primeiros numeros.

Mais tarde, no seculo XVI, um medico arabe *Djamchid ban Mas'oud* achou o das quartas potencias e Fermat descobriu pela primeira vez um methodo geral para a sommação das potencias semelhantes dos termos duma progressão arithmetica.

As obras de Leonard de Pisa mostram que no seu tempo a

Foi, portanto, Viete que, representando por lettras todas as quantidades, não só conhecidas como desconhecidas, constituiu definitivamente a linguagem da algebra e ensinou a submetter os seus symbolos a todas as operações que se costumavam executar sobre os numeros.

---

algebra limitava-se ainda á resolução das equações de 1º e de 2º gráos.

A passagem aos gráos superiores era difficil.

A' Italia cabe a gloria de haver dado a esse respeito uma nova extensão á algebra pela descoberta da resolução geral das equações do 3º e do 4º gráos, graças aos trabalhos de Scipião Ferreo, Tartaglia e Ferrari.

Tartaglia Nicolo, nascido em Brescia em 1500 e morto em 1553, foi o primeiro que resolveu algebricamente as equações do 3º gráo.

Era conhecido como mathematico celebre e professava em Veneza quando acceitou o desafio que lhe fez Antonio del Fiori de resolver trinta questões no espaço de quarenta dias.

Estas questões, que se referiam a equações do 3º gráo, foram todas resolvidas em menos de duas horas; e Tartaglia formulou então o seu methodo de resolução em vinte e sete versos technicos.

A fama deste triumpho chegou aos ouvidos de J. Cardan (nascido em Pavia em 1501 e morto em Roma em 1576) que compunha então sua celebre *Arte magna*, e que em vão pediu a Tartaglia lhe communicasse a descoberta para enriquecer a sua obra.

Não desanimou, porém, ante a recusa e obteve afinal o que desejava sob promessa de segredo.

Com o concurso de seu discipulo, o italiano Ferrari (1522-1565), Cardan conseguiu extender as regras de Tartaglia ás equações de 4º gráo, e apressou-se em tudo publicar na sua *Arte magna*.

Descontente com tal procedimento, Tartaglia dirigiu a Cardan um desafio publico fixado em Milão.

O seu adversario não veio logo até ahi, limitou-se a enviar-lhe o discipulo Ferrari, e só depois sustentou a luta isoladamente.

O successo de Tartaglia não era duvidoso, quando a attitude dos amigos de Cardan o obrigou a fugir precipitadamente da cidade.

Este facto mostra bem, diz Libri, que importancia se ligava então ás descobertas algebricas.

As apostas, as disputas publicas succediam-se sem interrupção; todas as classes da sociedade interessavam-se nesses torneios scientificos, como na antiguidade interessavam-se nos desafios dos poetas e nos combates dos athletas.

O calculo das imaginarias é uma descoberta de Cardan, deve-se-lhe tambem um methodo para a resolução das equações nume-

Mas não é tudo, porque o seu principal merito é devido ás suas idéas sobre a theoria das equações.

Viete ensinou a effectuar sobre as equações inteiras, sem conhecer as raizes, suas mais simples transformações: juntar ou subtrahir o mesmo numero a todas as raizes; multiplical-as ou dividil-as pelo mesmo numero; privar as equações de um dos seus termos, etc.

Descobriu a decomposição do primeiro membro de uma equação em factores do primeiro gráo e a composição dos coefficientes por meio de raizes.

Foi o que primeiro se occupou da resolução das equações numericas de todos os gráos.

(RESOLUÇÃO APPROXIMADA)

Emfim cabe-lhe a gloria de haver iniciado os geometras no emprego do admiravel instrumento algebrico e, por meio do sua construcção graphica das equações do 2º e 3º gráos, no modo de representar geometricamente os resultados da algebra: primeiro passo para uma alliança mais estreita entre a algebra e a geometria que devia conduzir á grande descoberta de Descartes e permittir o completo desenvolvimento da mathematica.

Os trabalhos de Viete foram logo depois desenvolvidos e aperfeiçoados sobretudo por Rudolff que publicou um notavel tratado de algebra em 1522; por Michel Stieffel (1486-1567), que simplificou as notações usadas e publicou numerosos exemplos da applicação da algebra á geome-

---

ricas, por substituições que fornecem approximações successivas para as raizes.

Emfim elle achou muitas das relações que ligam as raizes aos coefficientes das equações, parecendo haver suspeitado da existencia da maior parte das propriedades que depois foram descobertas por Viete e demonstradas por Harriot.

(Para maiores detalhes sobre a historia da algebra, deve-se consultar as obras de Montucla, Marie, Bossut e principalmente de Libri sobre a historia da mathematica).

tria, e por Thomas Harriot (1568-1621) que desenvolveu as theorias que Viete havia dado sobre as equações.

François Viete nasceu em 1540 em Fontenay — le Comte (França) e falleceu em 1603.

Sua obra de *analyse* foi dedicada a uma mulher illustre, Catherine de Parthenaye, princesa de Rohan, sua bemfeitora e amiga.

77 — Estudadas, como se acham, as formas de *proporção* (§ 10) e de *equação* de que se tem revestido as relações algebricas, resta-nos somente comparal-as, justificando a preferencia desta sobre aquellas.

E' o que faremos no paragrapho seguinte.

§ 12

Forma que convém normalmente ás relações algebricas

78 — Havendo para as relações algebricas duas fórmas principaes, devemos agora comparal-as afim de justificar a preferencia da que normalmente prevaleceu.

Confrontando o typo da *equação* com o da *proporção*, vê-se que a equação é caracterisada por uma comparação binaria das grandezas que entram no phenomeno considerado, ao passo que na *proporção* a comparação é *quaternaria*.

Isto é, na equação consideram-se as grandezas como formando dois grupos, cada um caracterisado por uma ligação precisa entre as que nelle entram; e são esses grupos que se comparam pela *igualdade*.

De sorte que nesta comparação não se fixa mais a attenção sobre os elementos constitutivos do grupo, passando *a ser cada grupo considerado como um todo*.

Na *proporção*, consideram-se as grandezas como formando quatro grupos, e são esses que se comparam.

No seu caso mais simples, cada um desses grupos reduz-se unicamente a uma grandeza, conforme o segundo theorema de Thales. (12 a) Mas, no caso geral, cada um dos termos da proporção póde ser constituido por varias grandezas, ligadas entre si, de um modo preciso.

Como, em virtude da nossa constituição cerebral, nenhum confronto póde ser directamente estabelecido senão entre dois typos, a noção de proporção é caracterisada por uma série de comparações binarias.

Assim, tomando o caso mais simples para exemplo, dadas as quatro grandezas consideradas, comparam-se duas a duas, e são os resultados dessas comparações que se confrontam. E' o que se vê no segundo theorema de Thales.

Com effeito, tomam-se ahi dois lados de um dos triangulos e estabelece-se a relação entre elles.

Consideram-se depois os dois lados collocados do mesmo modo no segundo triangulo e estabelece-se a relação entre elles. Isto feito igualam-se as duas razões.

De sorte que, segundo a definição de *Euclydes*, uma *proporção ou analogia é uma identidade de razão.*

Note-se que a comparação entre os termos é operada neste caso por meio da lei numerica que se chama *quociente* ou *razão geometrica.*

Observe-se em segundo logar que póde acontecer que duas das quatro grandezas consideradas sejam iguaes entre si; e desde então a comparação se effectua realmente, em ultima analyse, entre tres grandezas.

E' o que acontece, por exemplo, no confronto dos triangulos semelhantes que resultam da divisão de um trian-

---

(12 a) Dois triangulos semelhantes têm os lados respectivamente proporcionaes (V. Claireaut — Geometria).

O 1º theorema de Thales — *a somma dos angulos de um triangulo é igual a dois angulos rectos — exprime-se, ao contrario, por uma equação* $A + B + C = 2r$.

gulo rectangulo pela perpendicular baixada do vertice do angulo recto sobre a hypothenusa.

Essa perpendicular torna-se o lado commum dos triangulos parciaes, mas, considerada como fazendo successivamente parte de cada um desses triangulos, vê-se que ella se oppõe a angulos que não são iguaes.

A comparação dos triangulos de que se trata faz logo reconhecer que, de accôrdo com o segundo theorema de Thales, um dos segmentos da hypothenusa está para a perpendicular, assim como esta está para o outro segmento.

A' vista do que precede, poder-se-ia ser levado a imaginar que a *forma de proporção* não se distingue da *forma de equação*, pois que cada proporção comporta indirectamente uma concepção e um enunciado por *equação*.

Esse apanhado, porém, apenas mostra que uma concepção póde entrar logicamente na outra.

Em si, ellas são distinctas e como tal foram historicamente elaboradas.

De facto, em todo raciocinio por meio de proporções, o pensamento versa sempre sobre quatro grandezas e excepcionalmente sobre tres.

A consideração binaria não intervem sinão secundariamente, donde resulta que, no caso geral, semelhante modo nos conduziria a comparar quatro grupos de grandezas, contendo cada um grandezas ligadas entre si por leis numericas quaesquer.

A distincção desses dois modos é bem caracterisada na linguagem vulgar.

Pois que, no caso da *equação*, se exprime que uma certa combinação das grandezas é igual a uma segunda combinação das mesmas grandezas ou de outras. Ao passo que, no caso da *proporção*, se enuncia que uma primeira combinação está para uma segunda combinação, assim como uma terceira está para uma quarta.

Cada uma dessas quatro combinações póde aliás ser entre as mesmas grandezas ou entre grandezas diversas.

79 — ADVENTO HISTORICO E SURTO DESSES DOIS MODOS. — As duas formas de relações que acabamos de mencionar têm ambas uma origem no raciocinio geral, apenas precisado pela intervenção dos numeros.

Mas a forma de *equação* desenvolveu-se especialmente nas meditações arithmeticas, de sorte que não foi systhematisada sinão muito tardiamente.

A proporção offereceu-se como o modo mais geral em geometria, emquanto prevaleceu o ponto de vista inicial no estudo, quer da medida da extensão, quer das propriedades da forma.

Sem duvida a geometria fez em breve surgir a consideração das equações; mas a ideia de proporção torna-se espontaneamente preponderante, emquanto se está no ponto de vista dos antigos.

Comprehende-se, pois, que, comquanto a necessidade do surto do *Calculo das relações*, distincto do *Calculo dos valores*, se tivesse apresentado tanto em arithmetica como em geometria, foi o *Calculo das relações* sob a forma que melhor parecia adaptar-se ao raciocinio geometrico, o que primeiro solicitou a attenção dos theoristas.

De sorte que os antigos foram levados a systematisar o calculo das relações, tomando para base das *relações precisas* as *proporções*, isto é, as relações em que se comparam *quatro termos* e no minimo *tres*.

Essa constituição do calculo das relações, extendido mesmo até a apreciação das series, foi realisada bem cedo pelo genio grego, pois que ella precedeu os grandes trabalhos de Archimedes, Appollonio e Hypparco.

O resultado de tal elaboração nos foi transmittido por Euclides, geometra da escola de Alexandria, que viveu tres seculos antes da éra catholica.

Assim instituido, o *Calculo das relações* foi applicado ás especulações arithmeticas.

A theoria abstracta das proporções é apresentada por Euclides nos seus V e VI livros.

A applicação de tal theoria ao estudo das *avaliações* constitue o objecto dos VII, VIII e IX livros.

Nessa constituição, as *grandezas indeterminadas* são representadas por linhas rectas, da mesma forma que os termos das proporções. Essas rectas são caracterisadas por uma, duas ou mais letras, conforme os casos; e o discurso mathematico faz-se com o auxilio dessas lettras.

Nas applicações da theoria das proporções ás especulações arithmeticas os numeros indeterminados são representados por meio de rectas, ou simplesmente por lettras, ou por pontos.

Comprehende-se assim a verdadeira filiação da nossa notação algebrica actual. Porque os gregos representando os numeros *determinados* pelas lettras do seu alphabeto foram espontaneamente levados a representar do mesmo modo as *grandezas indeterminadas*. Tanto mais quanto as lettras eram tambem empregadas para distinguir os *pontos* caracteristicos de cada figura geometrica.

Educados nos livros gregos, os occidentaes contrahiram assim um habito que se tornou facilmente systematico, quando o surto das equações substituiu-se ao desenvolvimento das proporções.

Convem agora observar que o surto do *Calculo das relações* sob a forma de proporção não poude ser sinão verdadeiramente rudimentar. Porquanto, desde que a consideração de tal *calculo* determinou uma cultura puramente numerica, abstrahindo do seu destino geometrico, a forma de equação prevaleceu.

Desde então, foi sob essa forma de equação que se realizou toda a expansão decisiva do genio algebrico da Humanidade. Essa expansão foi tal, que em breve se perdia o sentimento do verdadeiro alcance mathematico da theoria das proporções.

De sorte que antes de Augusto Comte, não se percebia que semelhante theoria tinha sido de facto a primeira tentativa para systematisar o *Calculo das relações*.

Não se percebia tão pouco que, assim systematisado, esse *calculo* tinha representado no conjuncto da *Philosophia antiga* o mesmo papel que a algebra hoje representa e está destinada a representar eternamente.

A sciencia achava-se então essencialmente reduzida ás especulações geometricas especiaes mesmo em astronomia.

Ora, a *theoria das proporções* constituia o instrumento logico destinado a auxiliar taes meditações, como a Algebra auxiliou depois o surto scientifico peculiar aos modernos.

Para bem apreciar esse parallelo, convem assignalar desde já que as proporções exerceram esse officio, tanto a respeito da comparação directa das grandezas, como na comparação indirecta.

E' o que facilmente se reconhece lembrando que as incomparaveis descobertas geometricas de Archimedes foram realisadas com o auxilio dessa forma do Calculo das relações. (12 b.)

80 — REFLEXÕES SOBRE A PREPONDERANCIA DA EQUAÇÃO SOBRE A PROPORÇÃO. — Mas «era tão facil de sentir os inconvenientes das *relações a quatro termos* e de realisar a sua reducção a dois membros, que, si os antigos não o fizeram sinão muito tarde, foi porque as especulações algebricas não haviam tido mais cedo necessidade de uma cultura *distincta e seguida*».

Depois de esgotada essencialmente a cultura geometrica e astronomica compativel com a sociabilidade antiga, a attenção dos theoristas gregos voltou-se para as especulações numericas.

O orgão mais eminente desse movimento foi Diophante, geometra que parece ter florescido na segunda metade do terceiro seculo da ditadura romana, isto é, 15 seculos e meio antes da era normal positivista. Uma parte de seus

---

(12 b) Apontamentos de curso do Cidadão R. Teixeira Mendes.

escriptos está perdida. Mas foi delles que os arabes receberam o Calculo das relações, já com a forma de equação, que a cultura musulmana continuou a transmittir aperfeiçoada aos occidentaes.

« Este surto da algebra, isto é, do Calculo das relações sob forma de equação, não se tornou decisivo sinão depois dos trabalhos de Descartes em Geometria ».

Porque até a indispensavel regeneração cartesiana, os dois modos pareciam dever coexistir como respectivamente apropriados já ás especulações abstractas, já ás especulações concretas.

Mesmo em arithmetica, até os nossos dias, o empirismo academico continua a manter o uso das proporções para a solução habitual de muitos problemas.

Examinada philosophicamente, essa preponderancia da *equação* sobre a *proporção* deve ser attribuida á lei logica fundamental que torna puramente binarias todas as nossas comparações immediatas.

O predominio systematico desta regra teria conduzido, desde o inicio do surto theorico, a preferencia que só tardiamente prevaleceu. Mas o ponto de vista especialista que então preponderava na cultura scientifica, e que era aliás inevitavel em tal época , não permittia outra marcha.

Hoje ella serve para esclarecer a nossa concepção do *Calculo das relações* preservando-nos de qualquer apreciação absoluta a tal respeito.

Com effeito, toda a utilidade actual da *theoria das proporções* consiste em garantir a nossa concepção relativa do Calculo das relações.

81 — RESULTADO EXTREMO DO IMPULSO LOGICO QUE LEVOU A PREFERIR A EQUAÇÃO Á PROPORÇÃO. — Mas o principio fundamental que conduziu a preferir a *equação á proporção* não podia limitar-se a este resultado.

Com effeito, elle se torna insufficiente desde que da consideração de uma equação isolada temos de passar ao confronto das equações entre si.

Desde então, todos os inconvenientes das *relações a quatro termos* reproduzem-se, porque a tantos monta o total dos membros a confrontar no caso mais simples que então se pode offerecer, isto é, na comparação de *duas equações*.

Neste caso, para que a comparação se torne de novo binaria, é indispensavel que a apreciação de cada equação se reduza á consideração de um unico membro.

Ora, isto é facilmente realisavel, substituindo a igualdade das duas formações que constituem respectivamente cada membro pela *annullação* de sua differença. Desde então, os segundos membros de todas as equações tornam-se identicos e susceptiveis de uma completa abstracção.

82 — INDICAÇÃO DA MARCHA HISTORICA QUE CONDUZIU Á SEMELHANTE CONCENTRAÇÃO. — Essa concentração de cada equação no seu primeiro membro não foi, porém, realisada por uma sujeição systematica á fatalidade logica que nos impõe por toda a parte o dualismo das nossas combinações. Ella resultou de uma evolução gradual que contou seculos e que devemos indicar aqui summariamente.

Depois que as equações se substituiram ás proporções o problema de sua resolução, isto é, da transformação da *relação implicita entre a incognita e os dados em relação explicita* tornou-se a preoccupação preponderante.

Essa questão offereceu naturalmente um numero indefenido de problemas, crescendo a difficuldade conforme a natureza das formações; e essas difficuldades foram taes que somente se conseguiu resolver de um modo geral as equações a uma incognita dos quatros primeiros gráos, e excepcionalmente algumas outras de gráos superiores, reductiveis áquellas.

Os typos de taes equações são, como vimos:

$$ax = b$$
$$ax^2 + bx = c$$
$$ax^3 + bx^2 + cx = d$$
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = e.$$

Mas, depois que se conseguiu resolver estes quatro typos de equações, procurou-se naturalmente remontar á solução do typo geral :

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + kx = l$$

Comparando para isso os resultados obtidos, foi-se levado a reconhecer que toda a equação do 1º gráo é satisfeita por um só numero quando o problema é possivel; que toda a equação do 2º gráo é satisfeita por dois numeros nas mesmas condições, que toda equação do 3º gráo o é por tres numeros, e assim por diante.

Essa serie de especulações conduziu ao problema inverso ao da resolução das equações, isto é, *a formar uma equação que fosse satisfeita por numeros propostos.*

Veremos que isto equivale a saber *como os coefficientes das equações se formam por meio de suas raizes.* Ora, para realisar esse confronto entre as equações, era necessario consideral-as como condensadas no primeiro membro.

Tal foi a verdadeira origem da forma definitiva adoptada para as equações.

O segundo membro, em vez de ser conhecido simplesmente, ficou não só conhecido, mas nullo.

Desde então, o confronto das equações tornou-se binario como o exigia a lei logica acima assignalada.

83 — OBSERVAÇÃO SOBRE O MERITO DE HARRIOT. — O autor dessa concentração foi Thomas Harriot, geometra inglez, adjuncto de Viete no *Calendario Positivista* e um dos precursores de Descartes. Nasceu em Oxford em 1560 e morreu em Londres em 1621 no castello do Duque de Northumberland, seu protector.

Elle aperfeiçoou a notação algebrica de Viete, representando as potencias pela juxtaposição das lettras xx, xxx...., que Descartes substituiu depois pela notação do *expoente*.

Demonstrou claramente o que havia descoberto Viete sobre a relação entre os coefficientes e a somma das raizes

de uma equação, conforme se vê na sua obra *Artis analyticæ praxis*, publicada, depois de sua morte, em 1631.

O seu principal merito é devido, porém, não áquelle melhoramento, mas ás suas concepções sobre a composição das equações.

84 — Tendo em vista a reducção da ideia de *relacão* á de *combinacão* a philosophia algebrica acha-se conduzida á apreciação normal do grupamento peculiar a cada equação. Semelhante exame tem por base necessaria a distincção gerel entre as *variaveis* e as *constantes* que ahi figuram, distincção que é a fonte principal das concepções da algebra.

Nascida da consideração isolada das equações a muitas incognitas, ella se tornou pouco a pouco o fundamento normal das especulações sobre o calculo elementar e transcendente, quando a renovação cartesiana permittiu a subordinação do abstracto ao concreto.

Tal é a explicação que devemos desenvolver no capitulo seguinte.

CAPITULO V

GENERALIDADE DAS RELAÇÕES ALGEBRICAS, MEIO DE RECONHECER SEU SENTIDO CONCRETO, DISTINCÇÃO ENTRE AS RELAÇÕES DIRECTAS, DONDE DIVISÃO TOTAL DO CALCULO ALGEBRICO

§ § 13, 14 e 15

Generalização algebrica

85 — Resta-nos completar a parte mais philosophica do calculo algebrico apreciando o grupamento peculiar a cada equação. Porque, tendo estudado de um modo geral esta especie de relações algebricas, só nos falta consideral-as especialmente quer a respeito dos elementos constitutivos de cada equação isolada, quer

relativamente aos agrupamentos systematicos das mesmas equações.

86 — O nosso estudo deve começar pelo exame da distincção geral entre as *constantes* e as *variaveis* que, conforme dissemos, é a fonte principal das concepções algebricas.

Uma tal distincção corresponde ao contraste necessario entre as incognitas e os dados, que surge espontaneamente em toda questão algebrica. Porque, depois de exprimir a relação entre as grandezas *conhecidas* e as *desconhecidas*, já vimos que a questão capital da algebra consiste em tornar explicita a dependencia implicita existente entre as mesmas grandezas, isto é, as *incognitas* e os *dados*.

Esse contraste entre as *incognitas* e os *dados* é, como se vê, naturalmente exigido pela elaboração das relações algebricas, e corresponde assim á distincção geral entre as *constantes* e as *variaveis*.

As unicas differenças admissiveis entre as quantidades algebricas devem ser como esta, isto é, referir-se á elaboração das relações, sem nenhuma preoccupação dos valores das mesmas quantidades. Estas acham-se num estado continuo de *indeterminação*.

De sorte que *se devem submetter uniformemente ás regras do calculo todas as quantidades algebricas, afastando as distincções numericas, e sem nenhuma preoccupação com as anomalias a que poderá conduzir a inteira generalidade das transformações quaesquer*.

Os unicos valores admissiveis aqui são os que modificam as combinações, taes como os *expoentes* e os *indices*.

Emfim *todas as quantidades são sempre indeterminadas em Algebra*.

87 — SENTENÇA DE LAGRANGE. — Eis uma verdade que se não deve esquecer continuamente no estudo do calculo das relações. Mal apreciada antes do Positivismo,

ella só foi convenientemente sentida pelo eminente Lagrange (13 a) «o mais philosopho dos grandes geometras». Elle tinha por costume explicar aos seus discipulos — *que todo o segredo das concepções algebricas consiste em fixar os diversos gráos de indeterminação que a quantidade pode admittir.*

Mas a profundeza e o alcance desta sentença só podiam ser julgados por Augusto Comte, «o mais geometra dos grandes philosophos».

88 — A INDETERMINAÇÃO EM SEUS DIVERSOS GRÁOS. — A partir da distincção espontanea entre a incognita e os dados, começa a progressão fundamental dos diversos gráos de indeterminação proprios á grandeza abstracta.

1°. Consideremos a principio o caso mais simples de uma equação a uma só *incognita;* torna-se evidente que

---

(13a). Joseph L. Lagrange nasceu em Turim em 1736 e morreu em Paris em 1813. Publicou numerosas memorias sobre todos os ramos da Mathematica e suas applicações á Astronomia. Euler, o grande geometra que mais produziu, e bem assim o celebre d'Alembert tornaram-se grandes admiradores de Lagrange. O primeiro depois de ler o *methodo dos isoperimetros* com que o geometra italiano fundou o *Calculo das variações*; e o segundo quando conheceu a exposição da Mecanica racional, partindo do seu famoso theorema das *velocidades virtuaes*, rigorosamente demonstrado por Carnot. Essas homenagens e as que hoje lhe devemos mereceu-as elle de grandes homens do seu tempo, taes como Condorcet, Clairaut, Delambre, Laplace, Monge, Lavoisier, etc.

As suas obras principaes são a Mecanica Analytica e o Calculo das Funcções. Nestes como em todos os trabalhos de Lagrange, attrahe a attenção o seu grande espirito philosophico. Porque, desprezando os antigos processos de ensino, institula sempre em todas as questões um principio fundamental de onde deduzia todas as consequencias.

A Algebra directa e a indirecta lhe devem em parte esse espirito de generalidade systematica que hoje as caracteriza e que na Algebra Superior produziu as mais importantes concepções sobre a theoria da transformação das equações e da sua resolução numerica.

Graças ao seu genio philosophico, devemos ao geometra as suas mais bellas creações, em que se elevou sem cessar do calculo transcendente ao hypertranscendente (calculo das variações), e da Mecanica terrestre á Mecanica celeste.

esta ultima é mais indeterminada que os *dados*, por isso que, fixados estes, se lhe podem attribuir valores arbitrarios até que a equação seja satisfeita, isto é, resolvida.

Assim é, por exemplo, na equação

$$ax = b$$

os dados a e b são naturalmente mais fixos ou menos indeterminados do que a incognita x.

2º. Consideremos agora o caso de uma só equação a mais de uma *incognita*.

Tomando a principio o typo mais simples, isto é, o de uma equação a duas *incognitas*, vê-se que estas ultimas são tambem mais indeterminadas do que os *dados*. Mas, aqui a indeterminação somente se torna comparavel á do caso precedente si fixarmos uma das *incognitas*, porque deste modo a equação ficará reduzida á outra.

A não ser assim, as *incognitas* x e y serão muito mais indeterminadas: porque fixando a b e c, ellas comportarão uma infinidade de valores, o que significa ter a equação considerada um numero infinito de soluções, como succede, por exemplo, em

$$ax + by = c$$

Com effeito, subtrahindo by a ambos os membros desta equação, ella tomará a forma

$$ax = c - by$$

onde se observa que attribuindo a y todos os valores imaginaveis, que são em numero infinito, resultarão outros tantos para x.

Em resumo, vê-se neste caso que uma das *incognitas* póde variar arbitrariamente, ficando as variações da outra dependentes della, desde que os *dados* sejam fixados, isto é, se tornem *constantes*. Nestas condições, é aqui que surge verdadeiramente a necessidade da distincção entre

as *constantes* e as *variaveis* e o contraste entre a *variavel independente* e a *variavel dependente*.

Mas, além disso, apparece tambem aqui a distincção entre o *calculo determinado* e o *calculo indeterminado*. Porquanto, torna-se evidente que um problema expresso por uma equação a uma *incognita* é por sua natureza *determinado*, isto é, comporta um numero determinado de soluções; ao passo que o problema que for traduzido por uma equação a duas *incognitas* será *indeterminado*, pois que, como vimos, o calculo lhe dá uma infinidade de soluções.

3º. Si suppuzermos agora o caso de uma equação a tres incognitas, a determinação destas é ainda maior.

Consideremos, por exemplo, a equação

$$ax + by + cz = d;$$

pondo-a sob a forma

$$ax + by = d - cz$$

e suppondo z *constante*, é claro que a indeterminação é comparavel á do caso precedente. Porque representando

$$d - cz$$

por d', a equação

$$ax + by = d'$$

poderá ser transformada em

$$ax = d' - by$$

Ora, attribuindo a y todos os valores imaginaveis, que são em numero infinito, x receberia outros tantos, desde que tivessemos fixados os valores de a, b e d'.

Mas, sendo z uma outra variavel independente, é obvio que lhe poderiamos attribuir tambem uma infinidade de valores, de sorte que augmentariam em proporção os valores correspondentes de x.

Em resumo, o gráo de indeterminação é aqui maior que no caso precedente, e é facil de ver que augmentará

progressivamente á medida que crescer o numero de *incognitas*.

Emfim, veremos mais adiante que a solução de um problema qualquer é tanto mais indeterminada quanto maior é o numero de variaveis da equação que o traduz. Porque qualquer destas variaveis depende sempre das restantes que indicam, assim, o gráo de indeterminação.

89 — Ligada, a principio, ás *equações isoladas*, a idéa de indeterminação estendeu-se por fim ás *equações simultaneas*, isto é, aquellas que, traduzindo ou não um facto concreto, comportam as mesmas soluções para as respectivas incognitas, formando assim o que se chama um *systema de equações*.

Neste caso, si as equações não são arbitrarias, isto é, si traduzem realmente um problema qualquer, será este *indeterminado*, caso o numero de equações seja inferior ao de incognitas. Mas tornar-se-á gradativamente determinado á medida que se lhe forem accumulando outras equações compativeis, ficando por fim inteiramente *determinado* quando o numero total de equações for igual ao das *incognitas*.

E' assim, por exemplo, que o systema

$$\begin{cases} ax + by + cz + du = e \\ a'x + b'y + c'z + d'u = e' \end{cases}$$

é indeterminado, e sua indeterminação é do 2º gráo, porque 2 é o excesso do numero de variaveis sobre o de equações. Mas a indeterminação decrescerá, juxtapondo-lhe uma outra equação compativel, tomando-se por exemplo:

$$\begin{cases} ax + by + cz + du = e \\ a'x + b'y + c'z + d'u = e' \\ a''x + b''y + c''z + d''u = e''' \end{cases}$$

onde a indeterminação se reduz ao 1º gráo.

Ella desapparece emfim quando o systema se torna

$$\begin{cases} ax + by + cz + du = e \\ a'x + b'y + c'z + d'u = e' \\ a''x + b''y + c''z + d''u = e'' \\ a'''x + b'''y + c'''z + d'''u = e''' \end{cases}$$

A solução dos problemas desta especie exige que cada equação seja considerada de per si, o que permitte fazer arbitrariamente variar todas as incognitas, menos uma que lhes fica assim subordinada, emquanto que os dados se conservam fixos.

Vê-se, portanto, que a *determinação* se torna um caso particular das relações algebricas, geralmente caracterizadas pela *indeterminação*.

90 — INSTITUIÇÃO DA HARMONIA ENTRE O ABSTRACTO E O CONCRETO. — Dissemos que as qualificações de *dados* e *incognitas* devem ser habitualmente substituidas pelas de *constantes* e *variaveis*, que fixam directamente a attenção sobre o verdadeiro contraste algebrico, normalmente proprio a cada equação supposta isolada:

«Uma tal substituição não póde, entretanto, nos elevar á concepção fundamental do calculo das relações, sinão quando a apreciação concreta ahi completar o dominio abstracto. Sem tal complemento, a indeterminação em lugar de constituir o caso natural, pareceria artificialmente devida ao afastamento passageiro de uma parte das condições do problema; sempre determinado previamente.

E' preciso, pois, que a distincção geral entre as *variaveis* e as *constantes* se torne tão concreta como abstracta para adquirir toda a sua plenitude philosophica.

Não devemos admittir em algebra sinão as noções fundamentaes igualmente ligadas a suas duas fontes necessarias — a arithmetica e a geometria — cuja união ella deve instituir.

Ora, esta condição não podia ser aqui preenchida antes que o Positivismo tivesse directamente systematisado a harmonia universal entre o abstracto e o concreto.

Uma vez que a algebra seria hypotheticamente applicavel a todos os dominios encyclopedicos, é preciso que a sua concepção a mais fundamental possa naturalmente convir a grandezas quaesquer. Sua restricção normal aos casos geometricos e mecanicos não resulta sinão da impossibilidade de instituir ou de elaborar as equações proprias aos phenomenos mais complicados.» (13 b).

91 — A NOÇÃO DE LEI COMPARADA Á DE EQUAÇÃO: CONTRASTE ENTRE AS VARIAVEIS E AS CONSTANTES NA CONCEPÇÃO DA LEI; CONCLUSÃO.—Para estabelecer esta comparação, lembremos a principio que a *razão abstracta* se compõe de duas ordens de elementos, a saber: as propriedades abstractas propriamente ditas e as relações que as ligam, isto é, as *leis* (13 c.)

Assim, por exemplo, as noções de linha, de superficie, de volume, de côr, de sensibilidade, etc., são propriedades abstractas que nossa intelligencia separa dos diversos phenomenos que os seres nos apresentam, e que a linguagem consolida tornando possiveis nossas meditações sobre ellas.

Quando, além disso, se considera e se determina pela observação o modo de variação regular entre duas propriedades abstractas, obtêm-se leis inductivas, donde si pódem tirar outras por deducção.

Assim, por exemplo, quando entre a noção abstracta de superficie espherica e a noção abstracta de raio, Archimedes estabeleceu uma relação precisa, obteve-se a lei que liga os dois phenomenos.

(13 b) A. Comte, — *Synthèse Subjective.* — Chap. II.

(13 c). E' claro que nos referimos ás *leis naturaes*; as *leis artificiaes* instituidas pelos governos (ordenação dos antigos) devem resultar daquellas no dominio sociologico.

Attentamente considerada, a ideia de lei apresenta-se sob duas formas muito distinctas, si bem que no fundo equivalentes.

Na primeira apparece como a *dependencia regular de um phenomeno relativamente a um outro*, ou melhor — como a *medida segundo a qual as variações de um phenomeno sãó directameute governadas pelas variações de outro.*

Quando é possivel indicar algebricamente a relação dos dois phenomenos, obtém-se a respectiva equação, que é, portanto, a traducção numerica da lei. Deve-se então considerar como *variavel independente* o phenomeno que varia ou que se póde fazer variar *arbitrariamente*, e como *variavel dependente* aquelle cujas variações proprias são subordinadas ás do outro.

Tomando, por exemplo, a lei acima citada, podemos exprimil-a em geometria pela equação $S=4\pi r^2$, onde a *variavel independente* é o raio r, visto como a medida que elle varia faz variar tambem a superficie da esphera numa proporção sempre igual, e a *variavel dependente* é a superficie S que acompanha as variações do raio.

Os papeis ficam invertidos no caso em que se determina a grandeza do raio da esphera por meio da de sua superficie; mas a relação, isto é, a *lei* que os liga, continúa a ser a mesma. De sorte que, neste caso, fazendo variar arbitrariamente a *superficie*, o raio variará na mesma proporção.

Note-se de passagem que na maioria dos casos não nos é dado modificar as *variaveis independentes* das leis naturaes, e por conseguinte, as *variaveis dependentes*. Porque só o geometra póde modificar uma circumferencia ou uma esphera, fazendo variar o raio, só o engenheiro augmenta ou diminue a extensão de um corpo, augmentando ou diminuindo sua temperatura; na maioria dos casos não é possivel a nossa intervenção, mesmo quando a lei é rigorosamente conhecida.

Ninguem, por exemplo, pensará em modificar a posição do Sol em relação a Terra, nem inclinar o eixo desta, etc.; de sorte que, quasi sempre, só nos resta nos resignarmos á fatalidade das leis naturaes.

Além disso, um phenomeno póde depender de muitos outros, o que significa que a variavel dependente está subordinada a muitas variaveis independentes, e é o que se verifica á medida que se avança para os phenomenos superiores. O mais simples destes, acha-se sob a dependencia de uma multidão de outros, como acontece, por exemplo, no dominio da Sociologia e da Moral.

Ahi, cada acontecimento depende quasi sempre de todos os que o precedem na escala scientifica, donde resulta geralmente sua complicação e, portanto, a impossibilidade de previsões. Porque o espirito humano jamais consegue apprehender de uma só vez a resultante das relações que ligam um phenomeno a muitos outros.

Todavia, decompondo os casos complexos em casos mais simples, elle chega muitas vezes ao resultado, ligando sómente, a principio, duas variaveis para depois considerar cada uma das outras, que havia supposto constantes.

E' o que se fez, por exemplo, em geometria para determinar o volume de um *prisma* por meio da sua *altura* e das duas dimensões da *base*.

Si o problema fosse abordado considerando directamente estas tres variaveis, não seria certamente resolvido. Mas, suppondo constantes as duas dimensões da base, e, portanto, esta, poude-se então comparar dois prismas da mesma base e de alturas diversas para apprehender a relação entre estas duas variaveis.

Reciprocamente, para calcular a influencia da base, comparam-se prismas da mesma altura e de bases differentes, ligando-se emfim as variaveis destas.

Com mais forte razão este mesmo processo foi necessariamente applicado ao estudo dos phenomenos superio-

res. Mas, á medida que estes se complicam, o numero de variaveis independentes vae augmentando, de sorte que, não podendo obter a resultante de todas, nos resignamos a ligar as mais importantes á variavel dependente.

E note-se que essa complexidade se aggrava ainda, porque as variaveis podem ser de natureza e mesmo de ordens diversas, como acontece, por exemplo, em qualquer phenomeno sociologico em que se fazem sentir quasi sempre influencias biologicas, chimicas, physicas, etc.

Para completar esta apreciação, observemos que, além das variaveis, existe sempre na noção de lei um elemento especial, concreto, experimental, estreitamente ligado a ellas e que se denomina *constante*.

Nas applicações não basta que se conheça o modo regular de variação dos phenomenos; é preciso ainda determinar a intensidade dessas variações, e para isso conhecer tambem o elemento que fica constante e que só póde ser fornecido pela observação.

Por exemplo, para determinar a grandeza de uma *circumferencia* ou de um *raio*, não basta saber que existe entre ambos uma relação fixa, é necessario ainda conhecer a quantidade precisa pela qual se deve multiplicar o raio para ter a circumferencia, ou dividir a circumferencia para ter o raio.

Essa quantidade que não varia e que influe sobre todas as variações, é precisamente *constante*.

Tomemos ainda, para exemplo, a lei de Gallileu sobre a queda dos corpos. Ella nos ensina que o *espaço* percorrido varia com o quadrado do *tempo*. Mas isto não basta por si só, é preciso determinar ainda qual é o espaço percorrido em uma certa unidade de tempo.

Ora, sabemos que este espaço não é exactamente o mesmo nas differentes partes da Terra e isto explica como, para um tempo dado, o espaço percorrido por um corpo pesado não é o mesmo naquelles pontos, ainda que a lei se verifique em cada um delles com perfeita exactidão.

O espaço percorrido numa certa unidade de tempo e que varia para cada ponto do globo, é aqui a *constante* que é mistér achar por experiencia *(13 d)*, quando se trata de applicar a lei.

O contraste entre as variaveis e a constante sobresahe principalmente quando a lei se reveste da sua segunda fórma que consiste em *achar a constancia no meio da variedade*. Entretanto, esta segunda definição da lei é no fundo identica á primeira, se bem que ella não lhe seja sempre reductivel e corresponda a casos em que a primeira fórma é quasi sempre inapplicavel.

Para mostrar a equivalencia das duas fórmas, tomemos a lei geometrica: *a circumferencia varia proporcionalmente ao raio*, ou $C = 2\pi R$. Este modo de apresentar a lei está conforme a primeira definição; a circumferencia é a *variavel dependente* e o raio a *variavel independente*.

Sob a segunda definição, enunciariamos a lei dizendo que *a relação entre a circumferencia e o raio é uma quantidade constante*, ou $\frac{C}{R} = 2\pi = 2 \times 3{,}14159\ldots$, e qualquer que seja o raio, bastará multiplical-o por este numero para obter o comprimento da circumferencia.

Temos outro exemplo da segunda fórma na primeira lei de Thales: *a somma dos angulos de um triangulo qualquer é igual a dois angulos rectos*, o que exprime perfeitamente a constancia apprehendida no meio da variedade.

Para fazer entrar esta fórma na precedente, basta enuncial-a dizendo: *em todo triangulo um angulo qualquer é igual á differença que existe entre dois angulos rectos e a somma dos dois outros angulos*, isto é, $A = 2r - (B + C)$.

As duas fórmas que temos indicado correspondem a uma verdadeira distincção entre as *leis*. Estas são, com effeito, de duas especies — de *successão* e de *semelhança* — e referem-se áquellas fórmas.

A' primeira forma — *relação estabelecida entre duas variaveis* — correspondem principalmente as leis de suc-

cessão; á segunda — *constancia na variedade* — as leis de semelhança.

Note-se que as verdadeiras leis, as leis propriamente ditas, são as de *successão*; é a ellas que a noção de lei se applica em toda sua plenitude. As outras, em geral, as preparam ou as completam, sem as substituir.

Na maioria dos casos, a lei de semelhança não permitte, como a lei de successão, nem *prever* nem *prover* directamente; porém, ella presta o inapreciavel serviço de reduzir a leis de successão conhecidas muitos phenomenos que a primeira vista parecem não lhes pertencer. De sorte que existe uma verdadeira harmonia entre as duas especies de lei.

De resto, é facil de reconhecer que estendida a todas as ordens de phenomenos, a noção de lei vae perdendo a nitidez e precisão que possue no dominio mathematico. A' medida que os phenomenos se complicam, as relações que os ligam vão se tornando mais indeterminadas e mais vagas.

A lei só attinge seu estado de perfeição em mathematica, porque somente ahi é possivel medir os phenomenos, isto é, achar sua relação com uma grandeza precisa, tomada para unidade.

Em uma palavra, a lei torna-se então numerica e a *equação* é essencialmente destinada a represental-a. No seu caso mais simples, a equação que a traduz contém apenas uma *constante* e duas *variaveis*, crescendo o numero destas a medida que augmenta sua complexidade.

E como vimos que em todos os casos ha necessidade da coexistencia das constantes e das variaveis para que a lei seja sufficientemente definida, é necessario que a sua equação as contenha tambem. De sorte que a distincção entre as *constantes* e as *variaveis* emana directamente da noção de lei, tornando-se assim tão abstracta, quanto concreta.

Emfim, devemos concluir as considerações preceden-

tes, observando que tanto as *variaveis* como as *constantes* devem ser submettidas uniformemente ao calculo algebrico, sem nenhuma distincção quanto aos seus valores, afim de não perturbar a elaboração de suas mutuas relações com a vã consideração dos estados respectivos,

Para as *variaveis* devem ser admittidos todos os valores que as equações no calculo lhes podem dar, por mais extranhas que pareçam sob o aspecto numerico as combinações assim formadas. De outro modo seriamos forçados a introduzir distincções e restricções cada vez mais multiplicadas, que desde logo se tornariam radicalmente incompativeis com o dominio da algebra.

Para as *constantes*, é preciso extenter de modo systematico a mesma generalidade numerica espontaneamente admittida para as *variaveis*.

Veremos que se pódem approximar directamente esses dois aspectos da grandeza indeterminada, considerando toda constante como uma potencia nulla de cada variavel independente; de sorte que depois de haver admittido os expoentes subtractivos, a algebra é conduzida aos expoentes nullos, que aliás comportam a mesma origem.

Todas as distincções ou restricções numericas que se pretender introduzir algebricamente, tanto para as *constantes* como para as *variaveis*, seriam igualmente contrarias ao espirito do calculo das relações.

Ellas tornar-se-iam mesmo, num caso como no outro, directamente incompativeis com a avaliação final das fórmulas algebricas, onde os resultados os mais normaes podem muitas vezes provir dos elementos os mais excepcionaes.

A arithmetica já nos dá o primeiro exemplo da generalização numerica, combinando os numeros *fraccionarios* do mesmo modo que os *inteiros*, e estendendo as mesmas combinações até os *incommensuraveis*.

Assim tambem na algebra devemos tratar dos valores *subtractivos*, *nullos*, *infinitos* e mesmo *imaginarios*, do

mesmo modo que outros quaesquer. Apenas é preciso que por fim se examinem quaes os motivos de sua admissão ou rejeição, que aliás se podem applicar tambem, nos resultados do calculo, a todas as hypotheses numericas sobre seus elementos.

«A cultura isolada da algebra nos leva muitas vezes a resolver equações que, formuladas de modo arbitrario ou provindas inopinadamente de combinações espontaneas, se acham por excepção desprovidas de um verdadeiro sentido.

Em relação a essas anomalias, as transformações algebricas não devem experimentar nenhuma modificão, e toda a apreciação das diversidades se concentra sobre os resultados, como para o caso normal. Gradualmente elaboradas, taes relações acabam por manifestar sua natureza excepcional; e é nisto que consiste sua *resolução*, que não póde nunca exigir novas regras quando a composição algebrica fica a mesma.

Um estudo especial das equações finaes, onde cada membro é identicamente nullo, deve assim caracterizar a *insignificancia* e a *indeterminação*, igualmente annunciadas, avaliando as incognitas por meio de fracções, cujos dois termos são nullos. Estendida á anomalia opposta, a resolução conduz a constatar a *contradicção* e a *impossibilidade* pelo apparecimento de equações em que um dos membros se annula só, e o outro tem valores, ora infinitos, ora imaginarios, conforme o caso é preciso, ou vago».

§ 14

Sentido concreto das equações: lei da mudança de unidade ou da homogeneidade

92 — Estabelecendo o parellelo entre a noção de *lei* e de *equação*, temos visto no paragrapho precedente (91) que esta ultima deve ser considerada como a traducção numerica daquella, embora tal representação só exce-

pcionalmente possa tornar-se effectiva em virtude da extrema penuria da algebra.

Mas, para que uma tal comparação fique completa é necessario leval-a até o ponto de reconhecer quaes as condições a que deve satisfazer uma equação qualquer, quando exprime realmente uma lei. Semelhante complemento é de todo indispensavel para dirigir em geral a subordinação mathematica que deve sempre existir entre o abstracto e o concreto.

E' essa apreciação que devemos agora iniciar.

93. — As constantes e variaveis de uma equação qualquer exprimem grandezas numericamente definidas, e como taes referidas ás *unidades* que lhes servem de medida.

Si a equação que se considera traduz de facto uma lei, as quantidades constantes e variaveis estão naturalmente subordinadas á escolha da unidade concreta correspondente.

Chamamos a attenção para este ponto, porque a theoria que ora instituimos exige preliminarmente que se examine qual a influencia exercida sobre as equações, pela mudança das unidades empregadas na avaliação numerica das grandezas que encerram, constantes ou variaveis.

94. — Como a *lei* de um phenomeno qualquer, geometrico, mecanico, ou mesmo physico, deve ser traduzida rigorosamente pela equação que a representa, é claro que as quantidades que esta encerra só poderão experimentar mudanças simultaneas, quando estas não alterem de modo algum a sua significação concreta.

Entre as mudanças que de nenhum modo alteram a significação de um phenomeno, vamos examinar aquella que se póde fazer sobre a unidade empregada para a avaliação numerica das grandezas que elle encerra.

A observação mostra a este respeito que a *exactidão de toda a relação entre grandezas concretas quaesquer,*

é sempre independente do valor da unidade ou das unidades empregadas na sua avaliação numerica.

Tomemos um exempio. A geometria ensina que existe entre os tres lados de um triangulo rectangulo a seguinte relação: *o quadrado do maior dos lados* (denominado *hypothenusa), é igual á somma dos quadrados dos outros dois* (chamados *cathetos).*

Ora, é evidente que esta relação concreta tem sempre lugar, quer se avalie a grandeza dos lados em metros, quer em palmos, pollegadas, etc. Resulta immediatamente desta observação a possibilidade de mudar simultaneamente as unidades que medem as grandezas de um phenomeno qualquer, sem alterar a sua lei.

E como a equação não é mais que a traducção algebrica da lei, podemos concluir que a *equação que exprime a lei numerica de um phenomeno qualquer deve tambem gosar da propriedade de ficar inalteravel quando fizermos experimentar ás quantidades que ella encerra as variacões correspondentes á mudança das unidades adoptadas para medil-as.*

Appliquemos esta propriedade á lei geometrica acima mencionada.

A equação que a traduz, $h^2 = x^2 + y^2$, não se altera evidentemente quando mudarmos a unidade que houver sido empregada para medir os lados h, x e y do triangulo considerado.

Si tal unidade fosse o metro, por exemplo, e a mudassemos para o decametro, é evidente que isso importaria em dividir por 100 todos os termos daquella equação, que, portanto, não se alteraria. Reciprocamente, si a unidade fosse o decametro, e a substituissemos pelo metro, tudo se reduziria a multiplicar por 100 os mesmos termos, sem que a equação deixasse por isso de representar exactamente o mesmo facto concreto.

Vê-se por este simples exemplo, que embora a equação esteja subordinada á natureza da unidade adoptada, essa

subordinação apenas modifica a grandeza dos elementos que ella encerra, sem comtudo perturbar a relação que os liga. Si tal unidade se torna em geral *m* vezes maior, a grandeza dos elementos ficará *m* vezes menor, e vice-versa, mas a equação não deixará por isso de existir.

Das considerações precedentes podemos, pois, concluir que — *toda a equação que traduz um facto concreto mantem-se inalteravel quando multiplicarmos por um factor arbitrario as quantidades elementares que ella encerra.*

95 — O alcance logico e scientifico da propriedade que acabamos de enunciar torna-se evidente. Porque esta inalterabilidade das equações, que caracteriza tambem a relação concreta correspondente quando mudamos as unidades adoptadas para avaliação numerica das grandezas que encerra, tem por isso a grande importancia logica de mostrar-nos ainda uma vez a harmonia intima que deve sempre existir entre um facto concreto e sua expressão abstracta.

Mas, além disso, semelhante propriedade tem a importancia scientifica de caracterisar todas as equações que tiverem uma significação concreta. Ella nos mostra, com effeito, que si uma equação qualquer fica alterada quando multiplicamos as quantidades elementares que encerra por um factor arbitrario, devemos concluir desde logo que não traduz uma relação concreta.

96 — MEIO DE VERIFICAR A LEI NAS EQUAÇÕES ALGEBRICAS: HOMOGENEIDADE — Si a equação que traduz um facto concreto for algebrica propriamente dita, e como tal susceptivel de gráo, será preciso que todos os termos sejam do mesmo gráo ou, o que é o mesmo, seja ella *homogenea*.

Comprehende-se, com effeito, que assim deve ser, porque si os termos forem de gráos diversos, qualquer que seja a sua dissemelhança algebrica, elles ficarão differentemente alterados quando os multiplicarmos pelo mesmo factor arbitrario *m*: os termos do 1° gráo, encerrando uma

só quantidade, se acharão por isso multiplicados por m; os do 2º grão, contendo duas quantidades, ficarão multiplicados por $m \times m$ ou m^2; os do 3º, encerrando tres quantidades, fical-o-ão por $m \times m \times m$ ou m^3, e assim por diante.

Ora, desde que os termos da equação ficam multiplicados por quantidades differentes, é evidente que ella se alterará, e desde então não poderá representar lei alguma.

Sabemos, com effeito, que *um systema qualquer mantém sua constituição activa ou passiva quando todos os seus elementos experimentam mutações simultaneas, comtanto que lhes sejam exactamente communs* (11ª lei de Philosophia Primeira).

Si ao contrario forem todos os termos do mesmo grão, a introducção de um factor arbitrario m, torná-los á igualmente multiplicados, e a equação não será modificada.

Concluimos, pois, que *toda equação algebrica que exprime um facto concreto é necessariamente homogenea.* Esta consequencia, deduzida como se vê da propriedade geral que acima enunciamos quando applicada ás equações algebricas, constitue a proposição ordinariamente conhecida pelo nome de *theorema da homogeneidade.*

Comquanto convenha sómente ás equações algebricas propriamente ditas, o theorema da homogeneidade deu o seu nome á propriedade geral que lhe serve de base, a qual é por isso conhecida pelo nome de *lei da homogeneidade*, embora se applique a equações quaesquer, mesmo áquellas em que a noção algebrica de gráo não tem restricta applicação.

A esse respeito cumpre fazermos aqui algumas observações, afim de não haver engano no emprego desta lei.

Tratando-se mesmo de equações algebricas, cumpre distinguir o caso em que são da mesma especie todas as quantidades elementares que encerram, daquelle que são de especies differentes.

Para o primeiro caso, a lei applica-se immediatamente, conforme vimos acima. Para o segundo caso, ainda tem

ella applicação immediata; mas somente quando as quantidades heterogeneas forem de todo independentes umas das outras.

E' o que succede, por exemplo, na relação $y \operatorname{sen} B = x \operatorname{sen} A$, que a geometria indica entre os lados x e y e os senos dos angulos oppostos A e B de um triangulo qualquer: Neste caso as unidades respectivas sendo completamente independentes entre si, podemos mudar ora as de uma classe, ora as de outra, ou todas simultaneamente. Então, a lei da homogeneidade tem lugar á respeito das quantidades de uma classe somente, ou em relação ás da outra, ou emfim para todas.

A equação não devendo ser alterada em qualquer destas hypotheses, todos os seus termos são forçosamente do mesmo gráo algebrico.

Si, porém, as grandezas heterogeneas que entram na equação têm entre si relações determinadas pela natureza do facto concreto correspondente, será preciso ter em vista essa subordinação no modo de verificar a homogeneidade. Porque neste caso a equação não se manterá do mesmo gráo, si este for estimado segundo o uso puramente algebrico, isto é, pela simples enumeração uniforme de todos os factores componentes de cada termo: será preciso uma certa ponderação algebrica, derivada da ligação primitiva das unidades correspondentes.

Assim, por exemplo, quando se considerar a traducção algebrica de um phenomeno geometrico entre quantidades que exprimam respectivamente *comprimentos*, *areas e volumes*, será preciso ter em vista que as tres unidades correspondentes se acham necessariamente ligadas entre si, e de tal sorte que, segundo a subordinação estabelecida pela geometria, quando a primeira se tornar m vezes maior, a segunda ficará $m \times m$ ou m^2 vezes, e a terceira $m^2 \times m$ ou m^3 vezes.

Para maior clareza, tomemos á relação geometrica $V = Bh$, estabelecida entre o *volume* V, a *base* B e á *altura*

h de um *parallelepipedo* rectangulo. Si bem que estas tres quantidades sejam differentes, ellas estão ligadas entre si. A geometria nos mostra, com effeito, que a unidade de superficie é o *quadrado* e que a unidade de volume é o *cubo* da de comprimento. Tendo em vista esta relação, é claro que devemos considerar naquella equação o comprimento h como do 1º gráo, a superficie B como sendo do 2º e o volume V como do 3º. O producto Bh fica então sendo do 3º gráo, do mesmo modo que V, e nestas condições a equação é homogenea.

Concluimos, pois, que com uma tal ponderação, é sempre possivel verificar a homogeneidade das equações desta especie. Como ellas são algebricas, estima-se o gráo sommando-se os expoentes; mas, tendo préviamente o cuidado de dobrar aquelles que correspondem ás superficies e de triplicar os que se referem aos volumes.

Ainda que este modo de verificar a homogeneidade diffira do precedente, sua natureza igualmente determinada o torna evidentemente proprio a fornecer essas verificações nas leis algebricamente estabelecidas.

97 — Terminaremos a theoria da homogeneidade com duas observações importantes a respeito de sua applicação.

A primeira é que não se devem confundir as quantidades elementares constantes ou variaveis que em uma equação experimentam mudança sem alteral-a, com aquellas que exprimem simplesmente relações mutuas das grandezas consideradas.

As primeiras sendo necessariamente subordinadas á unidade respectiva, variam proporcionalmente ás variações desta, embora em sentido inverso, ao passo que as segundas ficam, ao contrario, inalteraveis. Porque exprimindo estas uma relação entre grandezas cuja unidade commum varia, acontece que os effeitos dessa variação se destroem mutuamente.

E' preciso, por conseguinte, na verificação da homo-

geneidade, nunca levar em conta certos numeros, muitas vezes indeterminados, mas que são verdadeiros coefficientes praticos.

Tomemos para exemplo a equação $e = vt$, que traduz em mecanica a relação existente entre o espaço e percorrido por um corpo dotado de movimento uniforme e o tempo t empregado no percurso. Ella deve ser considerada *homogenea* e do 1º gráo.

Apparentemente é certo que vt é do 2º gráo; mas as considerações precedentes nos levam a não incluir v na contagem do gráo, visto como v é um numero indeterminado que apenas exprime a relação entre o espaço total percorrido e o tempo empregado no percurso, ou o que é o mesmo, o espaço percorrido na unidade do tempo.

A segunda observação é tambem relativa ao facto de muitas vezes parecer que não existe *homogeneidade*, quando, entretanto, ella apenas se acha occulta.

Isto tem logar quando em uma relação entre quantidades da mesma especie, é uma dellas tomada para unidade.

E' claro então que esta quantidade sendo expressa pelo numero *1*, não é contada entre os factores que participam da estimação do gráo, em virtude do habito muito natural de se desprezar numericamente o factor *1*, quer como multiplicador, quer como divisor.

Ora, o gráo de cada termo que encerra a quantidade expressa por *1*, ficando assim alterado, e o gráo dos que a não encerram continuando a ser o mesmo, dahi resulta que a homogeneidade não existe apparentemente.

Entretanto, ella apparecerá desde que se leve em conta o factor *1*.

Mas, desde então perder-se-ão evidentemente todas as vantagens numericas que comporta uma tal escolha de unidade, sempre destinada a simplificar as formulas.

Todavia, segundo uma tal apreciação, é facil de sentir reciprocamente que partindo de uma equação assim alte-

rada, se póde revertel-a ao seu estado primitivo, usando do direito numerico de introduzir a vontade o multiplicador ou divisor *1*, de maneira a restabelecer o gráo de todos os termos, contando esse factor *1*.

De accordo com a lei da homogeneidade póde-se com effeito considerar este factor ou divisor *1* como um gráo commum, substituindo-o para maior clareza por uma lettra indeterminada, o que importa concretamente em deixar de escolher a unidade entre as grandezas da equação e adoptar uma outra.

Dissemos que as equações dessa especie são as que exprimem uma relação concreta entre grandezas, das quaes se toma uma para *unidade*.

Para termos um exemplo basta citar a lei trigonometrica que liga o *raio R* de um *arco* qualquer x ao seu seno e ao coseno, isto é, $R^2 = sen.^2 x + cos.^2 x$.

Tomando o raio para *unidade*, esta equação tem a ma $1 = sen.^2 x + cos.^2 x$, onde a homogeneidade parece existir, por serem do 2º gráo os termos de um dos membros e o outro apparentemente do 1º. Mas, como equivale ao quadrado de *1*, a homogeneidade póde ser estabelecida substituindo 1^2 por R^2.

98 — Eis em que consiste essencialmente a *theoria da homogeneidade*. A importante lei que a constitue podia ser plenamente apanhada desde quando Descartes (14ª)

14º) «René Descartes nasceu em La Haye (França) em 1596 e morreu em Stockholm em 1650. Suas obras principaes são o discurso sobre o Methodo e a Geometria. A primeira lhe assegurou logar eminente entre os philosophos modernos e a segunda lhe deu a gloria de ser o fundador da Geometria Algebrica. Nesta ultima obra elle reduziu o estudo das curvas ao das equações que as determinam, e ao mesmo tempo forneceu, inversamente, meios simples de substituir a apreciação das operações pela das curvas. E' sabido que toda a curva póde ser vista como gerada pelo movimento de um ponto sujeito a uma certa lei. Esta póde ser expressa de muitas maneiras equivalentes por condições que devem preencher dois elementos proprios a fixar a posição do ponto movel. Estes

ligou indissoluvelmente as concepções algebricas ao dominio geometrico e, portanto numerico. Entretanto, ella apenas foi confusamente entrevista e de um modo incompleto pelos successores immediatos do fundador da philosophia mathematica.

Foi Augusto Comte quem pela primeira vez a explicou directamente e com toda a generalidade no tomo primeiro de sua Philosophia Positiva, publicada em Paris em 1822, reproduzindo-a depois na sua Geometria Analytica.

§ 15

Distincção das relações algebricas em directas e indirectas, donde divisão geral do calculo das relações

99 — Depois de haver definido as *relações algebricas* e indicado qual a fórma que melhor lhes convém, estudamos os elementos constitutivos de cada um destes agrupamentos numericos, fazendo sobresahir a distincção fundamental entre as *constantes* e as *variaveis* intimamente ligadas á noção concreta de *lei*.

...os *coordenadas* do ponto, variam ra... ...ma curva a outra, e são natu... In... ...opria definição da curva. Descartes independente de seu modo de geração. A simplicidade deste ...rdenadas commum a todas as curvas, systema fez com que os processos especiaes da antiga geometria fossem substituidos por processos geraes communs a todas as curvas, desde então representadas pelas suas equações. Por este modo, a mathematica conseguiu uma ligação mais intima entre a parte abstracta e a concreta. Dahi resultou o aperfeiçoamento da geometria pelo calculo e, por uma reacção inversa, a elevação deste ultimo a um dominio mais transcendente, permittindo que a medida da extensão e o estudo do movimento abordassem problemas que pareciam insoluveis. Além de sua constituição definitiva, como elemento coordenador do dominio mathematico, a algebra deve especialmente a Descartes notações mais simples, *o fecundo methodo dos coefficientes indeterminados*, o primeiro esboço da theoria das raizes eguaes, a celebre e util regra dos signaes que têm o seu nome, etc.»

Descartes

Mas, semelhante estudo não ficará completo si não apreciarmos as duas especies de relações algebricas necessarias á traducção das leis dos phenomenos, a saber: as relações *directas* e *indirectas*, cuja consideração separada determinou a divisão geral do calculo algebrico.

100 — EQUAÇÕES INDIRECTAS: IMPOSSIBILIDADE DE INSTITUIR NA MAIORIA DOS CASOS AS RELAÇÕES DIRECTAS ENTRE AS VARIAVEIS E AS CONSTANTES; NECESSIDADE DO CALCULO TRANSCENDENTE. — Si fosse sempre possivel instituir directamente a relação precisa entre as *variaveis* e as *constantes*, a algebra se limitaria á resolução propriamente dita das differentes equações assim formadas.

Mas, são taes as difficuldades que a esse respeito apresenta a subordinação do abstracto ao concreto, que semelhante condição só é realizavel nos casos mais simples das questões verdadeiramente accessiveis ao dominio do calculo.

Foi o sentimento espontaneo de tal impossibilidade que levou a geometria antiga a não tentar estender ás figuras curvilineas as medidas realizadas para as fórmas rectilineas, senão reduzindo aquellas a estas, mediante a substituição das curvas por linhas polygonaes regulares, de lados rectilineos infinitamente pequenos.

Reduzidas assim a seus elementos, todas as questões semelhantes tendem necessariamente a coincidir, o que permitte desde logo que os casos mais complicados possam entrar nos mais simples.

Depois de haver reconhecido esta lei mental, a principio em geometria e depois em mecanica, Augusto Comte lhe deu indirectamente toda a generalidade de que é susceptivel, fazendo-a emanar deductivamente da philosophia primeira (1ª lei). Della resulta immediatamente a necessidade de decompormos cada questão concreta em duas partes successivas, uma em que se estabelece a relação entre as grandezas primitivas e os elementos artificialmente introduzidos para ligal-as, a outra com o fim de fazer a pas-

sagem da *relação indirecta* assim obtida para a *relação directa* das grandezas consideradas.

Para esta segunda phase do trabalho logico, é que foi instituida a *algebra transcendente*, essencialmente destinada a systematisar a eliminação final das grandezas auxiliares primitivamente introduzidas.

Feita uma tal eliminação, compete á *algebra elementar* a resolução da equação directa, finalmente obtida.

Vê-se, por consequencia, a necessidade de considerar o calculo das relações como formado de dois ramos distinctos, a saber: *o calculo das relações directas* ou *a algebra elementar e o calculo das relações indirectas* ou *a algebra transcendente*.

101 — Si o dominio do calculo ficasse reduzido simplesmente á algebra isolada ou elementar, elle comportaria pouca efficacia concreta, não só pela impossibilidade de resolver verdadeiramente a maior parte das equações, mas sobretudo pela sua fraca aptidão em estabelecel-as, em virtude do pequeno numero de *formações* elementares de que dispõe para representar os phenomenos naturaes.

Com effeito, sabemos que a traducção algebrica de um phenomeno exige naturalmente que se comparem as grandezas que nelle figuram sob o ponto de vista da quantidade, afim de determinar suas relações mutuas.

Ora, não sendo possivel na maioria dos casos estabelecer *directamente* taes relações, o unico recurso de que dispomos consiste em recorrer a relações *indirectas*, isto é, em substituir as grandezas consideradas por outras auxiliares, mais simples e dependentes dellas, que uma vez ligadas entre si, nos permittam chegar á relação entre as primeiras.

A instituição das *relações indirectas* é, pois, um complemento indispensavel ao dominio do calculo das relações, afim de que possa este abraçar uma infinidade de leis concretas que lhes seriam directamente inaccessiveis.

102 — Considerada successivamente sob os dois aspectos que comporta, a noção systematica de lei nos faz directamente sentir as duas especies de relações algebricas, *directas* e *indirectas*. Porque sob o seu primeiro aspecto — isto é, como a *dependencia regular de um phenomeno em relação a um outro, ou melhor como a medida segundo a qual as variações de um phenomeno são directamente governadas pelas variações de um outro* — a noção de lei nos dá a ideia de uma relação immediata ou *directa*, estabelecida entre duas variaveis; ao passo que sob o segundo aspecto — *constancia na variedade* — não nos deixa vêr na maioria dos casos nenhuma relação directa.

Dahi é que resulta a necessidade de elaborar em mathematica as *leis* de *semelhança* reduzindo-as, sempre que for possivel, a leis de successão, e por isso é que dissemos que as leis de semelhança preparam e completam as leis de successão, as quaes não podem se substituir. Ellas a preparam quando podem ser reduzidas a uma lei de successão; a completam quando permittem assimilar uma lei de successão á outra já conhecida.

Foi, por exemplo, uma lei de *semelhança* a que descobriu Newton quando assimilou a lei de *gravitação* á da *gravidade*, já descoberta por Galileu, fazendo assim depender esta lei de successão de uma outra mais geral.

Foi ainda uma lei de semelhança aquella pela qual Lavoisier fez entrar o phenomeno da *combustão* em outro mais geral, relativo á *combinação chimica* dos corpos.

Emfim, a lei de semelhança só permitte *prever* ou *provêr*, como a lei de successão, quando é reductivel a esta; mas, conforme dissemos, tem a vantagem de reduzir ao dominio de *leis* de *successão* conhecidas, muitos phenomenos apparentemente diversos, completando assim as mesma leis.

Essas considerações nos deixam vêr que a decomposição geral do calculo das relações finaes seria impossivel

sob uma cultura permanente abstracta do dominio mathematico. E', com effeito, ao impulso concreto, sobretudo geometrico, que se deve attribuir semelhante divisão.

103 — A instituição do calculo transcendente foi de facto a consequencia inevitavel e o complemento necessario da regeneração cartesiana da Geometria.

Para reconhecer semelhante filiação basta considerar estes estudos sob o ponto de vista historico.

Desde Archimedes que os antigos geometras têm empregado o *methodo infinitesimal* com o fim de reduzir as medidas curvilineas ás rectilineas. Até Descartes, porém, este methodo só foi applicado de uma maneira irregular e mais ou menos particularisada a cada caso: obtidas as *equações indirectas* por processos especiaes, dellas deduziam-se as *equações directas*, mediante transformações que não eram uniformes nem systematicas.

Comprehende-se que assim deveria ser, porque o estudo especial da geometria antiga, não permittindo descobrir propriedades communs a todas ás curvas e, portanto, ás equações que as representam, impossibilitava a applicação uniforme de qualquer processo commum á todas. Era, pois, indispensavel que os estudos geometricos adquirissem toda generalidade para preparar o advento de uma concepção geral e systematica.

Por isso foi sómente depois da fundação da moderna geometria por Descartes que poude ter lugar a instituição do calculo transcendente. A fundação deste calculo é devida a Leibnitz, cabendo a Fermat, Huyghens, Cavalieri e Wallis partilha da gloria por haverem sido, depois de Descartes, os percursores immediatos do geometra allemão. (15 a).

(15 a) Leibniz e não Leibnitz, (Godofredo Guilherme), nasceu em Leipzig em 1646 e morreu em 1716. Dotado de uma memoria prodigiosa e de espirito encyclopedico elle escreveu sobre assumptos variados. Os seus grandes trabalhos mathematicos datam de 1684. No numero de outubro das *Actas* de Leipzig publicou a sua immor-

104 — Restringindo sua descoberta ao aperfeiçoamento do conjuncto da geometria e da mecanica, o fundador do calculo transcendente absteve-se com sabedoria de lhe attribuir um caracter deductivo.

Desprezando os ataques dos seus adversarios contra a exactidão do seu methodo, elle presentiu que as applicações posteriores viriam confirmar plenamente a sua racionalidade e evidenciar seu caracter inductivo.

Afastando toda a pretenção a uma verdade absoluta, reconheceremos mais tarde que um tal methodo é eminentemente proprio a facilitar ao mesmo tempo a extensão e a ligação das doutrinas correspondentes, introduzindo grandezas mais simples e mais uniformes.

A este systema de grandezas auxiliares foram applicadas successivamente diversas concepções geraes, sobresahindo entre estas as de Newton e de Lagrange. Mas nenhuma dellas é plenamente satisfactoria, ainda que cada

---

tal memoria onde se acham as bases do calculo infinitesimal. — *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus* — etc. Além da differenciação das funcções explicitas, dá ahi um primeiro exemplo dos recursos offerecidos por seo methodo. Pouco tempo depois elle expunha os principios do *calculo integral* num outro escripto intitulado : *De Geometria recondita et analyse indivisibilium atque incognitorum*. No mesmo anno propoz aos cartesianos o problema da *isochrona*, que resolveu em 1686, quando Huyghens já achára a solução. Em 1690 resolvia o problema da catenaria, proposto por Jacques Bernouille. A partir de 1698, a proposito do solido de menor resistencia, da *brachystochrona*, começa a sua celebre controversia com Newton, que tendo pleno conhecimento de haver o seu contedor descoberto o methodo infinitesimal ao mesmo tempo que elle creara o dos *limites (methodo das fluxões e das fluentes)* não o quiz confessar, talvez para attrahir a si toda a gloria do invento. Em 1697 elle expoz o seu methodo de differenciação *(de curvam in curvam)* para resolver o problema da *curva synchrona* fazendo com que João Bernouille, transportado de admiração, lhe escrevesse estas palavras : «O Deus da geometria vos admittiu antes de mim no seu santuario». Taes são os titulos que asseguram ao eminente philosopho allemão a incontestavel gloria da creação do calculo infinitesimal.

uma offereça preciosas qualidades que serão especialmente apreciadas na geometria transcendente a cujo estudo se incorporou o novo calculo como indispensavel preambulo abstracto.

105 — Tal é o espirito geral da construcção leibniziana. Sem ella o calculo das relações ficaria reduzido ao seu dominio elementar e comportaria assim pouca efficacia concreta, em virtude da raridade das equações susceptiveis de uma verdadeira resolução e tambem de sua fraca aptidão em representar os phenomenos naturaes.

Ao contrario, com o auxilio do *calculo transcendente* póde a algebra abraçar muitas leis concretas, que não poderia directamente exprimir.

Comquanto essa transformação só excepcionalmente seja realisada, isto basta para que os poucos recursos do *calculo elementar* possam realmente convir a muitos casos que seriam inabordaveis sem o *calculo transcendente*.

Estando caracterisadas as duas partes principaes em que se divide a algebra, isto é a *algebra directa* ou *elementar* e a *algebra indirecta* ou *transcendente*, só nos resta accrescentar que ha uma outra intermediaria, denominada *algebra superior*. Esta, porém, é apenas um supplemento arithmetico á resolução geral das equações.

Não se podendo effectuar algebricamente tal resolução além do 4º gráo, instituiram-se processos especiaes para obtel-a approximadamente, substituio-se assim a *resolução algebrica* pela *resolução numerica*. Como, porém, esta ultima não poude avaliar todas as especies de raizes sem as reacções da geometria moderna, deve-se estudal-a como um *complemento algebrico* desta geometria (15 b);

(15 b) Antes de impellir o calculo das relações do caso directo ao caso indirecto, a geometria cartesiana reagiu sobre elle de maneira a preparar uma tal regeneração, fazendo surgir desde logo disposições mais geraes, ainda que dirigidas sempre para a reso-

de sorte que somente a algebra elementar deve ser apreciada isoladamente.

Só nos resta indicar, depois de haver estudado o preambulo geral do calculo das relações, qual o plano a seguir-se na *coordenação especial* da sua parte mais elementar.

Adoptando até aqui a mesma marcha seguida na arithmetica, consagramos cinco capitulos ás duas primeiras partes deste livro, com o fim de apreciar nos dois primeiros o objecto, o dominio e a linguagem da algebra, e nos tres seguintes, a sua instituição fundamental e os dois complementos desta, relativos ás diversas especies de relações algebricas e á lei da homogeneidade que permitte verificar o seu sentido concreto.

Depois desta preparação commum a todos os ramos da algebra, o estudo elementar da algebra isolada será coordenado nos nove capitulos que formam a terceira parte deste livro. Elaborando no primeiro as equações mais simples, trataremos ahi seguidamente de sua reso-

---

lução das equações. Suscitando uma transição necessaria entre a *algebra elementar* e a *algebra transcendente*, esta *algebra superior* deve normalmente succeder ao primeiro esboço da geometria geral, assimilando assim a iniciação individual á evolução collectiva. A. Comte. — Synth. Subject. — Chap. IV. «Racionalmente apreciada, a ideia de lei, donde resulta a de *equação*, suppõe a simultaneidade de suas variaveis, cujos diversos estados manifestam uma relação constante. E' preciso, pois, olhar o principio cartesiano (*representação das curvas por equações e vice-versa)* como tendo instituido o verdadeiro dominio da algebra, destinando-a a fornecer methodos geraes á geometria, onde as equações são espontaneamente concebidas a duas variaveis. Todas as especulações para uma só incognita lembram a origem arithmetica, que fornece a algebra uma base muito estreita, finalmente subordinada á sua fonte geometrica, ligando o caso particular ao geral por uma eliminação real ou ficticia. Deve-se normalmente considerar as doutrinas puramente abstractas como unicamente destinadas á completar a solução das questões concretas, quando fôr preciso impellil-a até as avaliações. Sob este aspecto um tal complemento (algebra superior) fica scientificamente necessario, e sua instituição torna-se logicamente util á preparação directa do principal dominio algebrico.»

lução directa, quando ha apenas uma incognita, a da eliminação que reduz a este caso o de muitas incognitas.

Nos dois capitulos seguintes nos occuparemos successivamente da transformação das expressões algebricas, que completa e prepara, em certos casos, a resolução das equações: no primeiro da addição, subtracção, multiplicação, divisão e maximo divisor commum algebricos, e no segundo da pontenciação, radiciação algebrica e de sua reacção arithmetica.

O capitulo immediato será consagrado ainda a problemas sobre as equações de primeiro gráo, no caso, porém, em que o *calculo é indeterminado*.

Os dois capitulos seguintes são successivamente destinados á resolução geral das equações do 2º, 3º e 4º gráos, a uma incognita. O capitulo immediato será destinado a apreciar as progressões geometricas e os logarithmos, bem como a resolução das equações exponenciaes, que delles dependem.

No capitulo subsequente apreciamos a theoria geral das series e especialmente as series *exponencial* e *logarithmica*.

Emfim o ultimo capitulo será exclusivamente reservado ao resumo, juizo e resultado de todo o estudo da algebra elementar.

TERCEIRA PARTE

Coordenação especial da Algebra

CAPITULO VI

RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 1º GRÁO A UMA INCOGNITA; TRANSFORMAÇÃO DAS FORMULAS OBTIDAS

§ 16

Resolução das equações do 1º gráo a uma incognita

106 — «As questões mathematicas completas constam sempre de tres partes perfeitamente distinctas: o problema a que se tem em vista applicar o calculo, parte concreta; a equação obtidá e sua resolução, parte algebrica, e a avaliação final da fórmula resultante, parte arithmetica, constituindo estas duas ultimas a parte abstracta.

A natureza das relações que guardam entre si as diversas grandezas do problema e o numero das incognitas que se procuram determinar, têm como consequencia as equações de diversos gráos, a uma ou mais incognitas.»

O pequeno numero de formações elementares de que dispomos difficulta e impossibilita muitas vezes o estabelecimento destas equações, de sorte que a passagem do concreto para o abstracto sómente é conseguida nos casos mais simples.

Ainda mais, quando é possivel traduzir algebricamente as relações do problema, na maioria dos casos torna-se impossivel passal-as do estado implicito para o explicito, em que devem ser avaliadas.

Entretanto, os factos mais simples, especialmente os geometricos e mecanicos, podem ser traduzidos por uma ou mais equações, comportando estas uma solução geral por meio das transformações algebricas. No numero de taes equações estão as do primeiro gráo, isto é, as que apenas encerram a incognita na primeira potencia.

A theoria de que nos vamos occupar tem por objecto a resolução das equações algebricas do primeiro gráo, isto é, a transformação tendente a passal-as do estado implicito para o explicito.

Como taes equações podem conter uma ou mais incognitas, devemos distinguir o caso em que se procura determinar uma só incognita por meio das quantidades conhecidas, daquelle em que se tem em vista conhecer duas ou mais incognitas. No primeiro caso, o mais simples, a traducção algebrica da relação entre a incognita e os dados é expressa por uma só equação, que basta para determinal-a; e no segundo, mais complexo, devem existir, no minimo, tantas equações quantas incognitas, para que cada uma destas possa ser conhecida.

Nesta ultima hypothese, as relações podem ser expressas quer por um numero de equações igual ao de incognitas, e o calculo será *determinado*; quer por um numero de equações inferior ao de incognitas, e o calculo será *indeterminado*.

107 — Supponhamos em primeiro lugar o caso mais simples, isto é, o de uma equação do primeiro gráo a uma incognita. Por isso que temos definido a equação como sendo *a igualdade entre duas formações abstractas*, consideremos a igualdade,

$$Ax - B = A_1x - B_1$$

entre as formações implicitas e completas do primeiro grão

$$Ax - B \text{ e } A_1x - B_1.$$

As transformações que se devem effectuar sobre a igualdade entre estas duas formações implicitas do primeiro grão, com o fim de obter a formação explicita correspondente, baseam-se todas sobre o seguinte axioma: *uma igualdade não se altera quando ambos os seus membros soffrem modificações simultaneas, uma vez que estas lhes sejam exactamente communs.* (16 a).

Deste axioma deduz-se immediatamente as seguintes consequencias.

1.ª Sommando-se ou subtrahindo-se a ambos os membros de uma igualdade a mesma quantidade, ella não se altera;

2.ª Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os membros de uma igualdade pela mesma quantidade, ella não se altera;

3.ª Elevando-se á mesma potencia, ou extrahindo-se a raiz do mesmo indice a ambos os membros de uma igualdade, ella não se altera.

Nestas *consequencias* basea-se a transformação que permitte passar da igualdade entre as duas formações implicitas consideradas á formação explicita ou formula procurada. Semelhante transformação exige tres operações successivas que se denominam: *transposição, composição e isolamento.*

(16 a) Este axioma resulta immediatamente da 11ª lei da Philosophia Primeira. *Um systema qualquer mantem sua constituição activa ou passiva quando seus elementos soffrem modificações simultaneas uma vez que estas lhes sejam exactamente communs.*

Esta lei tem inteira applicação a todos os dominios. Uma equação constitue um verdadeiro systema de elementos abstractos e como tal deve achar-se subordinada á lei da *persistencia* acima enunciada. Em virtude desta subordinação, a grandeza dos elementos é modificada, mas o seu modo de dependencia é sempre o mesmo. (V. *Apont. de Arithmetica* — Introducção).

A primeira tem por objecto transpor os termos da igualdade entre as duas formações implicitas, de modo a transformal-a em uma outra cujo primeiro membro encerre somente termos affectos da incognita, e o segundo só se componha de termos conhecidos.

Ella basea-se na primeira das *consequencias* acima, e para effectual-a sommaremos, a principio, a ambos os membros da equação proposta,

$$Ax - B = A_1x - B_1$$

a quantidade B, o que dará:

$$Ax - B + B = A_1x - B_1 + B$$

ou

$$Ax = A_1x - B_1 + B.$$

Subtrahindo em seguida de ambos os membros desta igualdade a quantidade A_1x, teremos

$$Ax - A_1x = A_1x - B_1 + B - A_1x$$

ou

$$Ax - A_1x = B - B_1 \qquad (1)$$

Vê-se, portanto, que *para fazer a transposição dos termos de uma equação, basta passal-os de um membro para o outro com signal contrario.*

A segunda operação, que se denomina *composição*, consiste em compor ou reduzir os termos da igualdade obtida (1) de modo a dar-lhe a forma mais simples de que é susceptivel uma equação completa do primeiro gráo a uma incognita.

Para isso devemos reduzil-a a dois unicos termos, sendo um affecto da incognita com o expoente *1* e o outro constituido pelas quantidades conhecidas.

Ora, esse resultado será facilmente conseguido na expressão acima, multiplicando e dividindo ao mesmo tempo

por x, o seu primeiro membro, o que evidentemente a não altera.

Teremos assim

$$\left(\frac{Ax}{x} - \frac{A_1 x}{x}\right) x = B - B_1$$

ou

$$(A - A_1)\, x = B - B_1 \qquad (2)$$

Esta multiplicação e divisão simultaneas por meio das quaes se *põe a incognita em evidencia*, deverá ser praticada todas as vezes que a mesma incognita entrar em mais de um termo do primeiro membro, como acontece na equação (1).

Temos assim concluido a segunda operação denominada *composição*, na qual convirá supprimir os factores ou divisores communs que porventura existirem em ambos os termos da equação. Esta ficará reduzida a sua forma mais simples, porque si representarmos por a o coefficiente de x^1 e por b o coefficiente de x^0, isto é, si fizermos

$$A - A_1 = a \text{ e } B - B_1 = b,$$

a equação tomará com effeito a forma typica

$$ax = b \qquad (3)$$

Passemos emfim á terceira operação, que consiste, como dissemos, *no isolamento da incognita*.

Para effectual-a na expressão obtida (3) bastará dividir por a ambos os seus membros, o que a não altera em vista da *segunda consequencia*.

Resultará então

$$\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$$

ou

$$x = \frac{b}{a}.$$

Substituindo b e a pelas expressões respectivas, virá

$$x = \frac{B - B_1}{A - A_1} \qquad (4)$$

E' esta fórmula que exprime a incognita da equação proposta (1), por meio das quantidades conhecidas.

Em geral, toda expressão como esta, que, substituida em logar da incognita numa equação, torna o seu primeiro membro identico ao segundo, é o que se denomina *raiz da equação*. A equação proposta (1) acha-se, por conseguinte, resolvida, por isso que, na fórmula obtida (4), fica explicito o modo de dependencia que existe entre a incognita x e os dados B, B_1, A e A_1.

Quaesquer que sejam as hypotheses numericas que façamos sobre estas quantidades, vê-se facilmente que a expressão obtida (4) só fornece um unico valor para x, de sorte que a equação do 1° gráo a uma incognita admitte apenas uma *raiz*.

108. — Mostramos no quadro seguinte, para todas as hypotheses distinctas que podem ser feitas sobre as quantidades conhecidas A, A_1, B e B_1, as soluções que comporta a equação proposta.

Discussão da fórmula $x = \frac{B - B_1}{A - A_1}$

Hypothese sobre B	Hypothese sobre A	Solução da equação $(A - A_1)\,x = B - B_1$
$B \gtrless B_1$	$A \gtrless A_1$	$x =$ quantidade positiva
$B \gtrless B_1$	$A \lessgtr A_1$	$x =$ quantidade negativa
$B \gtrless B_1$	$A = A_1$	$x = \frac{b}{o} = \infty$
$B = B_1$	$A \gtrless A_1$	$x = 0$
$B = B_1$	$A = A_1$	$x = \frac{0}{0}$

As soluções dadas pelas duas primeiras hypotheses nada offerecem de extraordinario.

Ellas se distinguem entre si por traduzirem grandezas de signaes contrarios, isto é, susceptiveis de opposição de sentido.

Quanto á terceira hypothese, a interpretaremos facilmente, tendo em vista as considerações feitas no estudo da *formação quociente*.

A dependencia que existe entre o divisor e o quociente, já conhecida na Arithmetica, nos mostra que no caso de ser o dividendo constante, si o divisor decrescer indefinidamente, o quociente crescerá tambem indefinidamente.

Deste modo, á medida que o divisor se for approximando de zero, o quociente irá tendo um valor cada vez maior, o que leva o espirito a concebel-o como sendo infinitamente grande quando o divisor se annular.

Nestas condições a solução $x = \infty$ é tão legítima quanto as precedentes.

Assim, por exemplo, procurando-se determinar num plano a distancia do ponto de encontro de duas rectas a um outro tomado para origem, si achar-se para solução geometrica um resultado algebricamente expresso por aquelle symbolo, isto indicará que as duas rectas não se encontram, isto é, que são parallelas: solução tão normal e tão precisa como a que se obteria si houvesse um ponto de intersecção.

Na hypothese em que

$$x = \frac{0}{B - B_1},$$

fazendo

$$B - B_1 = m,$$

virá:

$$x = \frac{0}{m},$$

donde se deduz que $m \times x = 0$.

Esta igualdade nos mostra que x deve ser igual a zero, qualquer que seja o valor de m.

Aliás semelhante resultado é tambem uma consequencia da theoria da divisão, onde vemos que o quociente decresce proporcionalmente ao dividendo, tornando-se, portanto, nullo quando este o for.

Passemos, emfim, a hypothese em que

$$x = \frac{0}{0}$$

Dahi se deduz que $0 \times x = 0$; e porque esta igualdade se verifica para qualquer valor dado a x, devemos concluir que

$$\frac{0}{0}$$

é em geral o symbolo da *indeterminação*.

Por exemplo, si no problema acima, em que se procura determinar a distancia da intersecção de duas rectas ao ponto tomado por origem, a solução obtida for expressa por

$$\frac{0}{0},$$

ella indicará que existe uma infinidade de pontos de intersecção, isto é, que as duas rectas coincidem.

Vê-se assim que o symbolo

$$\frac{0}{0}$$

constitue uma solução tão legitima quanto as outras.

109. — Unicamente logica é a importancia da discussão que acaba de ser feita. Ella vem confirmar plenamente tudo aquillo que dissemos quando tratámos da generalisação algebrica. Isto é, que devemos considerar perfeitamente legitimas as expressões algebricas, por mais anormaes que pareçam quando encaradas sob o aspecto numerico.

Porque não só ellas se prestam ás mesmas transformações a que sujeitamos os resultados os mais normaes sob o ponto de vista arithmetico, como tambem porque comportam sempre uma interpretação racional.

Essa interpretação, porém, só deve ser dada depois de haver resolvido a questão que se tem em vista.

Então, um exame final dos resultados é que nos deve conduzir a adoptar ou não como soluções do problema as soluções obtidas para as equações, a respeito das quaes nenhuma outra consideração nos deve levar a estabelecer restricções. Ao contrario, as soluções do problema, si bem que possam ser as mesmas obtidas para a equação, podem, entretanto, ser em numero inferior, por causa das restricções impostas pela natureza da questão de que se trata.

Assim, por exemplo, si as quantidades não são susceptiveis de contagem em sentidos oppostos, ficam excluidas as soluções negativas da equação; si além disto, impõe-se a condição de ser inteiro o valor da incognita, ou si as grandezas procuradas não são susceptiveis de valores fraccionarios, ficarão excluidas neste caso as soluções fraccionarias da equação.

Vê-se, pois, que as soluções de um problema são sempre soluções da equação correspondente, ao passo que todas as soluções da equação nem sempre podem ser acceitas como soluções do problema.

Estas observações deixam-nos desde já perceber a vantagem que resulta de não se isolar completamente o estudo abstracto das relações, do dominio concreto, cuja influencia não só serve para esclarecer os factos singulares, como tambem para restringir os estudos algebricos sómente áquillo que convém ás nossas necessidades (16 b).

110. — Si em qualquer dos membros da equação proposta existirem combinações apenas indicadas, é mister effectual-as antes de fazer a *transposição* afim de desem-

---

(*16 b*) Moraes Rego — *Elementos de Algebra*.

baraçar os termos affectos da incognita dos que não a contém e podel-os *transpor* em seguida.

E' o que se verifica, por exemplo, na equação.

$$a(x-1) - b_1 = a_1x - a + b_1$$

Effectuando as multiplicações ahi indicadas, obtem-se

$$ax - a - b_1 = a_1x - a + b_1;$$

fazendo agora as transposições, tem-se

$$ax - a_1x = b + b_1$$

Procedendo á composição, ter-se-á

$$(a - a_1)\, x = b + b_1;$$

isolando finalmente a incoguita, chega-se á formula

$$x = \frac{b + b_1}{a - a_1}$$

Semelhantemente, quando houver termos fraccionarios e estiver a incognita no denominador, ou formar com outro termo o numerador, a transposição exige que que se dê logo a forma inteira á equação proposta.

E' o que se observa nas equações.

$$1 + \frac{a}{b} = \frac{b^2}{x} + 1 \text{ e } \frac{x-5}{10} = \frac{7 - 3x}{2}$$

Para dar á primeira a forma inteira, multiplicaremos ambos os membros por bx, que é o menor multiplo dos denominadores, obtendo assim, em virtude da *segunda consequencia*, a equação equivalente.

$$bx + \frac{abx}{b} = \frac{b^2x}{x} + bx;$$

effectuando as divisões indicadas, teremos

$$bx + ax = b^2 + bx;$$

fazendo agora a transposição, virá

$$bx + ax - bx = b^2$$

ou

$$ax = b^2$$

Não havendo neccessidade da composição, só nos resta isolar a incognita, o que dará

$$x = \frac{b^2}{a}$$

Procedamos do mesmo modo para resolver a segunda equação.

$$\frac{x - 5}{10} = \frac{7 - 3x}{2}$$

Teremos

$$x - 5 = 5\,(7 - 3x)$$

ou

$$x - 5 = 35 - 15x$$

Transpondo, virá

$$x + 15x = 35 + 5$$

ou

$$16x = 40;$$

isolando finalmente a incognita, teremos

$$x = \frac{40}{16} = 2\,\frac{1}{2}.$$

111. — A forma inteira deve igualmente ser dada ás equações, quando mesmo a transposição de seus termos parece não exigil-a á primeira vista.

Porque, affectando ellas a forma fraccionaria, não se poderá compol-as em muitos casos, sem esta preparação previa que, além disso, é necessaria muitas vezes para bem-ajuisar-se do gráo da equação.

E' o que se vê em

$$\frac{a}{x} - \frac{a_1}{x} - \frac{b}{x^2} + \frac{b_1}{x^2} = 0,$$

que, apparentemente, é do 2º gráo e que, entretanto, se reduz ao 1º quando se lhe dá a forma inteira.

Multiplicando para isso ambos os seus membros por x^2, que é o menor denominador commum, obtem-se

$$\frac{ax^2}{x} - \frac{a_1x^2}{x} - \frac{bx^2}{x^2} + \frac{b_1x^2}{x^2} = 0$$

ou, effectuando as simplificações,

$$ax - a_1x - b + b_1 = 0,$$

que é uma equação do primeiro gráo.

Fazendo a transposição, obtem-se

$$ax - a_1x = b - b_1;$$

effectuando as composições no primeiro membro virá

$$(a - a_1)\, x = b - b_1;$$

isolando finalmente a incognita, ter-se-á

$$x = \frac{b - b_1}{a - a_1}$$

Semelhantemente, si a equação tiver a forma irracional, e de tal sorte que a incognita se ache sob o radical, será preciso dar-lhe a forma racional.

E' o que se verifica, por exemplo, na equação.

$$\sqrt{1 + 2x} = 7.$$

Em virtude da *terceira consequencia*, podemos, sem alteral-a, elevar ambos os seus membros ao quadrado, o que dará

$$(\sqrt{1 + 2x})^2 = 49$$

ou

$$1 + 2x = 49;$$

transpondo, virá

$$2x = 49 - 1$$

ou

$$2x = 48;$$

isolando finalmente a incognita, obtemos

$$x = \frac{48}{2} = 24.$$

112. — Successivamente exigidas pela resolução das equações do 1º gráo a uma incognita, cada uma das tres operações a que chamamos *transposição*, *composição* e *isolamento* substitue a equação proposta por outra equivalente.

Ellas offerecem difficuldades decrescentes.

A transposição exige quasi sempre que se effectuem as combinações indicadas, afim de se poderem desembaraçar os termos affectos da incognita daquelles que a não contém.

Obtido um tal resultado, é preciso compor aquelles termos, isto é, combinal-os e reduzil-os de modo a *por a incognita em evidencia*.

Isto feito bastará dividir ambos os membros da equação pelo coefficiente da incognita, para conseguir o isolamento desta.

Mas, pode ainda acontecer que, apesar das transformações effectuadas, a fórmula obtida seja ainda assás complexa.

Convirá então transformal-a em outra mais simples, effectuando as combinações indicadas, conforme mostraremos nos dois paragraphos seguintes.

Uma tal simplificação não somente facilita a avaliação das fórmulas obtidas, como permitte muitas vezes determinar o verdadeiro valor destas, quando se apresentam sob

uma forma indeterminada para certa hypothese particular feita sobre um dos dados.

Assim, por exemplo, resolvendo a equação

$$n(m-n)\,y - m(m^2-n^2) = o,$$

obtem-se a fórmula

$$y = \frac{m(m^2-n^2)}{n(m-n)},$$

que para $m = n$ toma a forma indeterminada

$$y = \frac{o}{o}.$$

Entretanto, attendendo que $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$, e supprimindo em ambos os termos o factor commum $m-n$, obtem-se a fórmula

$$y = \frac{m(m+n)}{n},$$

onde não existe mais a indeterminação, podendo por conseguinte determinar-se o verdadeiro valor desta expressão para todas as hypotheses numericas sobre m e n.

Na parte superior da Mathematica, veremos como se conseguem estabelecer regras geraes para determinar os verdadeiros valores que devem substituir todos os que se apresentam como aquelle, sob uma forma indeterminada.

Foram sobretudo as concepções de L'Hôpital que permittiram systematisar a principio esta transformação generalisada depois com o auxilio do *calculo transcendente*.

§ 17

Transformação das fórmulas mediante a addição, subtracção e multiplicação algebricas

113. — O estudo que temos feito precedentemente das mais simples equações do 1º grão, nos leva naturalmente a transformar as fórmulas resultantes.

Universidade de S. Paulo
Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

Semelhante transformação é conveniente não só para simplificar as mesmas fórmulas, facilitando assim a sua avaliação pela arithmetica, como tambem para dar-lhes certa symetria em relação aos seus elementos, de modo a permittir retel-as de memoria quando for necessario.

114. — REDUCÇÃO DOS TERMOS SEMELHANTES NAS EXPRESSÕES ALGEBRICAS. — Resolvamos successivamente algumas equações do 1º gráo, afim de evidenciar as vantagens que resultam da transformação das fórmulas respectivas.

Seja a principio a equação

$$3ax - 6ab = o$$

Para effectuar a transposição dos termos basta sommar a ambos os seus membros o termo $6ab$, o que equivale a passar este termo para o segundo membro com um signal contrario ao que alli têm.

Teremos assim

$$3ax = 6ab \qquad (1)$$

Não sendo necessaria a composição dos termos, podemos applicar immediatamente a fórmula que permitte o isolamento da incognita.

Comparando para isso a equação proposta com o typo das equações do 1º gráo a uma incognita, isto é, $ax = b$, vemos que o coefficiente a corresponde aqui a $3a$ e que o coefficiente b corresponde a $6ab$.

A fórmula conhecida

$$x = \frac{b}{a}$$

dá-nos portanto :

$$x = \frac{6ab}{3a} = \frac{6}{3} \cdot \frac{a}{a} \cdot b = 2b$$

Neste caso o resultado obtido não offerece complexidade, porque as quantidades que correspondem aos

coefficientes *a* e *b* daquella fórmula são formadas por um só termo. Já sabemos que uma quantidade expressa por um só termo chama-se *monomio* (palavra composta do prefixo grego *mono* que significa um só, e da palavra grega *nomos* que significa parte). O mesmo não teria porém lugar si taes coefficientes fossem *polynomios*, isto é, expressões algebricas compostas de mais de um termo, na equação considerada.

Para mostral-o tomemos um outro exemplo.

Seja a equação

$$14\,a^2x + 7\,ac^3 - 5\,db = -4\,ac^3 - 7\,a^2x - 9\,db.$$

Façamos a transposição dos termos, isto é, passemos para um dos membros da equação os termos affectos da incognita com o expoente *1* e para o outro os termos com o expoente *0*.

O termo $7\,a^2x$ estando no segundo membro precedido do signal negativo passará para o primeiro com o signal positivo, porque isso equivale a sommal-o a ambos os membros da equação, o que evidentemente não a altera.

Do mesmo modo, o termo $5\,db$, que se acha no primeiro membro precedido do signal negativo, passará para o segundo com o signal positivo.

Quanto ao termo $7\,ac^3$ que se acha no primeiro membro com o signal positivo, transportemol-o para o segundo com o signal negativo, equivalendo isto a subtrahil-o de ambos os membros da equação, sem que esta se altere.

Teremos assim

$$14\,a^2x + 7\,a^2x = 5\,db - 7\,ac^3 - 4\,ac^3 - 9\,db.$$

Pondo *x em evidencia* com o fim de effectuar a composição dos termos, teremos:

$$(14\,a^2 + 7a^2)\,x = 5\,db - 7\,ac^3 - 4\,ac^3 - 9db$$

A fórmula da incognita sendo dada pela relação entre os dois coefficientes

$$14a^2 + 7a^2 \text{ e } 5db - 7ac^3 - 4ac^3 - 9db$$

comprehende-se que tal fórmula virá muito simplificada si antes de obtel-a conseguirmos transformar estes dois coefficientes em outros mais simples.

Para isso basta notar no primeiro que, ajuntando $14a^2$ a $7a^2$, o resultado será $21a^2$; e no segundo que, ajuntando $7ac^3$ a $4ac^3$, a somma será $11ac^3$, a qual deverá ser precedida do signal negativo que precede a cada uma de suas partes; os termos restantes isto é,

$$5db - 9db$$

podendo ser escriptos sob a forma

$$5db - 5db - 4db,$$

nos dão para resultado $-4db$, porquanto $5db - 5db$ é igual a zero.

O primeiro coefficiente reduz-se, pois, a $21a^2$ e o segundo a $-11ac^3 - 4db$; de modo que a equação transformar-se-á em:

$$21a^2x = -11ac^3 - 4db \qquad (2)$$

Procedendo ao isolamento da incognita, obteremos:

$$x = \frac{-11ac^3 - 4db}{21a^2}$$

A reducção que fizemos nos coefficientes da equação, cuja relação nos deu a fórmula acima, é ordinariamente denominada — *reducção dos termos semelhantes.*

Chamam-se termos semelhantes áquelles da mesma especie, isto é, aquelles que têm a mesma parte literal e os mesmos expoentes; taes como $14a^2 + 7a^2$ (cuja reducção

nos deu $21a^2$), — $7ac^3 - 4ac^3$ (cuja reducção nos deu — $11ac^3$); $5db - 9db$ (cuja reducção nos deu — $4db$) e etc.

Vê-se que das tres partes componentes de um termo algebrico, isto é, coefficiente, parte literal e expoente, o coefficiente é a unica que se altera pela reducção com outros termos semelhantes.

E' assim que o termo algebrico $21a^2$, que proveio da reducção do termo $14a^2$ com $7a^2$, contém como estes a parte literal a, o expoente 2, mas tem um coefficiente 21, differente de 14 e de 7.

Este coefficiente 21 é aqui representado pela somma destas duas parcellas desiguaes, 14 e 7.

Si quizermos, por exemplo, reduzir os termos semelhantes.

$$4ac^4 \text{ e } 2ac^4, -5c^2d^{\frac{1}{2}} \text{ e } -3c^2d^{\frac{1}{2}}$$

achariamos $6ac^4$ para os dois primeiros e

$$-8c^2d^{\frac{1}{2}}$$

para os dois ultimos.

Do mesmo modo se quizessemos reduzir.

$$4ac^{\frac{3}{2}} \text{ e } -2ac^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{5}ad^{\frac{1}{2}} \text{ e } +4ad^{\frac{1}{2}}$$

achariamos

$$2ac^{\frac{3}{2}}$$

para os dois primeiros e

$$\frac{17}{5}ad^{\frac{1}{2}}$$

para os dois ultimos.

Si, ao envez de considerar, como temos feito, somente dois termos semelhantes, tivermos de reduzir um maior numero, a questão reverterá sempre á reducção entre dois termos.

Porque *si todos elles forem affectos do mesmo signal sommar-se-á o primeiro ao segundo, o resultado obtido ao terceiro e assim até o ultimo; e, se elles forem affectos de signaes contrarios, far-se-á somma dos positivos e a somma dos negativos, para depois subtrahir uma da outra, dando ao resultado o signal da maior.*

Si tivermos por exemplo os termos:

$$-\frac{4}{5}\ a^2c^3,\ 5a^2c^3,\ -\frac{1}{5}\ a^2c^3,\ 6a^2c^3,\ a^2c^3 \text{ e}$$

$$-\frac{5}{8}\ a^4c^{\frac{1}{2}},\ -\frac{3}{8}\ a^4c^{\frac{1}{2}},\ -3a^4c^{\frac{1}{2}} - 5a^4c^{\frac{1}{2}} \text{ e } a^4c^{\frac{1}{2}},$$

virá $13a^2c^3$ para o resultado da reducção dos primeiros, e

$$-8a^4c^{\frac{1}{2}}$$

para os segundos.

115. — ADDIÇÃO ALGEBRICA.— A reducção que acaba de ser feita não é propriamente o que se chama *addição algebrica*.

Para effectuar esta operação basta escrever seguidamente as quantidades a addicionar, que podem ser semelhantes ou dissemelhantes.

Si forem semelhantes, effectuar-se-á então a respectiva reducção, como no caso precedente.

No caso contrario, a somma terá então tantos termos quantas forem as parcellas.

Quando, porém, em sua constituição entrarem termos semelhantes, elles se reduzirão a um menor numero, por addição ou por subtracção, conforme os signaes que os affectarem.

Assim, por exemplo, tendo de addicionar $2ab$ com

$$4ac^{\frac{1}{2}}$$

a somma será

$$2ab + 4ac^{\frac{1}{2}},$$

porque nenhuma reducção é possivel; mas querendo-se addicionar *4ab* a *3ab* ou *4ab* a — *3ab*, o resultado será *7ab* no primeiro caso, e *ab* no segundo.

Como praticamos uma verdadeira subtracção afim de chegar a esse ultimo resultado, porquanto para addicionar *4ab* a—*3ab* tiramos esta quantidade daquella, parecerá extranho que se chame a isto uma *addição algebrica*.

Observemos porém que não se deve confundir addicionar com augmentar.

Na theoria das formações algebricas já mostrámos que a addição pode corresponder a um verdadeiro decrescimo, como a subtracção a um accrescimo, que só o signal do resultado nos deixa distinguir.

Para melhor comprehender a pratica dessa operação supponhamos que se tem necessidade de transformar as expressões

$$3ab + 2ac \text{ e } ab - 4ac$$

em uma unica, egual á sua somma.

O resultado será evidentemente

$$3ab + 2ac + ab - 4ac.$$

Como, porém

$$3ab \text{ e } ab,$$

bem como

$$2ac \text{ e } - 4ac$$

são termos semelhantes, faremos a reducção delles, o que conduzirá a *4ab* — *2ac* para a somma procurada.

Vê-se assim confirmado em parte o que acima dissemos relativamente á reducção dos termos semelhantes.

No caso em que entre as parcellas se encontram termos semelhantes, a transformação por somma torna-se mais vantajosa sob o ponto de vista da simplificação do resultado.

Si as parcellas tiverem termos dissemelhantes como por exemplo no caso de serem ellas

$$4a^5 + 3cd^{\frac{1}{2}} \text{ e } - 2a^3c + 7c^2,$$

a somma, isto é,

$$4a^5 + 3cd^{\frac{1}{2}} - 2a^3c + 7c^2,$$

não está nas mesmas condições que a precedentemente obtida, isto é, não comportará simplificação alguma.

Entretanto, cumpre dizer que a desvantagem que dahi resulta para o trabalho arithmetico da avaliação das fórmulas, é muitas vezes compensada pela vantagem algebrica de se poder manter nestas mesmas fórmulas o modo pelo qual o elemento procurado é constituido por meio das quantidades conhecidas.

Como a transformação por addição é quasi sempre necessaria na resolução das equações, vamos pratical-a nos seguintes exemplos:

1.° Sommar

$$12\ abc^{\frac{1}{2}} - 10\ bc^3d - 4\ abc^{\frac{1}{2}} + 26\ bc^3d$$

com

$$-3\ abf + 6\ abc^{\frac{1}{2}} + 3a\,be + \frac{1}{5}\ abf + 20\ bc^3d$$

Escrevendo seguidamente as duas expressões, teremos:

$$12\ abc^{\frac{1}{2}} - 10\ bc^3d - 4\ abc^{\frac{1}{2}} + 26\ bc^3d - 3\ abf + 6\ abc^{\frac{1}{2}} + \\ + 3\,abe + \frac{1}{5}\ abf + 20\,bc^3d$$

Reduzindo os termos semelhantes, teremos para resultado

$$14\ abc^{\frac{1}{2}} + 36\ bc^3d - \frac{14}{5}\ abf + 3\ abe$$

2.° Seja ainda

$$ab^{-2} - ac^2 + \frac{1}{3}\ a^2b + \frac{4}{5}\ ac^2$$

para sommar com

$$-\ ab^{-2} + ac^2 - \frac{2}{3}\ a^2b + \frac{3}{5}\ ac^2$$

Teremos:

$$ab^{-2} - ac^2 + \frac{1}{3}\ a^2b + \frac{4}{5}\ ac^2 - ab^{-2} + ac^2 - \frac{2}{3}\ a^2b + \frac{3}{5}\ ac^2,$$

que, reduzindo, nos dá

$$\frac{7}{5}\ ac^2 - \frac{1}{3}\ a^2b$$

O que acabamos de dizer para o caso em que são dados dois polynomios a addicionar, applica-se ao caso de tres, quatro, etc., que não é mais do que um redobramento do precedente.

Como se vê a addição algebrica tem sempre por objecto transformar duas ou mais expressões dadas em uma unica que seja igual á sua somma.

Para effectual-a basta escrever seguidamente as expressões algebricas com os signaes dos respectivos termos e proceder depois, dentre estes, á reducção dos que forem semelhantes.

116. — CASOS DA SUBTRACÇÃO ALGEBRICA. — Esta operação concorre tambem para simplificar as fórmulas; ella differe da precedente por exigir que se inverta o signal do subtrahendo.

Assim, pois, para subtrahir uma expressão algebrica de outra, basta escrevel-a em seguida a esta mudando os signaes dos termos do subtrahendo e procedendo depois á reducção dos que forem semelhantes.

A necessidade de manter os signaes do minuendo e de inverter os signaes dos termos do subtrahendo resulta da lei arithmetica que obriga o resto a variar na rasão directa do minuendo e inversa do subtrahendo.

Com effeito, para que o resto indique um tal modo de dependencia para com o minuendo, deve este entrar em sua constituição sem nenhuma alteração e, portanto, com os signaes inherentes aos seus termos.

Desta maneira fica patente que na expressão algebrica de um tal resto, estão sommados ou subtrahidos todos os termos sommados ou subtrahidos ao respectivo minuendo.

Semelhantemente, para que a composição algebrica do resto exprima o seu modo de dependencia para o subtrahendo, deve elle conter este subtrahendo com os signaes trocados; porque deste modo fica manifesto que todos os elementos que são addicionados no subtrahendo estão subtrahidos no resto e vice-versa.

Para esclarecer o que acabamos de expôr supponhamos que se quer subtrahir $6\,a\,b + 4\,a\,c$ de $4\,ab + 5\,ac - ax$.

Teremos:

$$4\,ab + 5\,ac - ax - (6\,ab + 4\,ac) = 4\,ab + 5\,ac - ax - 6\,ab - 4\,ac,$$

para expressão do resto.

Reduzindo neste os termos semelhantes, obtem-se

$$-2\,ab + ac - ax.$$

Si quizessemos simplesmente subtrahir de $4\,ab + 5\,ac - ax$ o termo $6\,ab$ o resultado seria evidentemente $4\,ab + 5\,ac - ax - 6\,ab$, porque o signal negativo que precede

aqui o termo $6\ ab$ indica que elle está subtrahido do minuendo.

Mas subtrahindo $6\ a\ b$ em lugar de $6\ ab + 4\ ac$ tem-se subtrahido de menos o termo $4\ ac$ porque este termo está sommado ao subtrahendo dado ($6\ ab + 4\ ac$).

Nestas condições o resto $4\ ab + 5\ ac - ax - 6\ ab$ está augmentado de $4\ ac$, e assim se deverá diminuil-o de $4\ ac$, o que dará, como vimos acima:

$$4\ ab + 5\ ac - ax - 6\ ab - 4\ ac$$

ou, effectuando a reducção, $-2\ ab + ac - ax$.

Quando esta reducção não é possivel por não haver termos semelhantes, a expressão algebrica do resto encerrará um numero de termos igual a somma dos que compõem o minuendo e o subtrahendo.

E' assim que subtrahindo

$$\text{de } ab^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\ cd - d\ \ a^4b^2 - 5\ c^3 + ef,$$

o resultado será:

$$ab^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\ cd - d - (a^4b^2 - 5c^3 + ef) = ab^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\ cd - \\ - d - a^4b^2 + 5c^3 - ef,$$

sem reducção alguma.

Vê-se assim que as vantagens que resultam da transformação por subtracção para a simplificação das fórmulas, estão restrictas ao caso especial da semelhança dos termos, a maneira do que se dá na transformação por somma.

Como a transformação por subtração é quasi sempre util na resolução das equações, vamos pratical-a ainda nos seguintes exemplos:

1.º Seja

$$-2\ ab^{-3} + \frac{4}{5}\ a^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{8}\ ax + 2$$

para subtrahir de

$$4\,ab^{-3} + 5\,a^{\frac{1}{2}} - 3\,ax + \frac{1}{2}$$

Teremos:

$$4\,ab^{-3} + 5\,a^{\frac{1}{2}} - 3\,ax + \frac{1}{2} - \left(-2\,ab^{-3} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{5}\,a^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{8}\,ax + 2\right) = 4\,ab^{-3} + 5\,a^{\frac{1}{2}} - 3\,ax +$$

$$+ \frac{1}{2} + 2\,ab^{-3} - \frac{4}{5}\,a^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}\,ax - 2 = 6\,ab^{-3} +$$

$$+ \frac{21}{5}\,a^{\frac{1}{2}} - \frac{21}{8}\,ax - \frac{3}{2}.$$

2.° Seja ainda

$$-4\,a^5c^2 - 3\,ax - 3\,az - 2\,ay$$

para subtrahir de

$$ay - 3\,ax - 3\,az - b^2$$

Teremos:

$$ay - 3\,ax - 3\,az - b^2 - (-4\,a^5c^2 - 3\,ax - 3\,az - 2\,ay) = ay -$$

$$- 3\,ax - 3\,az - b^2 + 4\,a^5c^2 + 3\,ax + 3\,az + 2\,ay = 3\,ay - b^2 +$$

$$+ 4\,a^5c^2.$$

O que acabamos de dizer para o caso em que se tem de subtrahir duas expressões applica-se a um numero qualquer.

Assim por exemplo si tivermos que subtrahir de

$$a^2 - 2\,ax + b^2$$

as expressões

$$b^2 - 2\,ay + 7\,ax \text{ e } 5\,a^2 + 3\,by - 1,$$

o resultado será:

$$a^2 - 2\,ax + b^2 - (b^2 - 2\,ay + 7\,ax) - (5\,a^2 + 3\,by - 1) = a^2 -$$

$$- 2\,ax + b^2 - b^2 + 2\,ay - 7\,ax - 5\,a^2 - 3\,by + 1 = -4\,a^2 -$$

$$- 9\,ax + 2\,ay - 3\,by + 1$$

Pelo que temos feito conclue-se que a subtracção algebrica tem por objecto transformar duas ou mais expressões em uma unica que seja equivalente a sua differença, e que *para effectual-a basta escrever a expressão minuendo seguida daquellas que têm de ser subtrahidas com os signaes trocados e reduzir os termos que forem semelhantes no resto assim obtido.*

A subtracção algebrica constitue com a addição as duas mais simples transformações, que podem ser empregadas no intuito de simplificar as fórmulas.

Comquanto esta simplificação esteja restricta ao caso especial em que os termos sommados ou subtrahidos são semelhantes, ella offerece comtudo grandes vantagens.

117.— O emprego da multiplicação algebrica na transformação das fórmulas; caso mais simples: producto de um monomio por outro.—Vejamos agora quaes as simplificações que podem resultar da multiplicação algebrica.

Consideremos a principio esta operação no seu caso mais simples, em que se procura determinar o producto de duas expressões de um só termo ou monomias.

Para isto seja proposto resolver a equação:

$$13ab \times 2abx - 3cb \times 4cb = 5ab \times 4cx - 9d^2c \times 3abc^{\frac{1}{2}}$$

Transpondo-lhe os termos, virá

$$13ab \times 2abx - 5ab \times 4cx = 3cb \times 4cb - 9d^2c \times 3abc^{\frac{1}{2}}$$

Procedamos agora á composição dos termos.

Pondo para isso x em evidencia, virá

$$(13ab \times 2ab - 5ab \times 4c)\, x = 3cb \times 4cb - 9d^2c \times 3abc^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Como a incognita é dada pela relação entre os dois coefficientes

$$3cb \times 4cb - 9d^2c \times 3abc^{\frac{1}{2}}$$

e

$$13ab \times 2ab - 5ab \times 4c,$$

devemos simplificar um e outro afim de que a fórmula se torne a mais simples possivel.

No coefficiente de x o signal $\times$ entre $13\,ab$ e $2\,ab$ indica que se deve multiplicar estes monomios; o producto de

$$13\,ab \text{ por } 2\,ab$$

isto é,

$$13\,ab \times 2\,ab = 13 \times 2.ab.ab = 26\,a^2b^2.$$

No mesmo coefficiente está indicado o producto de

$$5\,ab \text{ por } 4\,c,$$

isto é,

$$5\,ab \times 4\,c = 5 \times 4\,abc = 20\,abc,$$

resultado este que deve ser subtrahido do outro producto, conforme indica o signal negativo anteposto a $5\,ab$.

O coefficiente de x reduz-se, pois, a

$$26\,a^2b^2 - 20\,abc.$$

No segundo membro o producto de

$$3\,cb \text{ por } 4\,cb,$$

isto é,

$$3\,cb \times 4\,cb = 3 \times 4\,bbcc = 12\,b^2c^2;$$

o producto de

$$9\,d^2c$$

por

$$3\,abc^{\frac{1}{2}},$$

isto é,

$$9\,d^2c \times 3\,abc^{\frac{1}{2}} = 9 \times 3\,d^2c\,abc^{\frac{1}{2}} = 27\,abc^{\frac{3}{2}}\,d^2.$$

O coefficiente de x^0, isto é, o segundo membro da equação transforma-se, pois, em

$$12\,b^2c^2 - 27\,abc^{\frac{3}{2}}\,d^2$$

A equação transforma-se, portanto, em

$$(26\,a^2b^2 - 20\,abc)\,x = 12\,b^2c^2 - 27\,abc^{\frac{3}{2}}\,d^2$$

e a fórmula que a resolve será assim expressa:

$$x = \frac{12\,b^2c^2 - 27\,abc^{\frac{3}{2}}\,d^2}{26\,a^2b^2 - 20\,abc}$$

Neste exemplo por mais de uma vez tivemos necessidade de multiplicar uma expressão algebrica de um só termo, denominada *monomio*, por uma outra tambem de um só termo.

E' assim que multiplicamos

$$13\,ab \text{ por } 2\,ab,$$

sendo o resultado

$$26\,a^2b^2;\ 5\,abc \text{ por } 4\,c,$$

sendo o resultado

$$20\,abc^2;\ 3\,cb \text{ por } 4\,cb,$$

sendo o resultado

$$12\,b^2c^2,$$

e finalmente

$$9\,d^2c$$

por

$$3\,abc^{\frac{1}{2}},$$

sendo o resultado

$$27\,abc^{\frac{3}{2}}\,d^2.$$

Apreciando bem estes resultados, concluimos *que para termos o producto de um monomio por outro multiplicam-se os coefficientes, escrevem-se ás letras communs ajuntando os seus expoentes e ás letras não communs com os expoentes respectivos.*

Para exercitarmo-nos sobre esta regra, tomemos os seguintes exemplos:

1.º Multiplicar

$$2a^{\frac{3}{2}}b^2c$$

por

$$\frac{1}{3}a^2b^{\frac{1}{2}}c.$$

O resultado será

$$2a^{\frac{3}{2}}b^2c \times \frac{1}{3}a^2b^{\frac{1}{2}}c = \frac{2}{3}a^{\frac{7}{2}}b^{\frac{5}{2}}c^2. = \frac{2}{3}a^{\frac{7}{2}}b^{\frac{5}{2}}c^2$$

2.º Multiplicar

$$\frac{4}{5}b^3c^2f$$

por

$$\frac{6}{4}b^4c^{-5}f^3g.$$

O resultado será:

$$\frac{4}{5}b^3c^2f \times \frac{6}{4}b^4c^{-5}f^3g = \frac{24}{20}b^7c^{-3}f^4g$$

3.º Multiplicar

$$\frac{2}{3}a^2c^2d^2e^{-1}$$

por

$$\frac{1}{7}b^2cd^{-1}ef.$$

O resultado será:

$$\frac{2}{3}a^2c^2d^2e^{-1} \times \frac{1}{7}b^2cd^{-1}ef = \frac{2}{21}a^2b^2c^3df$$

Para justificar a regra acima, basta attender ao modo de dependencia que deve existir entre um producto e os seus factores.

Com effeito o producto variando na razão directa dos factores, é claro que deve contel-os todos afim de que a

modificação de um qualquer dentre elles se faça sentir directamente no producto.

Esta regra se applica não só no caso em que se considera a multiplicação de dois monomios, unica directa, como tambem naquelle em que se considera a multiplicação de tres ou mais.

Neste caso faz-se o producto do primeiro monomio pelo segundo, o producto obtido multiplica-se pelo terceiro e assim por diante.

Si tivermos por exemplo de multiplicar

$$4\,a^3c^5 \text{ por } 2\,a^8c$$

por $7\,b^6$ e por

$$\frac{1}{3}\,de,$$

virá:

$$4\,a^3c^5 \times 2\,a^8c \times 7\,b^6 \times \frac{1}{3}\,de$$

de

$$= 8\,a^{11}c^6 \times 7\,b^6 \times \frac{1}{3}\,de = 56\,a^{11}b^6c^6 \times \frac{1}{3}\,de = \frac{56}{3}\,a^{11}b^6c^6\,de$$

o que mostra que a multiplicação se faz sempre directamente entre dois monomios.

118. — EXAME DO CASO DA MULTIPLICAÇÃO DE UM MONOMIO POR UM POLYNOMIO. — Este caso reduz-se facilmente ao anterior. Para comprendel-o seja proposto resolver a equação

$$a^2x + (a - b)\,bcx = (ab - cd + de)\,b + (ad + ab)\,cx$$

Fazendo a transposição, teremos:

$$a^2x + (a - b)\,bcx - (ad + ab)\,cx = (ab - cd + de)\,b$$

Procedamos agora á composição dos termos.

Teremos

$$[a^2 + (a - b)\,bc - (ad + ab)\,c]\,x = (ab - cd + de)\,b. \quad (1)$$

Como a fórmula da incognita não é mais do que a relação entre os dois coefficientes

$$(ab - cd + de)\ b \text{ e } a^2 + (a - b)\ bc - (ad + ab)\ c,$$

devemos simplifical-os antes de proceder ao isolamento, afim de facilitar a avaliação.

Para isso vamos completar a composição dos coefficientes effectuando as multiplicações alli indicadas.

No coefficiente de x temos de multiplicar $a-b$ por bc e $ad + ab$ por c.

Para formar o producto de $(a—b)$ por bc, devemos multiplicar a por bc, o que dá abc e deste producto subtrahir o de b por bc, isto é b^2c; esta subtracção tem lugar porque $a—b$ sendo menor que a da quantidade b, o seu producto por bc deve ser menor que o producto de a por bc ou abc da quantidade $b \times bc$ ou b^2c.

Do mesmo modo, para multiplicar $(ad + ab)$ por c, devemos multiplicar ad por c, o que dá adc e ao producto sommar o producto de ab por c ou abc; porque $ad + ab$ sendo maior que ad de ab o producto de $ad + ab$ por c será maior que o producto de ad por c ou adc de ab por c ou abc.

O coefficiente de x transforma-se portanto em

$$a^2 + (abc - b^2c) - (adc + abc)$$

ou effectuando a somma e a subtracção indicadas, em

$$a^2 + abc - b^2c - adc - abc;$$

reduzindo os termos semelhantes virá simplesmente

$$a^2 - b^2c - adc$$

Resta-nos agora effectuar a multiplicação indicada no outro coefficiente, isto é, formar o producto de

$$(ab - cd + de) \text{ por } b.$$

Devemos multiplicar

$$ab \text{ por } b,$$

o que dá

$$abb \text{ ou } ab^2,$$

e deste producto subtrahir o producto de

$$cd \text{ por } b, \text{ ou } bcd,$$

o que dá:

$$ab^2 - bcd.$$

Mas a este resultado devemos ainda sommar o producto de

$$de \text{ por } b \text{ ou } bde;$$

porque

$$ab - cd + de$$

sendo maior que

$$ab - cd$$

da quantidade de, o seu producto por b deve ser maior que o producto de

$$ab - cd$$

do producto de

$$de \text{ por } b, \text{ isto é, de } bde.$$

O coefficiente considerado reduz-se pois a

$$ab^2 - bcd + bde$$

A equação (1) fica, portanto, transformada em

$$(a^2 - b^2c - adc)\ x = ab^2 - bcd + bde$$

Procedendo ao isolamento da incognita virá

$$x = \frac{ab^2 - bcd + bde}{a^2 - b^2c - adc}$$

No exemplo precedente tivemos necessidade de multiplicar uma expressão algebrica de um só termo ou mono-

mio por uma expressão algebrica de mais de um termo ou *polynomio*.

Costuma-se especificar o numero de termos das expressões taes como a multiplicadora denominando-as de *binomios* quando ellas têm dois termos, de *trinomios* quando têm tres, e em geral de *polynomios* quando têm um maior numero.

O modo por que nos conduzimos nas differentes multiplicações dessa natureza, taes como de

$$ac - bc \text{ por } b$$

sendo o resultado

$$abc - b^2c, \text{ de } ad + ab \text{ por } c,$$

sendo o producto

$$acd + abc,$$

e finalmente de

$$ab - cd + de \text{ por } b,$$

sendo o resultado,

$$ab^2 - bcd + bde,$$

permitte estabelecer a regra para multiplicar um *monomio* por um *polynomio*.

Observando estes resultados, nota-se com effeito que *para formar o producto de um monomio por um polynomio basta multiplicar o monomio por cada um dos termos do polynomio, de accôrdo com a regra já conhecida para multiplicar um monomio por outro.*

A multiplicação de um monomio por um polynomio reduz-se portanto, ao caso mais simples, em que se multiplica um monomio por outro.

Mas, como é conveniente exercitarmo-nos bem nesta transformação tomemos os seguintes exemplos:

1°. Seja a multiplicar

$$a^2x + by - ce$$

por

$$a^3d^{\frac{1}{2}}$$

Si tivessemos de multiplicar simplesmente

$$a^2x + by$$

por

$$a^3d^{\frac{1}{2}}$$

o resultado seria então

$$a^5d^{\frac{1}{2}}x + a^3bd^{\frac{1}{2}}y,$$

de accôrdo com o raciocinio que fizemos na multiplicação de

$$ad + ab \text{ por } c;$$

mas

$$a^2x + by$$

sendo maior que

$$a^2x + by - ce$$

do termo ce, o seu producto por

$$a^3d^{\frac{1}{2}}$$

isto é

$$(a^5d^{\frac{1}{2}}x + a^3bd^{\frac{1}{2}}y)$$

é evidentemente maior que o producto de

$$a^2x + by - ce$$

por

$$a^3d^{\frac{1}{2}}$$

do termo

$$ce \times a^3d^{\frac{1}{2}}$$

ou de

$$a^3cd^{\frac{1}{2}}e.$$

Portanto, para tornar o producto verdadeiro será preciso subtrahir o termo

$$a^3cd^{\frac{1}{2}}e,$$

Universidade de S. Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

o que dá para resultado

$$a^5 d^{\frac{1}{2}} x + a^3 b d^{\frac{1}{2}} y - a^3 c d^{\frac{1}{2}} e.$$

A semelhança do que se faz em arithmetica pode-se dispor o calculo do seguinte modo:

$$\begin{array}{l} a^2x + bv - ce \\ a^3 d^{\frac{1}{2}} \\ \hline a^5 d^{\frac{1}{2}} x + a^3 b d^{\frac{1}{2}} y - a^3 c d^{\frac{1}{2}} e \end{array}$$

2º. Supponhamos que se tenha de multiplicar

$$a^2b^3 - cd^5 + ab^4 - bc^4 \text{ por } 5e$$

Si tivessemos de multiplicar simplesmente

$$a^2b^3 - cd^5 \text{ por } 5e$$

teriamos, raciocinando do mesmo modo por que procedemos na multiplicação de $a - b$ por c, o resultado:

$$5a^2b^3e - 5cd^5e;$$

se tivessemos de multiplicar

$$a^2b^3 - cd^5 + ab^4 \text{ por } 5e,$$

o resultado seria de accôrdo com o raciocinio empregado na multiplicação de

$$ab - cd + de \text{ por } b,$$

o seguinte:

$$5a^2b^3e - 5cd^5e + 5ab^4e.$$

Mas,

$$a^2b^3 - cd^5 + ab^4$$

sendo maior que

$$a^2b^3 - cd^5 + ab^4 - bc^4,$$

do termo bc^4, é claro que o seu producto por $5e$ será maior que o producto de

$$a^2b^3 - cd^5 + ab^4 - bc^4$$

do producto de

$$bc^4 \text{ por } 5e.$$

Nestas condições, devemos subtrahir-lhe

$$5bc^4e,$$

o que dá

$$5a^2b^3e - 5cd^5e + 5ab^4e - 5bc^4e.$$

Dispondo os calculos como na multiplicação dos numeros inteiros virá

$$\begin{array}{l} a^2b^3 - cd^5 + ab^4 - bc^4 \\ 5e \\ \hline 5a^2b^3e - 5cd^5e + 5ab^4e - 5bc^4e \end{array}$$

3°. Seja ainda a multiplicar

$$7c^5d^3 - 4a^2c + 8acf + 3a^2c \text{ por } 5acf.$$

Teremos:

$$(7c^5d^3 - 4a^2c + 8acf + 3a^2c)\ 5acf = 35ac^6a^3f - 20a^3c^2f + 40a^2c^2f^2 + \\ + 15a^3c^2f.$$

Praticando a reducção dos termos semelhantes, virá:

$$35ac^6d^3f - 5a^3c^2f + 40a^2c^2f^2.$$

De tudo o que temos feito se pode concluir que o producto de um polymonio por um monomio é constituido pela somma algebrica de todos os productos parciaes do monomio multiplicador por todos os termos do polymonio multiplicando.

119. — SIMPLIFICAÇÃO DAS FÓRMULAS PELA MULTIPLICAÇÃO DOS POLYMONIOS. — O caso da multiplicação de um

polymonio por outro reduz-se immediatamente ao precedente.

Para comprehendel-o, supponhamos que se tenha de resolver a seguinte equação:

$$(4e + 5)\ 3x + (a—b)\ (c—d)\ x = (2b—3c + 5d)\ (ef + gh).$$

Já se achando realisada a transposição dos termos, façamos a sua composição. Teremos a principio

$$\left[\ (4e + 5)\ 3 + (a - b)\ (c - d)\right] x = (2b - 3c + 5d)\ (ef + gh)$$

Para completar a composição devemos effectuar as multiplicações indicadas nos dois coefficientes

$$(4e + 5)\ 3 + (a - b)\ (c - d) \text{ e } (2b - 3c + 5d)\ (ef + gh).$$

Procedendo assim, a fórmula pedida tornar-se-á mais simples, e, como tal, mais apta a ser authenticamente avaliada.

No primeiro coefficiente a multiplicação de $4e + 5$ por 3 nos dá immediatamente $12e + 15$, em vista do que dissemos relativamente á multiplicação de um polymonio por um monomio.

Quanto á multiplicação do polymonio $a — b$ pelo polymonio $(c—d)$, a reduziremos ao caso precedente da seguinte maneira:

Chamando m o polynomio $(c — d)$ virá

$$(a — b)\ (c - d) = (a — b)\ m = am — bm.$$

Substituindo o m, teremos:

$$(a —b)\ (c — d) = a\ (c — d) — b\ (c — d).$$

Effectuando as multiplicações dos monomios a e b, pelo polymonio $(c — d)$ virá:

$$(a — b)\ (c — d) = (ac — ad) — (bc — bd).$$

Effectuando a subtracção indicada no segundo membro, teremos

$$(a-b)\ (c-a) = ac - ad - bc + bd.$$

O coefficiente de x transforma-se, pois, em

$$12e + 15 + ac - ad - bc + bd.$$

Quanto ao outro coefficiente, temos que transformal-o tambem effectuando a multiplicação de

$$2b - 3c + 5d \text{ por } ef + gh.$$

Representando por n o polynomio $ef + gh$, virá:

$$(2b - 3c + 5d)\ (ef + gh) = (2b - 3c + 5d)\ n = 2bn - \\ - 3cn + 5dn.$$

Substituindo n, teremos:

$$(2b - 3c + 5d)\ (ef + gh) = 2b\ (ef + gh) + 3c\ (ef + gh) + \\ + 5d\ (ef + gh)$$

ou effectuando as multiplicações dos monomios $2b$, $3c$ e $5d$ pelo polynomio $ef + gh$:

$$(2b - 3c + 5d)\ (ef + gh) = (2bef + 2bgh) - (3cef - 3cgh) + \\ + (5def + 5dgh).$$

Effectuando a addição e a subtracção aqui indicadas, virá

$$(2b - 3c + 5d)\ (ef + gh) = 2bef + 2bgh - 3cef - 3cgh + \\ + 5def + 5dgh;$$

que é a expressão do segundo coefficiente (2).

A equação reduz-se, portanto, a

$$(12e + 15 + ac - ad - bc + bd)\ x = 2bef + 2bgh - 3cef + \\ + 5dgh - 3cgh + 5def.$$

Isolando a incognita, obtem-se finalmente

$$x = \frac{2\,bef + 2\,bgh - 3\,cef - 3\,cgh + 5\,def + 5\,dgh}{12\,e + 15 + ac - ad - bc + bd}$$

O exemplo que acabamos de realisar nos mostra a marcha a seguir na multiplicação de dois polynomios.

Ella consiste, como vimos, em reduzir este caso á multiplicação de monomios por intermedio do caso anterior, isto é, da multiplicação de monomios por polynomios.

Na multiplicação dos dois coefficientes da equação precedente (1) e (2) vimos claramente isto.

No primeiro (1) nota-se uma circumstancia interessante em relação aos signaes dos productos parciaes obtidos comparados com os signaes dos factores. Observa-se que o producto do monomio b que está precedido do signal negativo pelo monomio c precedido do signal positivo (signal que se subentende) dá um resultado negativo; emquanto que o producto do mesmo monomio b (affecto do signal negativo) pelo monomio d tambem affecto do signal negativo, dá um resultado positivo.

Esta circunstancia é uma consequencia natural da subtracção que effectuamos do producto parcial $(bc - bd)$.

Ella poderá ser melhor apreciada na igualdade obtida (1), isto é, $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$, si suppusermos $a = o$ e $c = o$.

Teremos então:

$$(o - b)(o - d) \text{ ou } (-b)(-d) = a \times o - o \times d - b \times o + bd, \text{ ou } -b \times -d = +bd.$$

Este resultado nos mostra mais claramente que o producto

de $-b$ por $-d$ dá $+bd$.

Si fizessemos somente $a = o$, veria:

$$(o - b)(c - d) = o \times c - o \times d - bc + bd \text{ ou } -b(c - d) = -bc + bd;$$

que nos mostra que $-b$ multiplicado por c *ou* $+c$ *dá* $-bc$

Esta circumstancia que nos havia escapado na multiplicação dos monomios, nos deixa vêr que *são positivos os productos parciaes que resultam da multiplicação de termos do mesmo signal, e que são negativos os que resultam da multiplicação de termos affectos de signaes contrarios.*

A seguinte imagem servirá para gravar bem isto:

$$+ \times + = +, \quad - \times - = +, \quad + \times - = -, \quad - \times + = -.$$

Podemos pois dizer que *para multiplicar um polynomio por outro, multiplica-se cada um dos termos do polynomio multiplicador por todos os termos do polynomio multiplicando, tendo o cuidado de preceder do signal positivo os productos parciaes que resultarem da multiplicação de factores do mesmo signal e do signal negativo os que resultarem da multiplicação de factores de signaes contrarios.*

Para exercitarmo-nos nesta sorte de transformações tomemos os seguintes exemplos:

1º. Seja a multiplicar

$$4a^2 - 3b + 5c + e - 1 \text{ por } abf - 5cd + s.$$

Teremos:

$$(4a^2 - 3b + 5c + e - 1)(abf - 5cd + s) = 4a^2(abf - 5cd + s) -$$
$$- 3b(abf - 5cd + s) + 5c(abf - 5cd + s) + e(abf - 5cd +$$
$$+ s) - (abf - 5cd + s) = 4a^3bf - 20a^2cd + 4a^2s - 3ab^2f +$$
$$+ 15bcd - 3bs + 5abcf - 25c^2d + 5cs + abef - 5cde + es -$$
$$- abf + 5cd - s.$$

O numero de termos do producto é aqui igual ao numero de termos do multiplicador multiplicado pelo numero de termos do multiplicando.

Devemos comtudo observar que este numero é o ma-

ximo, porque na somma algebrica que constitue aqui o producto total não ha termos semelhantes.

O producto reduz-se, quando ha termos semelhantes, a um numero de termos inferior áquelle, podendo conter sómente dois.

Para fazer facilmente esta simplificação, costuma-se, no caso em que os polynomios factores têm uma ou mais letras communs, *ordenal-os* em relação a esta letra para então proceder á multiplicação.

Esta *ordenação* consiste em dispor os termos do multiplicando e do multiplicador, de maneira que o expoente da letra commum, chamada ordenadora, vá decrescendo ou crescendo do primeiro termo ao ultimo.

O producto virá tambem ordenado em relação ás potencias decrescentes ou crescentes da mesma letra ordenadora e então a reducção dos termos semelhantes tornar-se-á facil como nos mostra este exemplo :

$$(b^4 + a^4 - 4\,ab^3 + 6\,a^2\,b^2 - 4\,a^3\,b + a^4)\ (3\,ab^2 - 3\,a^2\,b - b^3 + a^3).$$

Ordenando os dois polynomios em relação ás potencias decrescentes de a e crescentes b, virá

$$(a^4 - 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 - 4\,ab^3 + b^4)\ (a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,ab^2 - b^3) =$$
$$= a^7 - 3\,a^6b + 3\,a^5\,b^2 - a^4\,b^3 - 4\,a^6\,b + 12\,a^5\,b^2 - 12\,a^4\,b^3 +$$
$$+ 4\,a^3\,b^4 + 6\,a^5\,b^2 - 18\,a^4\,b^3 + 18\,a^3\,b^4 - 6\,a^2\,b^5 - 4\,a^4\,b^3 +$$
$$+ 12\,a^3\,b^4 - 12\,a^2\,b^5 + 4\,ab^6 + a^3\,b^4 - 3\,a^2\,b^5 + 3\,ab^6 - b^7 =$$
$$= a^7 - 7\,a^6\,b + 21\,a^5\,b^2 - 35\,a^4\,b^3 + 35\,a^3\,b^4 - 21\,a^2\,b^5 + 7\,ab^6 - b^7.$$

Como se vê, por causa da reducção dos termos semelhantes, o numero de termos do producto reduziu-se de 20 a 8.

Si dispusermos o calculo á semelhança do que se faz em arithmetica, tornar-se-á muito simples a reducção.

Teremos:

$$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^7 - 4a^6b + 6a^5b^2 - 4a^4b^3 + a^3b^4$$
$$- 3a^6b + 12a^5b^2 - 18a^4b^3 + 12a^3b^4 - 3a^2b^5$$
$$+ 3a^5b^2 - 12a^4b^3 + 18a^3b^4 - 12a^2b^5 + 3ab^6$$
$$- a^4b^3 + 4a^3b^4 - 6a^2b^5 + 4ab^6 - b^7$$

$$a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

Embora o numero de termos do producto de dois polynomios ordenados possa se reduzir consideravelmente, é facil perceber que um tal numero não pode ser inferior a dois.

Haverá pelo menos dois termos irreductiveis no producto, os quaes resultarão um da multiplicação dos dois termos em que a letra ordenadora entra no multiplicando e multiplicador com o maior expoente, e o outro da multiplicação dos dois termos em que a letra ordenadora entra com o menor expoente.

E' o que se verifica, por exemplo, multiplicando

$$ax + b \text{ por } ax - b,$$

cujo producto,

$$a^2x^2 - b^2,$$

já conhecemos, porquanto já vimos que a somma de duas quantidades multiplicada pela sua differença é igual á differença entre os seus quadrados.

O exemplo seguinte está ainda neste caso:

$$3^o\ (y^n + ay^{n-1} + a^2y^{n-2} + \ldots + a^{n-1}y + a^n)(y - a)$$

Teremos:

$$(y^n + ay^{n-1} + a^2y^{n-2} + a^3y^{n-3} + a^4y^{n-4} + \ldots +$$
$$+ a^{n-2}y^2 + a^{n-1}y + a^n)(y - a)$$
$$y^{n+1} + ay^n + a^2y^{n-1} + a^3y^{n-2} + a^4y^{n-3} \ldots +$$
$$+ a^{n-2}y^3 + a^{n-1}y^2 + a^ny$$
$$- ay^n - a^2y^{n-1} - a^3y^{n-2} - a^4y^{n-3} - \ldots - a^{n-2}y^3 -$$
$$a^{n-1}y^2 - a^ny - a^{n+1} = y^{n+1} - a^{n+1}$$

Quando se ordenam o multiplicando e o multiplicador em relação a uma mesma letra, acontece muitas vezes que os coefficientes desta letra são por sua vez polynomios.

Para obter-se o primeiro termo do producto, deve-se multiplicar o coefficiente do termo do multiplicando, que tem o expoente mais elevado relativamente á letra principal, pelo coefficiente do termo do multiplicador que tem o mais alto expoente em relação a esta letra.

Para mais facilidade, ordenam-se tambem os coefficientes entre elles, isto é, escolhe-se uma nova letra ordenadora, si isso é possivel, e dispõe-se a operação como se vê em seguida, onde multiplicamos.

$$(a^2 + ab + b^2)\,x^2 + (2\,a - 3\,b)\,x + a^2 - 3\,ab + b^2$$
$$(a^2 - ab + b^2)\,x + 3\,a^2\,b - 5\,ab^2$$

Typo do calculo

Multiplicando..	a^2	$x^2 + 2\,a$	$x + a^2$	
	$+ ab$	$- 3\,b$	$- 3\,ab$	
	$+ b^2$		$+ b^2$	
Multiplicador...	a^2	$x + 3\,a^2b$		
	$- ab$			
	$+ b^2$	$- 5\,ab^2$		
Producto parcial por $(a^2 - ab + b^2)\,x$.	$+ a^4$	$x^3 + 2\,a^3$	$x^2 + a^4$	x
	$+ a^3b$	$- 2\,a^2\,b$	$- 3\,a^3\,b$	
	$+ a^2\,b^2$	$- 2\,a^2\,b$	$+ a^2\,b^2$	
	$- a^3b$	$+ 3\,ab^2$	$- a^3\,b$	
	$- a^2\,b^2$	$- 3\,b^3$	$+ 3\,a^2\,b^2$	
	$- ab^3$		$- ab^3$	
	$+ a^2\,b^2$		$+ a^2\,b^2$	
	$+ ab^3$		$- 3\,ab^3$	
	$+ b^4$		$+ b^4$	

Producto parcial por $3a^2b - 5ab^2$.		$+ 3a^4b$	$x^2 + 6a^3b$	$x + 3a^4b$
		$+ 3a^3b^2$	$- 9a^2b^2$	$- 9a^3b^2$
		$+ 3a^2b^3$	$- 10a^2b^2$	$+ 3a^2b^3$
		$- 5a^3b^3$	$+ 15ab^3$	$- 5a^3b^2$
		$- 5a^2b^3$		$+ 15a^2b^3$
		$- 5ab^4$		$- 5ab^4$
Producto simplificado.	$+ a^4$	$x^3 + 3a^4b$	$x^2 + a^4$	$x + 3a^4b$
	$+ a^2b^2$	$+ 2a^3$		
	$+ b^4$	$- 2a^3b^2$	$+ 2a^3b$	$- 14a^3b^2$
		$- 5a^2b$		$+ 18a^2b^3$
		$- 2a^2b^3$	$- 14a^2b^2$	$- 5ab^4$
		$+ 5ab^2$	$+ 11ab^3$	
		$- 5ab^4$	$+ b^4$	
		$- 3b^3$		

Temos tratado até aqui da multiplicação de dois polynomios; mas a regra estabelecida tem inteira applicação ao caso em que se quer formar o producto de *3*, *4*.... *m* polynomios.

Com effeito, tratando-se de multiplicar *m* polynomios, determinaremos em primeiro lugar o producto de dous entre elles e este producto combinado com os *(m — 2)* factores restantes reduzirá a questão á multiplicação de *(m — 1)* polynomios; determinada a expressão equivalente ao producto de um dos *(m — 2)* polynomios pela expressão producto já obtida, este novo polynomio combinado com os *(m — 3)* restantes reduzirá a questão á multiplicação de *(m — 2)* polynomios; assim se continúa até reduzir a questão á multiplicação de um dos polynomios dados por um polynomio equivalente ao producto dos *(m — 1)* restantes.

Este caso reduz-se ao da multiplicação de monomios, unico fundamental, por intermedio daquelle em que se multiplicam polynomios por monomios.

§ 18

Transformação das formulas pela divisão algebrica

120 — DIVISÃO DE UM MONOMIO POR OUTRO — Para apreciar a divisão algebrica no seu caso mais simples, seja proposto resolver a equação:

$$a + 9x = \frac{6a^2b^2c^2e}{20a^3b^4c^5d} - \frac{30a^3b^4c^5d}{10a^2b^3c^4} + \frac{3a^2b^2c^2d^2}{9a^2b^2c^2a^2} + 6x + a$$

Fazendo a transposição virá:

$$9x - 6x = \frac{6a^2b^2c^2e}{20a^3b^4c^5d} - \frac{30a^3b^4c^5d}{10a^2b^3c^4} + \frac{3a^2b^2c^2d^2}{9a^2b^2c^2d^2}$$

Compondo virá:

$$3x = \frac{6a^2b^2c^2e}{20a^3b^4c^5d} - \frac{30a^3b^4c^5d}{10a^2b^3c^4} + \frac{3a^2b^2c^2d^2}{9a^2b^2c^2d^2}$$

Procedendo ao isolamento da incognita, virá:

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{6a^2b^2c^2e}{20a^3b^4c^5d} - \frac{30a^3b^4c^5d}{10a^2b^3c^4} + \frac{3a^2b^2c^2d^2}{10a^2b^2c^2d^2}\right)$$

E' claro que simplificando a expressão contida no parenthesis, esta fórmula tornar-se-á a mais simples:

Ora, tomando o primeiro termo

$$\frac{6a^2b^2c^2e}{20a^3b^4c^5d},$$

vê-se logo a possibilidade de transformal-o em

$$\frac{3e}{10ab^2c^3d},$$

Dedicam

porquanto o dividendo é o producto de $3e$ por $2a^2b^2c^2$ e o divisor é o producto de $10\,ab^3c^3d$ pela mesma quantidade.

Dividindo, pois, um e outro pela mesma quantidade virá:

$$\frac{6a^2b^2c^2d}{20a^3b^4c^5d} = \frac{3e}{10ab^2c^3d} \times \frac{2a^2b^2c^2}{2a^2b^2c^2} = \frac{3e}{10ab^2c^3d}$$

Tomando agora o segundo termo da fórmula, isto é,

$$\frac{30a^3b^4c^5d}{10a^2b^3c^4}$$

pode-se substituil-o por $3abcd$, porquanto, considerando o dividendo como o producto de $3abcd$ por $10a^2b^3c^4$ e attendendo a que o divisor é $10a^2b^3c^4$, teremos:

$$\frac{30a^3b^4c^5d}{10a^2b^3c^4} = 3abcd \times \frac{10a^2b^2c^2}{10a^2b^2c^2} = 3abcd$$

Finalmente, o termo

$$\frac{3a^2b^2c^2d^2}{9a^2b^2c^2d^2}$$

pode ser reduzido a

$$\frac{3}{9}$$

porquanto a parte literal do divisor é igual á do dividendo.

A fórmula obtida transforma-se pois, em

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{3e}{10a^2b^2c^3d} - 3abcd + \frac{3}{9}\right) = \frac{e}{10a^2b^2c^3d} - abcd + \frac{1}{9}$$

O processo que é preciso seguir geralmente em todas transformações da mesma natureza que a precedente, isto é, na *divisão de um monomio por outro* — deduz-se facilmente, sobretudo conhecendo já a regra para multiplicar dois monomios.

Com effeito tomemos o termo

$$\frac{6a^2b^2c^2e}{20a^3b^4c^5d}$$

cujo quociente vimos ser igual a

$$\frac{3e}{10ab^2c^3d} \text{ ou } \frac{3}{10} a^{-1}b^{-2}c^{-3}d^{-1}e$$

O dividendo sendo igual ao producto do divisor pelo quociente, é claro que este não poderá ser sinão um monomio, porque vimos que o producto de dois monomios é sempre um monomio.

O dividendo $6a^2b^2c^2e$ é portanto o producto de dois monomios, um dos quaes é o divisor $20a^3b^4c^5d$ e o outro o quociente.

Mas, segundo a regra da multiplicação de dois monomios, o coefficiente *6* do dividendo é o producto do coefficiente *20* do divisor pelo coefficiente do quociente; por conseguinte o coefficiente do quociente achar-se-á dividindo *6* por *20*, o que dá

$$\frac{6}{20} \text{ ou } \frac{3}{10}$$

Os expoentes das letras que entram no dividendo sendo a somma dos expoentes que ellas têm no divisor com os que as affectam no quociente, concluimos que para obter estes expoentes do quociente devemos subtrair os expoentes do divisor dos expoentes do dividendo:

Assim a letra a entrando no dividendo com o expoente *2* e no divisor com o expoente *3*, terá no quociente o expoente $2-3=\frac{1}{a}$; pela mesma razão, as letras b e c terão no quociente os expoentes $2-4$ e $2-5$, isto é, -2 e -3.

Quanto ás letras d e e, que só entram esta no dividendo e aquella no divisor, podemos admittir que ellas figurem no factor onde não se acham representadas, com o expoente zero.

Ora, suppondo *e* no divisor com o expoente zero, o seu expoente no quociente será $1-0$, ou 1, e suppondo d no dividendo com o expoente zero, o seu expoente no quociente será $0-1=1$, por isso que ella figura no divisor com e expoente 1.

O quociente será, portanto

$$\frac{3}{10}\ a^{-1}b^{-2}c^{-3}d^{-1}e$$

isto é, igual ao que já tinhamos obtido.

E como a marcha que acabamos de seguir tem toda a generalidade, applicando-a aos outros termos,

$$\frac{30a^3b^4c^5d}{10a^2b^3c^4} \text{ e } \frac{3a^2b^2c^2d^2}{9a^2b^2c^2d^2}$$

teremos $3abcd$ para quociente do primeiro

$$e\ \frac{3}{9}\ a^0b^0c^0d^0\ ou\ \frac{3}{9}$$

para o segundo.

Podemos, pois, concluir que *para dividir um monomio por outro divide-se o coefficiente do dividendo pelo coefficiente do divisor e obtem-se assim o coefficiente do quociente; escrevem-se neste as letras communs e não communs aos dois monomios, dando-lhes um expoente igual á differença entre os expoentes do dividendo e do divisor, tendo para isso o cuidado de considerar as letras que só figurem em um dos monomios como se entrassem no outro com o expoente zero.*

Como esta regra tem grande applicação na simplificação das expressões algebricas, vamos nos exercitar no seu emprego:

1º. Seja

$9a^5d^3f^2$ a dividir por $3a^2d^4gh$.

Teremos

$$\frac{9a^5\,d^3\,f^2}{3a^2\,d^4\,gh} = 3a^3\,d^{-1}\,f^2\,g^{-1}\,h^{-1}$$

2°. Seja ainda $18a^4\,b^7\,d^3$ a dividir por

$$\frac{9}{2}\,a^3\,b^5\,d^3$$

Virá:

$$\frac{18a^4\,b^7\,d^3}{\frac{9}{2}\,a^3\,b^5\,d^3} = 4ab^2\,d^0 = 4ab^2$$

3°. Seja ainda

$$8a^{\frac{3}{2}}b^6\,c^{\frac{3}{2}}de^{-2}$$

a dividir por

$$14a^2\,b^{\frac{1}{2}}\,c^{\frac{5}{2}}\,e^{-1};$$

será

$$\frac{8a^{\frac{3}{2}}\,b^6\,c^{\frac{3}{2}}\,de^{-2}}{14a^2\,b^{\frac{1}{2}}\,c^{\frac{5}{2}}\,e^{-1}} = \frac{4}{7}\,a^{-\frac{1}{2}}\,b^{\frac{11}{2}}\,c^{-1}\,de^{-1}$$

o quociente procurado.

Do que temos exposto conclue-se que a divisão de dois monomios é sempre possivel, desde que não se imponha ao quociente a condição de ser inteiro em relação a uma ou mais letras das que fazem parte do dividendo, isto é, a condição de não conterem estas letras expoente fraccionario ou negativo.

Si o quociente deve ser inteiro em relação a uma letra, a divisão só será possivel:

1°. Quando esta letra entra realmente no dividendo e no divisor ou somente naquelle;

2°. Quando seu expoente é inteiro e positivo e tem além disso no dividendo um valor numerico maior que no

divisor. Si o quociente deve ser inteiro em relação a todas as letras, será preciso :

1°. Que no monomio dividendo figurem todas as letras que se acham no divisor ;

2°. Que o expoente de cada uma, além de inteiro e positivo, seja maior ou pelo menos igual ao que ella tem no divisor.

Reciprocamente, o quociente será fraccionario:

1°. Quando o monomio divisor contiver alguma letra que não figure no dividendo ;

2°. Quando no divisor entrar alguma letra com expoente mais elevado que no dividendo.

Si além daquellas condições exigir-se que o coefficiente seja inteiro, será preciso ainda que o coefficiente do dividendo seja divisivel exactamente pelo do divisor.

121 — EXAME DO CASO DA DIVISÃO DE UM POLYNOMIO POR UM MONOMIO. Este caso reduz-se ainda ao precedente, e para comprehendel-o vamos resolver a equação

$$2a^3x = \frac{4}{3}\,a^2b + \frac{3b^2c}{7d} - \frac{6a^2c^2}{10e} - \frac{2}{9}\,a^3x$$

Fazendo a transposição dos termos obtem-se

$$2a^3x + \frac{2}{9}\,a^3x = \frac{4}{3}\,a^2b + \frac{3b^2c}{7d} - \frac{6a^2c^2}{10e}$$

Feita a transposição dos termos, nós temos visto que, no intuito de obter uma fórmula simples, convém sempre simplificar o mais possivel os dois membros da equação. Ora, a reducção dos termos semelhantes transforma immediatamente o primeiro membro da equação proposta, porque

$$2a^3\,x + \frac{2}{9}\,a^3x = \frac{18}{9}\,a^3\,x + \frac{2}{9}\,a^3\,x = \frac{20}{9}\,a^3\,x.$$

A equação transforma-se em

$$\frac{20}{9}\,a^3\,x = \frac{4}{3}\,a^2\,b + \frac{3b^2\,c}{7d} - \frac{6a^2\,c^2}{10e}$$

Mas não só o segundo membro, como ainda o primeiro, podem ser simplificados, porque se podem fazer desapparecer, um após outro, todos os divisores da equação dada.

Bastará, para isso, multiplicar todos os termos da equação pelo divisor de um termo para que este divisor desappareça neste termo. Repetindo esse processo para os outros divisores, elles desapparecerão todos.

Em lugar, porém, de seguir essa marcha espontanea, poder-se-á de uma só vez expellir todos os divisores, multiplicando os termos da equação por uma quantidade que seja um multiplo de todos elles, e quanto menor for este multiplo comprehende-se que melhor será.

Na equação dada este menor multiplo é

$$9 \times 7\ d \times 10e = 630ed$$

de mais, em lugar de multiplical-o por todos os termos da equação para depois, mediante a divisão, fazer desapparecer successivamente os divisores, pode-se abreviar dividindo seguidamente o menor multiplo dos divisores por cada um delles e multiplicar o quociente pelo dividendo respectivo. Procedendo deste modo, a equação dada se transformará em:

$$1400\ a^3\ dex = 840\ a^2\ b\ de + 270\ b^2\ ce - 378\ a^2\ c^2\ d.$$

Fazendo o isolamento da incognita, virá

$$x = \frac{840a^2bde + 270b^2ce - 378a^2c^2d}{1400a^3de}$$

No intuito de simplificar ainda esta fórmula, façamos a divisão do polynomio pelo monomio divisor, o que deve parecer facil depois de termos visto como se multiplica um polynomio por um monomio.

Com effeito, o producto de um monomio por um monomio sendo ainda um monomio, o quociente procurado não póde ser sinão um polynomio que, multi-

plicado pelo monomio divisor, deve reproduzir o polynomio dividendo.

Ora, para formar este producto ter-se-ia que multiplicar o monomio divisor por cada um dos termos do polynomio quociente, e assim se formariam os differentes termos do dividendo.

Resulta, pois, que inversamente se obterão os termos do polynomio quociente, dividindo cada termo do polynomio dividendo pelo monomio divisor, de accordo com a regra do caso precedente para dividir um monomio por outro.

Demais, na multiplicação dos termos do polynomio quociente pelo divisor, nós sabemos que resultariam termos positivos para o dividendo quando os termos multiplicados fossem do mesmo signal, e termos negativos quando elles fossem de signaes contrarios.

Em vista disto concluimos tambem que serão positivos os termos do polynomio quociente que resultarem da divisão de dois monomios do mesmo signal, e negativos os que resultarem da divisão de dois monomios de signaes contrarios.

O que fica dito nos leva a concluir que *para effectuar a divisão de um polynomio por um monomio divide-se successivamente cada termo do polynomio pelo monomio, precedendo o quociente do signal positivo quando o dividendo e o divisor forem do mesmo signal, e do signal negativo, no caso contrario.*

No exemplo acima temos que dividir

$$840\,a^2bde + 270\,b^2cde - 378\,a^2c^2de \text{ por } 1400\,a^3de.$$

Dividiremos $840\,a^2bde$ por $1400\,a^3\,de$ e achamos o primeiro termo do quociente

$$\frac{3}{5}\,\frac{b}{a} = \frac{3}{5}\,a^{-1}b$$

Como cada um dos differentes termos do polynomio dividendo é exactamente o producto do divisor por um termo distincto do quociente, torna-se desnecessario multiplicar este quociente parcial, ou antes este termo do quociente procurado pelo divisor e subtrahir o producto do dividendo, á similhança do que se faz em arithmetica.

A *priori* sabemos que dividido cada termo do polynomio dividendo pelo monomio divisor, esta divisão não deixa resto, por isso que cada termo do dividendo é exactamente o producto do divisor pelo termo procurado.

Passando pois a dividir o segundo termo do polynomio considerado pelo divisor, teremos o segundo termo do quociente, isto é,

$$\frac{270\ b^2cde}{1400\ a^3de} = \frac{27}{140}\ a^{-3}b^2c$$

dividindo emfim o ultimo termo do dividendo pelo divisor, teremos

$$\frac{378\ a^2c^2de}{1400\ a^3de} = \frac{27}{100}\ \frac{c^2}{a} = \frac{27}{100}\ a^{-1}c^2$$

para ultimo termo do quociente.

O quociente procurado é, portanto,

$$\frac{3}{5}\ a^{-1}b + \frac{27}{140}\ a^{-3}b^2c + \frac{27}{100}\ a^{-1}c^2,$$

expressão a que se reduz o segundo membro da fórmula acima.

Como esta transformação é muito util, vamos nos exercitar no seu emprego:

1°. Seja

$$2\ abc^7 - 2\ b^2c^2d^3 + 8\ bc^2$$

a dividir por

$$2\ bc^2$$

Podemos dispor o calculo do seguinte modo :

$$\frac{2\,abc^7 - 2\,b^2c^2a^3 + 8\,bc^2}{2\,bc^2} = \frac{2\,abc^7}{2\,bc^2} - \frac{2\,b^2c^2d^3}{2\,bc^2} + \frac{8\,bc^2}{2\,bc^2} =$$

$$= ac^5 - bd^3 + 4.$$

2°. Seja ainda

$$5\,bcx^{-3} - 4bcx^2 + 25bc$$

a dividir por

$$5\,bcx^6$$

Teremos :

$$\frac{5\,bcx^{-3} - 4\,bcx^2 + 25\,bc}{5\,bcx^6} = \frac{5\,bcx^{-3}}{5\,bcx^6} - \frac{4\,bcx^2}{5\,bcx^6} +$$

$$+ \frac{25\,bc}{5\,bcx^6} = x^{-9} - \frac{4}{5}\,x^{-4} + 5x^{-6}$$

Seja emfim $a + cx^2$ a dividir por ax^3

Teremos

$$\frac{a + cx^2}{ax^3} = \frac{a}{ax^3} + \frac{cx^2}{ax^3} = \frac{1}{x^3} + \frac{c}{ax} = x^{-3} + a^{-1}cx^{-1}$$

Para que o quociente seja inteiro em relação a uma das letras que figuram no dividendo e no divisor, isto é, para que não contenha esta letra com expoente fraccionario nem negativo, será evidentemente preciso :

1°. Que nos termos onde entrar aquella letra no polynomio dividendo tenha ella expoente maior ou pelo menos igual ao que possue no divisor ;

2°. Que figure em todos os termos do dividendo quando se achar no divisor.

Si o quociente deve ser inteiro em relação a todas as letras será preciso que para cada uma das letras sejam satisfeitas as duas condições acima.

Si além disso se exigir que os coefficientes dos termos do quociente sejam inteiros, será então preciso que cada

um dos coefficientes do dividendo seja exactamente divisivel pelo coefficiente do divisor.

Como a divisão de um polynomio por um monomio reduz-se sempre á de cada um dos monomios que constituem aquella expressão algebrica pelo que serve de divisor, pode-se dizer simplesmente que o quociente da divisão de um polynomio por um monomio é inteiro quando cada um dos termos daquelle, sendo dividido por este, produzir um quociente inteiro em relação ás letras consideradas.

122 — DIVISÃO DE UM POLYNOMIO POR OUTRO — Este caso reduz-se tambem ao precedente.

Para aprecial-o seja proposto resolver a equação

$$\frac{ab^{-2} + ab^{-1}d - abx}{d - c} = ax - ac$$

Para expellir o divisor $(d - c)$ multiplicaremos ambos os membros por $d - c$ o que dará

$$ab^{-2} + ab^{-1}d - ab^{-1}x = (ax - ac)(d - c)$$

Effectuando esta multiplicação com o fim de desembaraçar a incognita, teremos:

$$ab^{-2} + ab^{-1}d - ab^{-1}x = adx - acd - acx + ac^2.$$

Fazendo a transposição dos termos, obtem-se:

$$ab^{-2} + ab^{-1}d + acd - ac^2 = ab^{-1}x + adx - acx.$$

Effectuando a composição ter-se-á

$$(ab^{-1} + ad - ac)\,x = ab^{-2} + ab^{-1}d + acd - ac^2$$

Isolando finalmente a incognita virá:

$$x = \frac{ab^{-2} + ab^{-1}d + acd - ac^2}{ab^{-1} + ad - ac}$$

Nesta fórmula, uma certa relação que se percebe logo entre os termos do dividendo e os do divisor, faz suspeitar

que a divisão terá lugar exactamente e convida por conseguinte a tentar esta operação, que deve parecer muito facil depois de termos visto como se procede a sua inversa, isto é, a multiplicação.

Para reconhecer si com effeito

$$ab^{-1} + ad - ac$$

divide exactamente

$$ab^{-2} + ab^{-1}d + acd - ac^2$$

dividamos a principio um dos termos desta ultima quantidade por um dos da primeira,

$$ab^{-2} \text{ por } ab^{-1}$$

por exemplo, e escrevamos o quociente

$$b^{-1}$$

Em seguida multipliquemos este quociente

$$b^{-1}$$

ou antes esta primeira parte do quociente procurado, pelo divisor total

$$ab^{-1} + ad - ac$$

e subtraiamos o producto

$$ab^{-2} + ab^{-1}d - ab^{-1}c$$

do dividendo; o resto,

$$ab^{-2} + ab^{-1}d + acd - ac^2 - (ab^{-2} + ab^{-1}d - ab^{-1}c)$$

ou

$$acb^{-1} + acd - ac^2,$$

deverá ser ainda dividido pelo mesmo divisor; e o seu quociente deverá ser sommado com

$$b^{-1}$$

para formar o quociente total procurado.

Para fazer esta divisão tomaremos ainda um dos termos da expressão

$$acb^{-1} + acd - ac^2,$$

que resta a dividir, e o dividiremos por um outro do divisor.

Escolhamos

$$acb^{-1}$$

por exemplo, que é o primeiro termo do resto, para dividir por ab que tambem é o primeiro do divisor.

Ora, esta divisão dá immediatamente c; multiplicando pois este novo quociente pelo divisor total

$$ab^{-1}c + ad - ac,$$

e subtrahindo o producto,

$$ab^{-1}c + acd - ac^2,$$

do dividendo considerado,

$$acd - ac^2 + ab^{-1}c$$

obteremos um resto nullo porque estas duas quantidades são as mesmas. Por este motivo concluimos que

$$b^{-1} + c$$

é exactamente o quociente da divisão de

$$ab^{-2} + ab^{-1}d + acd - ac^2$$

por

$$ab^{-1} + ad - ac.$$

Teremos, pois,

$$x = \frac{ab^{-2} + ab^{-1}d + acd - ac^2}{ab^{-1} + ad - ac} = b^{-1} + c$$

Depois de haver feito a divisão precedente de um polynomio por outro, procuremos justificar a marcha seguida

e estabelecer para ella uma regra que sirva em todas as transformações analogas.

Isso torna-se facil porque conhecendo a regra para multiplicar um polynomio por outro, percebe-se logo que no exemplo acima, como em qualquer outro, a divisão consiste em achar uma expressão algebrica que multiplicada pelo divisor reproduza o dividendo.

Ora, o dividendo sendo um polynomio e o divisor tambem, o quociente obtido não pode deixar de ser um polynomio, o qual, como dissemos, reproduz o dividendo quando multiplicado pelo divisor.

Mas, em virtude da regra para multiplicar dois polynomios, o polynomio dividendo seria obtido formando o producto do polynomio divisor pelo polynomio quociente.

Como, porém, para effectuar esta multiplicação ter-se-ia de formar os productos de todos os termos do divisor pelos do quociente um a um, é claro que dividindo um dos termos do polynomio dividendo por um dos do divisor, ter-se-á um termo do polynomio quociente.

Mas, por ser o dividendo igual á somma dos productos parciaes do divisor pelos differentes termos do quociente, subtrahindo delle o producto do divisor pelo termo achado para o quociente, o resto será o producto do divisor pelos outros termos do mesmo quociente.

Dividindo-se pois um dos termos do resto obtido pelo primeiro termo do divisor ter-se-á outro termo do quociente.

Raciocinando sobre este segundo termo e sobre o primeiro resto, como acabamos de fazer sobre o primeiro termo do quociente e sobre o dividendo proposto obter-se-á o terceiro termo do quociente.

Proseguindo-se deste modo chegar-se-á ou não a um resto nullo, e assim a divisão far-se-á ou não exactamente.

No primeiro caso o dividendo será restrictamente igual ao producto do divisor pelo quociente, mas no

Universidade de S. Paulo
Filosofia
Departamento de Matemática

segundo será preciso addicionar ao quociente achado a relação entre o resto obtido e o divisor proposto, a qual se considera como um complemento do quociente formulado...

Como exemplo do primeiro caso, seja a dividir

$$\frac{3}{10} a^2 x^{-3} + \frac{9}{56} ac^2 d^{-1} x^{-2} + 3ax^{-2} - \frac{8}{25} ac^5 e^{-1} x^{-1} - \\ - \frac{6}{35} c^7 d^{-1} e^{-1} - \frac{16}{5} c^5 e^{-1}$$

por

$$\frac{4}{5} ax^{-1} + \frac{3}{7} c^2 d^{-1} + 8.$$

Dispondo o calculo á semelhança do que se faz em arithmetica, virá:

$$\frac{3}{10}a^2x^{-3} + \frac{9}{56}ac^2d^{-1}x^{-2} + 3ax^{-2} - \frac{8}{25}ac^5e^{-1}x^{-1} - \frac{6}{35}c^7d^{-1}e^{-1} - \left|\begin{array}{l}\frac{4}{5}ax^{-1} + \frac{3}{7}c^2d^{-1} + 8\\ \frac{3}{8}ax^{-2} - \frac{2}{5}c^5e^{-1}\end{array}\right.$$

$$-\frac{12}{40}a^2x^{-3} - \frac{9}{56}ac^2d^{-1}x^{-2} - 3ax^{-2} \qquad -\frac{16}{5}c^5e^{-1}$$

$$-\frac{8}{25}ac^5e^{-1}x^{-1} - \frac{6}{35}c^7d^{-1}e^{-1} - \frac{16}{5}c^5e^{-1}$$

$$+\frac{8}{25}ac^5e^{-1}x^{-1} + \frac{6}{35}c^7d^{-1}e^{-1} + \frac{16}{5}c^5e^{-1}$$

$$0$$

Neste caso a divisão é exacta, e o dividendo é igual ao producto do divisor pelo quociente.

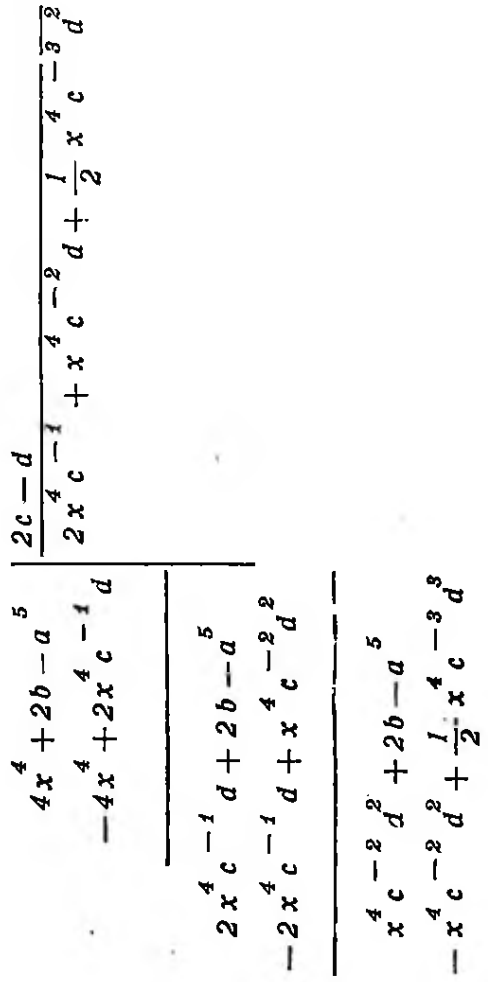
2.° Seja ainda:

$$4x^4 + 2b - a^5$$

a dividir por

$$2c - d$$

Teremos:



Neste caso a divisão não é exacta; o dividendo é igual ao producto do divisor pelo quociente mais o resto.

O quociente deve pois ser completado com a relação:

$$\left(\frac{1}{2}x^4c^{-3}d^3 + 2b - a^5\right) \div (2c - d).$$

Como nesta operação se poderia ter embaraço em escolher entre os termos do dividendo e do divisor, aquelles que devem servir para formar os termos do quociente, note-se que é possivel evitar as tentativas nesta escolha procedendo do seguinte modo:

1.° Si o dividendo e o divisor não têm factores literaes communs dividem-se em primeiro lugar os termos do dividendo que têm maior expoente em relação ás differentes letras que nelle se acham;

2.° Si o dividendo e o divisor têm factores literaes communs, ordenam-se ambos em relação a um destes factores e dividem-se successivamente *os termos* do dividendo pelo primeiro do divisor.

123 — INSPECÇÃO DO CASO USUAL EM QUE SÃO POLYNOMIOS INTEIROS OS TERMOS DA DIVISÃO. Tendo estabelecido com toda a generalidade a divisão de um polynomio por outro, vamos agora considerar o caso particular em que o dividendo e o divisor são polynomios inteiros em relação a uma ou mais letras, e em que a expressão do quociente fica tambem sujeita á mesma condição.

Já sabemos que um polynomio se diz inteiro em relação a uma ou mais letras quando os seus termos somente contêm estas letras com expoentes inteiros e positivos.

Supponhamos, por exemplo, que se procura o quociente da divisão dos seguintes polynomios inteiros em relação a x,

$$4a^3x^3 + a^6 + 3a^4x^2 + 9ax^5 - 12a^2x^4 + 4a^5x$$

e

$$a^6 + 3a^4x^2 - 2a^5x;$$

isto é, que se procura o polynomio inteiro em relação a x que, sendo multiplicado, por este ultimo reproduza aquelle.

Ordenando os dois polynomios em relação ás potencias decrescentes da letra x virá:

$$9ax^5 - 12a^2x^4 + 4a^3x^3 + 3a^4x^2 + 4a^5x + a^6$$

e

$$3a^4x^2 - 2a^5x + a^6.$$

Si fosse conhecido o polynomio quociente, ordenando-o em relação ás potencias decrescentes de x, e multiplicando-o pelo divisor

$$3a^4x^2 - 2a^5x + a^6,$$

teriamos o polynomio dividendo.

Como porém o primeiro termo do producto de dois polynomios ordenados é, sem reducção o producto dos dois primeiros termos destes polynomios, concluimos que o primeiro termo do quociente se obtem dividindo o primeiro termo do dividendo pelo primeiro do divisor.

Mas, sendo o dividendo e o divisor inteiros em relação a uma letra, para que este primeiro termo do quociente satisfaça a mesma condição, será preciso que o expoente desta letra no dividendo seja maior ou pelo menos igual ao expoente da mesma letra no divisor.

E' o que se dá no caso em questão, porque $9ax^5$ sendo, dividido por $3a^4x^2$ dá o quociente $3a^{-3}x^3$, que é inteiro em relação a x.

Si multiplicarmos este primeiro termo do quociente pelo divisor e subtrahirmos esse producto do dividendo, obter-se-á um resto,

$$-6a^2x^4 + a^3x^3 + 3a^4x^2 + 4a^5x + a^6$$

ainda ordenado em relação a x.

Como porém este resto representa a somma dos productos do divisor por cada um dos outros termos do quociente, dividindo o seu primeiro termo pelo primeiro do divisor, obteremos o segundo do quociente.

Este termo do quociente será inteiro em relação a x si o expoente de x no primeiro termo do resto for maior que o mesmo expoente no primeiro do divisor.

E' o que se verifica no caso em questão, porque — $6a^2x^4$ dividido por $3a^4x^2$ dá para quociente $-2a^{-2}x^2$.

Proseguindo na divisão e raciocinando do mesmo modo, somos levados a concluir o seguinte:

O quociente da divisão de dois polynomios, ordenados segundo as potencias decrescentes de uma letra, só poderá ser inteiro em relação a ella quando a divisão do primeiro termo de cada um dos dividendos parciaes pelo termo do mais alto grau do divisor, der um quociente inteiro.

Do mesmo modo, si o dividendo e o divisor forem polynomios inteiros em relação a mais de uma letra, o quociente só o poderá ser quando o primeiro termo de cada um dos dividendos parciaes dividido pelo primeiro do divisor der um quociente inteiro em relação ás mesmas letras.

Si uma destas condições não for satisfeita o quociente será necessariamente fraccionario.

E' assim que, si a letra ordenadora figurar no primeiro termo de um dos dividendos parciaes com expoente menor do que ella tem no divisor, podemos affirmar que o quociente é fraccionario em relação a ella.

Do mesmo modo o quociente não poderá ser inteiro em relação a todas as letras desde que uma dellas se ache no primeiro termo do divisor e não figure no primeiro de um dos dividendos parciaes.

E' evidente que, havendo um resto, será preciso que este se annulle para que a divisão seja exacta.

Isso só poderá ter lugar si o dividendo ou o divisor encerrarem coefficientes indeterminados capazes de uma tal condição, porque neste caso o resto encerrando estes coefficientes, poderemos impor-lhes as condições de uma exacta divisibilidade.

Por exemplo, dividindo o polynomio

$$x^4 + 3x^2 + ax + b$$

por

$$x^2 - x - 1,$$

obtem-se o resto

$$(a + 6)\,x + (b + 5).$$

Ora, este resto sendo um polynomio inteiro e do primeiro grau em x, só poderá annullar-se para qualquer valor attribuido a esta variavel quando os seus coefficientes forem separadamente nullos.

Será preciso, portanto, que se tenha

$$a + b = o \quad \text{e} \quad b + 5 = o.$$

Estas duas equações nos dão as condições necessarias e bastantes para que a divisão seja exacta.

Com effeito, resolvendo a primeira em relação a a e a segunda em relação a b teremos $a = -6$ e $b = -5$ e substituindo os valores destes dois coefficientes no polynomio dividendo teremos

$$x^4 + 3x^2 - 6x - 5$$

que effectivamente é igual ao producto de

$$x^2 + x + 5 \text{ por } x^2 - x - 1.$$

O resto tendo no maximo um grau inferior de uma unidade ao do divisor, o numero de seus termos será no maximo igual ao grau deste, que marca portanto o maximo de condições que devem ser impostas ás grandezas indeterminadas para que seja exacta a divisão num caso qualquer.

Emfim, quer se ordene em relação ás potencias decrescentes, quer em relação ás potencias crescentes, a marcha a seguir para obter o quociente da divisão de dois

polynomios inteiros em relação a uma ou mais letras, consiste em *ordenar o dividendo e o divisor em relação á mesma letra e dividir o primeiro termo daquelle pelo primeiro deste, o que dará o primeiro do quociente; multiplicar este quociente pelo divisor e subtrahir o producto do dividendo; dividir o primeiro termo do resto pelo primeiro do divisor, o que dará o segundo do quociente, continuar assim até obter um resto nullo, caso em que o quociente será inteiro em relação ás letras consideradas, ou até chegar a um resto de grau inferior ao divisor, caso em que o quociente será fraccionario em relação ás mesmas letras.*

Tomemos um ultimo exemplo. Seja a dividir

$$4b^5x^3 + 2b^7x - 6b^4x^4 - 4b^8 - 8b^6x^2 + 6a^4x^4 - 20a^2b^4x^2 - \\ - 5a^2b^2x^4 + 24ab^4x^3 - a^4b^2x^2 - 3a^3b^2x^3 - 7a^2b^3x^3 + 5a^6x^2 - \\ - 3a^5b^2x - 3a^4b^3x + 18ab^6x + a^8$$

por

$$a^4 - 3b^2x^2 + 3ab^2x - 2b^4 + 2a^2x^2 - b^3x.$$

Ordenando os dois polynomios, verifica-se que os seus coefficientes são por sua vez polynomios.

Neste caso dividem-se os coefficientes como se fossem polynomios distinctos, e em seguida a letra principal.

Disporemos o calculo de seguinte modo:

Dividendo

$6a^4$	$x^4 - 3a^3b^2$	$x^3 + 5a^6$	$x^2 - 3a^5b^2$	$x + a^8$
$-5a^2b^2$	$-7a^2b^3$	$-a^4b^2$	$-3a^4b^3$	$-4b^8$
$-6b^4$	$+24ab^4$	$-20a^2b^4$	$+18ab^6$	
	$+4b^5$	$-8b^6$	$+2b^7$	
0	$-9a^3b^2$	$x^3 - 3a^6$	x^2	
	$+3a^2b^3$	$+6a^2b^4$		
	$-6ab^4$	$-2a^4b^2$		
	$+2b^5$	$+4b^6$		
	$-12a^3b^2$	$x^3 + 2a^6$	x^2	
	$-4a^2b^3$	$-3a^4b^2$		
	$+18ab^4$	$-14a^2b^4$		
	$+6b^5$	$-4b^6$		
	0	$+18a^2b^4$	$x^2 + 6a^5b^2$	x
		$-6ab^5$	$-12ab^6$	
		$+6ab^5$	$+2a^4b^3$	
		$-2b^6$	$-4b^7$	
		$+2a^6$	$x^2 + 3a^5b^2$	x
		$-3a^4b^2$	$-a^4b^3$	
		$+4a^2b^4$	$+6ab^6$	
		$-6b^6$	$-2b^7$	
		0	$-3a^5b^2$	$x - a^8$
			$+a^4b^3$	$+4b^3$
			$-6ab^6$	
			$+2b^7$	
			0	0

Divisor

$$\begin{array}{r|l|l} 2a^2 & x^2 + 3ab^2 & x + a^4 \\ -3b^2 & -b^3 & -2b^4 \end{array}$$

Quociente

$$\begin{array}{r|l|l} 3a^2 & x^2 - 6ab^2 & x + a^4 \\ +2b^2 & -2b^3 & +2b^4 \end{array}$$

124 — CASO PARTICULAR EM QUE O DIVISOR É UM BINOMIO DA FORMA $x \mp a$.

Seja a dividir:

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + Ax_3^{m-3} + \ldots + A_{m-1}x + A_m$$

por $x - a$.

Teremos, applicando a regra acima:

$$
\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
Ax^m+A_1 & x^{m-1}+A_2 & x^{m-2}+A_3 & x^{m-3}+A_4 & x^{m-4}+\ldots+A_{m-1} & x+A_m \\
\quad +A_0a & \quad +A_1a & \quad +A_2a & \quad +A_3a & \quad +A_{m-2}a & \quad +A_{m-1}a \\
 & \quad +A_0a^2 & \quad +A_1a^2 & \quad +A_2a^2 & \quad +A_{m-3}a^2 & \quad +A_{m-2}a^2 \\
 & & \quad +A_0a^3 & \quad +A_1a^3 & \quad +\ldots+\ldots & \\
 & & & \quad +A_0a^4 & \vdots\quad\vdots & \\
 & & & & +\ldots+A_1a^{m-2} & +A_1a^{m-1} \\
 & & & & +\ldots+A_0a^{m-1} & +A_0a^m
\end{array}
\Big| x-a
$$

$$
\begin{array}{l|l|l|l|l}
A_0 & x^{m-1}+A_1 & x^{m-2}+A_2 & x^{m-3}+\ldots+A_{m-2} & x+A_{m-1} \\
 & \quad +A_0a & \quad +A_1a & \quad +A_{m-3}a & \quad +A_{m-2}a \\
 & & \quad +A_0a^2 & \quad +A_{m-4}a^2 & \quad +A_{m-3}a^2 \\
 & & & +\ldots & \quad + \\
 & & & \vdots & \vdots \\
 & & & +A_0a^{m-2} & +A_0a^{m-1}
\end{array}
$$

A apreciação deste quociente nos mostra :

1°. Que o gráo do polynomio quociente é como sempre igual á differença entre o gráo do dividendo e do divisor ;

2°. Que o coefficiente do primeiro termo do quociente é igual ao do primeiro termo do dividendo ; que o coefficiente do segundo termo do quociente se forma multiplicando o coefficiente do termo precedente pelo segundo termo do divisor tomado com o signal trocado e ajuntando a este producto o coefficiente do segundo termo do dividendo ; e em geral, que o coefficiente de um termo qualquer se forma multiplicando o coefficiente do precedente pelo ultimo termo do divisor com o signal trocado e sommando a este producto o coefficiente de termo que occupa a mesma ordem no dividendo ;

3°. Que a letra ordenadora do quociente é a mesma do dividendo e do divisor e que tambem o expoente desta letra decresce de uma unidade de um termo ao seguinte.

Representando por

$$V_0,\ V_1,\ V_2,\ V_3 \ldots\ V_{m-1}$$

os coefficientes dos termos do quociente, podemos, portanto escrever :

$$V_0 = A_0,\ V_1 = V_0 a + A_1,\ V_2 = V_1 a + A_2,\ V_3 = V_2 a + A_3 \ldots$$
$$V_{m-2} = V_{m-3} a + A_{m-2},\ V_{m-1} = V_{m-2} a + A_{m-1}$$

Observando o coefficiente de cada um dos restos das divisões parciaes nota-se que elle é sempre formado multiplicando o termo correspondente do quociente pelo ultimo termo divisor e ajuntando a este producto o termo correspondente do dividendo.

Representando por

$$R_0,\ R_1,\ R_2 \ldots\ R_{m-1} \text{ e } R_m$$

estes differentes restos, teremos assim para resto da primeira divisão parcial

$$R_0 = V_0a + A_1,\ R_1 = V_1a + A_2,\ R_2 = V_2a + A_3 \ldots\ R_{m-2} = V_{m-2}a + \\ + A_{m-1},\ R_{m-1} = V_{m-1}a + A_m.$$

Substituindo

$$V_0,\ V_1,\ V_2\ etc.,$$

pelas suas expressões virá

$R_0 = A_0a + A_1$; $R_1 = (V_0a + A_1)\,a + A_2 + \text{etc.} = A_0a^2 + A_1a + A_2 +$ $+ \text{etc.}$; $R_2 = (V_1a + A_2)\,a + A_3 + \text{etc.} = V_1a^2 + A_2a + A_3 + \text{etc.} =$ $= (V_0a + A_1)\,a^2 + A_2a + A_3 + \text{etc.} = V_0a^3 + A_1a^2 + A_2a + A_3 + \text{etc.} =$ $= A_0a^3 + A_1a^2 + A_2a + A_3 + \text{etc.}$; e assim $R_3 = A_0a^4 + A_1a^3 +$ $+ A_2a^2 + A_3a + A_4 + \text{etc.}$ $R_4 = A_0a^5 + A_1a^4 + A_2a^3 + A_3a^2 + A_4a +$ $+ A_5 + \text{etc.}$; e finalmente $R_{m-1} = A_0a^m + A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} +$ $+ A_3a^{m-3} + \ldots + A_{m-1}a + A_m.$

O resto assim obtido para a divisão total (e que coincide com o que nos foi dado directamente), não é mais do que o resultado que se obtem substituindo no polynomio dado x pelo segundo termo do divisor com o signal trocado, isto é, a.

Isso nos leva a concluir *que o resto da divisão de um polynomio inteiro em relação a x por um binomio da forma* $x - a$ *é igual ao resultado que se obtem substituindo x no polynomio dividendo pelo segundo termo do divisor com o signal trocado.*

Este modo de formação do resto, e tambem o que enunciamos acima para obter o quociente, têm na pratica a vantagem de dispensar o trabalho de effectuar a divisão de um polynomio inteiro, ordenado, segundo as potencias decrescentes de x por um binomio da forma $x - a$.

Convem todavia advertir que elle suppõe que o dividendo encerra todas as potencias inteiras de x, desde

m até zero; de sorte que si o polynomio dado for incompleto, será preciso ter o cuidado de restabelecer as potencias de x que faltarem, introduzindo o factor zero nos coefficientes que realmente não existirem.

Como applicação, seja proposto determinar o quociente e o resto da divisão de

$$2x^5 - 6x^4 + 105x^2 + 20 \text{ por } x - 3$$

Começaremos restabelecendo a primeira e a terceira potencias de x que ahi faltam.

Obter-se-á para dividendo:

$$2x^5 - 6x^4 + 0.x^3 + 105x^2 + 0.x + 20$$

Substituindo ahi x pelo segundo termo do divisor $x - 3$, obteremos

$$2.(3)^5 - 6\,(3)^4 + 105\,(3)^2 + 20 = 2 \times 243 - 6 \times 81 + 105 \times 9 + \\ + 20 = 486 - 486 + 945 + 20 = 965$$

O resto sendo igual a 965, a divisão não é exacta. O quociente terá como coefficientes:

$$2,\ 2\times3 - 6 = 0,\ 0 \times 3 + 0 = 0,\ 0 \times 3 + 105 = 105,\ 105\times3 + 0 = 315$$

Assim, pois, teremos para quociente:

$$2x^4 + 105x + 315$$

Si o divisor fosse $x + a$ em lugar de $x - a$ o resto da divisão seria aquelle que se obteria substituindo

$$x \text{ por } -a \text{ porque } x + a = x - (-a)$$

Si o divisor fosse $x + 3$ fariamos, pois, $x = -3$ e o resto seria:

$$2(-3)^5 - 6\,(-3)^4 + 105\,(-3)^2 + 20 = 2 \times (-243) - 6 \times 81 + \\ + 105 \times 9 + 20 = -486 - 486 + 965 = -972 + 965 = -7$$

O quociente seria expresso por

$$2x^4 - 12x^3 + 36x^2 - 3x + 9.$$

Como acabamos de ver, o modo de dependencia entre o resto, o dividendo e o divisor nos permitte verificar immediatamente si um polynomio da forma

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m$$

é ou não divisivel por um binomio da fórma $x \mp a$.

Com effeito, o resto da divisão de um tal polynomio por um binomio daquella fórma, sendo igual á expressão que se obtem substituindo-lhe x por $\pm a$, é obvio que si o resultado desta substituição fôr *zero* o resto será nullo, e portanto exacta a divisão.

Reciprocamente, si um tal polynomio é divisivel por $x \mp a$, o resto da divisão será nullo, e por conseguinte o resultado da substituição de x por $\pm a$ annullará este polynomio.

125 — APRECIAÇÃO DOS THEOREMAS NUMERICOS QUE RESULTAM DAS LEIS PRECEDENTES — A lei do quociente e bem assim a do resto, que indicamos acima, dão a conhecer alguns theoremas numericos relativos á divisibilidade da somma ou differença de duas potencias semelhantes pela somma ou differença das quantidades a que se referem.

Para isto, supponhamos que sem effectuar a divisão se pretende verificar si $x^m \pm a^m$ é divisivel por $x \pm a$, sendo m inteiro e positivo.

1º. No caso de ser $x^m - a^m$ o dividendo e $x - a$ o divisor, podemos olhar aquelle como um polynomio inteiro e completo em relação a x e da forma

$$x^m - o.ax^{m-1} + o.a^2x^{m-2} - o.a^3x^{m-3} + \ldots + o.a^{m-1}x - a^m.$$

Ora, vimos acima que para os polynomios desta forma, se obtem o resto da divisão por $x - a$ substituindo x por a.

Isto feito, teremos: $a^m - a^m = o$; de modo que o resto é nullo e consequentemente exacta a divisão.

Formando o quociente, de accôrdo com o modo de dependencia já conhecido, teremos:

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

2°. Si quizessemos o quociente e o resto da divisão de

$$x^m - a^m \text{ por } x + a,$$

a marcha a seguir seria a mesma.

Com effeito, para verificar si a divisão é exacta poremos o divisor sob a forma $x - (-a)$, e substituiremos no dividendo x por $-a$, o que dá $(-a)^m - a^m$.

Si m fôr numero par, $(-a)^m = +a^m$, e então o resto será nullo porque $a^m - a^m = o$; o quociente será:

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - a^3x^{m-4} + \ldots + a^{m-2}x - a^{m-1}.$$

Si m fôr impar $(-a)^m - a^m = -2a^m$, que será o resto da divisão.

O quociente será, portanto,

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots - a^{m-2}x + a^{m-1} - \frac{2a^m}{x + a}.$$

3°. Si tivessemos $x^m + a^m$ a dividir por $x + a$, o resto seria dado substituindo do mesmo modo x por $-a$ no dividendo, o que daria $(-a)^m + a^m$.

Si m fosse *par*, $(-a)^m + a^m$ seria igual $a^m + a^m$, e então o resto seria

$$2a^m, \text{ porque } a^m + a^m = 2a^m.$$

O quociente seria

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - a^3x^{m-4} + \ldots + a^{m-2}x - a^{m-1} + \frac{2a^m}{x + a}.$$

Si m fosse *impar* seria ao contrario exacta a divisão, porque $(-a)^m + a^m = o$.

O quociente seria:

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots + a^{m-3}x^2 - a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

4º. Supponhamos, emfim, que se quer o quociente e o resto da divisão de

$$x^m + a^m \text{ por } x - a.$$

A divisão não póde ser exacta, porque substituindo x por a no dividendo virá para resto

$$a^m + a^m = 2a^m.$$

O quociente será

$$\frac{x^m + a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1} + \frac{2a^m}{x - a}$$

Si, por exemplo, tivessemos que dividir

$$a^4 + b^4 \text{ por } a - b,$$

teriamos, portanto,

$$\frac{a^4 + b^4}{a - b} = a^3 + ba^2 + b^2a + b^3 + \frac{2b^4}{a - b}.$$

E' muitas vezes util decompor as expressões algebricas em factores do 1º gráo.

As divisões particulares de que acabamos de tratar, nas quaes o divisor é um binomio do 1º gráo, permittem obter em muitos casos tal decomposição.

Por exemplo, seja o polynomio

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$$

A questão se deduz a procurar quaes os binomios do 1º grau que pódem figurar como seus factores, isto é, que dividem exactamente o polynomio dado.

Substituindo x por 1 o polynomio annulla-se, o que nos leva a concluir que elle é divisivel por $x - 1$.

Teremos assim

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)\,Q,$$

sendo Q o quociente da divisão.

Mas a lei do quociente nos dá immediatamente

$$Q = x^2 - x - 6,$$

donde

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1) \times (x^2 - x - 6).$$

Observando porém este quociente, nota-se que elle se annulla substituindo x por -2, isso nos mostra que elle é divisivel por $x - (-2)$ ou por $x + 2$.

A lei do quociente nos dá com effeito

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3).$$

Substituindo, pois, na igualdade precedente,

$$x^2 - x - 6 \text{ por } (x + 2)(x - 3),$$

teremos decomposto o polynomio dado nos factores de primeiro grau que o dividem exactamente; isto é, virá

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3).$$

Seja ainda

$$a^2 - 3ab + 2b^2;$$

fazendo $a = b$, teremos

$$b^2 - 3b^2 + 2b^2 = o,$$

donde resulta que o polynomio é divisivel por $a - b$.

Teremos, pois

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = (a - b)(a - 2b).$$

Seja finalmente

$$2a^2 + 3ab + b^2$$

Fazendo $a = -b$ o polynomio annulla-se e portanto será divisivel por

$$a - (-b) = a + b,$$

o que dá

$$2a^2 + 3ab + b^2 = (a + b)(2a + b).$$

A lei do quociente nos mostra com effeito que

$$2a^2 + 3ab + b^2 = (a + b)(2a + b).$$

126 — Modificando o divisor e suppondo que por sua vez é a differença entre duas potencias semelhantes, é facil mostrar que somente existe a divisibilidade quando o expoente desta potencia fôr um submultiplo do que affectar o dividendo.

Effectuando, com effeito, a divisão de

$$x^m - a^m \text{ por } x^p - a^p,$$

verifica-se que o quociente é:

$$\frac{x^m - a^m}{x^p - a^p} = x^{m-p} + a^p x^{m-2p} + a^{2p} x^{m-3p} + \ldots + a^{m-np} x^{m-(n+1)p}$$

e pela sua constituição vê-se que este quociente será

$$\frac{x^m - a^m}{x^p - a^p} = x^{m-p} + a^p x^{m-2p} + a^{2p} x^{m-3p} + \ldots + a^{m-np} x^{m-(n+1)p} + \\ + \ldots + a^{m-p}$$

quando $m = np$; porque sendo $m = np$, este caso fica reduzido ao de

$$\frac{x^n - a^n}{x - a}.$$

Com effeito, podemos fazer

$$\frac{x^m - a^m}{x^p - a^p} = \frac{(x^p)^n - (a^p)^n}{(x^p) - (a^p)} = (x^p)^{n-1} + (a^p)(x^p)^{n-2} +$$

$$+ (a^p)^2 (x^p)^{n-3} + \ldots + (a^p)^{n-1}.$$

Mas, sendo $np = m$, será

$$\frac{(x^p)^n - (a^p)^n}{(x^p) - (a^p)} = \frac{x^m - a^m}{x^p - a^p} = x^{m-p} + a^p x^{m-2p} + a^{2p} x^{m-3p} + \ldots +$$

$$+ a^{m-p}$$

Emfim, si o divisor fôr a differença entre dois multiplos quaesquer, das quantidades que se acham no dividendo, em vez da differença entre duas potencias, a lei do quociente modificar-se-á com facilidade; mas então o seu emprego nenhuma vantagem póde offerecer á simplificação dos calculos.

CAPITULO VII

RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 1° GRAU A MAIS DE UMA INCOGNITA (CALCULO DETERMINADO)

§ 19

Resolução algebrica de um systema de equações a igual numero de incognitas

127 — Feito o estudo do caso mais simples da resolução das equações, isto é, daquelle em que se considera uma equação a uma incognita, devemos agora apreciar o caso mais complexo relativo ás equações a mais de uma incognita.

Já dissemos que neste caso póde o calculo conduzir a um numero determinado ou indeterminado de soluções, conforme o conjuncto das equações propostas é igual ou inferior ao de suas incognitas.

Por emquanto nos limitaremos ao estudo da questão quando o calculo é determinado, reservando para o capi-

tulo seguinte a apreciação daquella em que o calculo é indeterminado.

Segundo Descartes a marcha que o nosso espirito deve seguir diante de um caso complexo é decompol-o em casos simples, e, uma vez estudados estes, reduzir a solução do caso composto a um maior ou menor numero de casos simples já estudados.

Eis o que vamos fazer, reduzindo successivamente á resolução de uma equação do primeiro grau a uma só incognita, os casos de um *systema* de duas, tres... equações a igual numero de incognitas, isto é, áquelles em que se tem duas ou mais equações que devem ser satisfeitas mediante a substituição dessas incognitas pelas formas correspondentes.

128 — IMPORTANCIA DO CASO DE DUAS EQUAÇÕES A DUAS INCOGNITAS, REDUCÇÃO DOS OUTROS CASOS A ESTE. Devemos em primeiro lugar reduzir o mais simples dos casos complexos ao caso fundamental; isto é, fazer depender a resolução de duas equações a duas incognitas da resolução de uma só equação a uma só incognita.

Depois mostraremos como o caso ternario, isto é, de tres equações a tres incognitas, se reduz ao primeiro por intermedio do caso binario; e assim por diante, transformando sempre o caso mais complexo no mais simples por meio da reducção successiva a todos os casos intermediarios.

Para que a resolução de um systema qualquer de equações fique dependente do caso fundamental de uma só incognita, temos que proceder a duas sortes de transformações successivas, sendo a primeira preparatoria e a segunda definitiva. Com a primeira reduzimos successivamente o systema proposto a outros equivalentes em cada um dos quaes as equações accumuladas a uma das precedentes têm sempre uma incognita de menos.

O qualificativo de eliminação dado a esta sorte de transformações provém justamente da circumstancia de haver

desapparecido uma incognita em cada uma das equações, de sorte que a ultima destas contém apenas uma incognita.

Mas, a eliminação só é directa entre duas equações e para uma incognita, por isso que sómente neste caso é possivel a transformação que as reduz a uma unica na qual a outra incognita póde ser isolada.

Deste isolamento gradual das incognitas é que provém a denominação de *resolutiva* que é dada a esta segunda phase de transformações, para distinguil-a da primeira, que chamamos *eliminativa*.

Isto posto, vejamos como, por meio destas duas phases de transformações, se consegue reduzir a resolução de um systema de equações a egual numero de incognitas ao caso fundamental de uma unica.

O processo adoptado a principio, para este fim, foi espontaneamente suggerido por um velho habito que a *theoria das proporções* fez adquirir.

Consiste em considerar todas as equações referidas sómente a uma das incognitas, como si as outras fossem conhecidas, e resolver cada uma dellas em relação á mesma incognita; igualando as expressões achadas duas a duas, obtem-se assim tantas equações menos uma quantas se tinha a principio.

Procedendo-se do mesmo modo para estas equações, elimina-se uma outra incognita, e assim se continúa até obter uma equação a uma só incognita. Resolvendo-a, chega-se a fórmula desta incognita e por meio della remonta-se successivamente ás expressões anteriores, que darão todas as outras incognitas, mediante substituições das precedentes.

Para esclarecer esta marcha, consideremos um systema de duas equações a duas incognitas.

$$(1)\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Resolvendo-as successivamente em relação a uma das incognitas, como se a outra fosse conhecida, obtemos

$$x = \frac{c - by}{a} \quad e \quad x = \frac{c' - b'y}{a}$$

Os primeiros membros destas expressões sendo iguaes, sel-o-ão tambem os segundos; de sorte que se obtem

$$\frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y,}{a'}$$

ou, expellindo os denominadores

$$a' \ (c - by) = a \ (c' - b'y)$$

ou.

$$a'c - a'by = ac' - ab'y$$

ou

$$c\,a' - ac' = (ba' - ab')\,y,$$

equação do 1° grau em y, a qual conjunctamente com uma das primitivas, (1) fórma o systema

$$\begin{array}{l} a\,x + by = c \\ ca' - ac' = (ba' - ab')\,y \end{array} \qquad (2)$$

equivalente ao proposto. Fica assim terminada a phase *eliminativa* da questão. Para operar á *resolutiva*, basta isolar a incognita y na ultima equação e substituir a formula obtida por seu valor na expressão de x.

Ter-se-á

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'} \text{ e } x = \frac{c - by}{a} = \frac{c}{a} - \frac{b}{a} \times \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'} =$$
$$= \frac{c\,(ba' - ab') - b\,(ca' - ac')}{a\,(ba' - ab')} = \frac{a\,(bc' - cb')}{a\,(ba' - ab')}$$

ou finalmente

$$x = \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'}.$$

O processo que acabamos de seguir para passar do (1) ao systema (2), isto é, para fazer a eliminação de x, é chamado de *comparação por igualdade*. Exigindo, como vimos, duas resoluções, elle complica inutilmente os calculos.

Por isto é preferivel empregar-se qualquer dos methodos que vamos indicar e que se distinguem pela diversidade dos artificios empregados para passar do systema primitivo (1) ao transformado (2).

129 — RESOLUÇÃO DO SYSTEMA DE DUAS EQUAÇÕES A DUAS INCOGNITAS PELO METHODO DE ELIMINAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO. Consideremos as mesmas equações

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned} \qquad (1)$$

Para proceder á eliminação por este modo resolve-se qualquer das equações relativamente a uma das incognitas, como se a outra fosse conhecida e substitue-se a expressão achada na segunda equação.

Resulta assim uma nova equação a uma incognita, que, com qualquer das equações dadas, fórma um outro systema equivalente ao primitivo e composto como elle de duas equações, mas differindo em que uma tem duas incognitas, e a outra uma só.

Obtido esse systema, começa a phase retrogada que consiste em resolver a equação a uma incognita, e substituir a fórmula achada na expressão da outra.

Applicando o que fica dito, ao systema proposto portanto (1) obteremos:

$$x = \frac{c - by}{a} = \frac{c}{a} - \frac{by}{a}$$

e portanto resultará o equivalente:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ \frac{a'c}{a} - \frac{a'b}{a}y + b'y &= c' \end{aligned}$$

ou

$$ax + by = c$$

$$\left(b' - \frac{a'b}{a}\right) y = c' - \frac{a'c}{a} \quad (2)$$

Da segunda equação deste systema (2) tira-se a fórmula

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

que substituida na expressão de x, fornece finalmente

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

Estas expressões de x e y não differem essencialmente das já obtidas : a inversão que aquellas apresentam em relação a estas desapparece facilmente multiplicando ambos os termos de cada uma pelo factor—1, o que evidentemente as não altera.

A constituição destas fórmulas nos mostra que têm ellas um denominador commum que se obtem intercalando-se o signal — entre as permutações ab e ba dos coefficientes das incognitas na primeira equação, e um numerador especial a cada uma. Este resulta das mesmas permutações, substituindo nellas o coefficiente da incognita respectiva pelo termo independente della, tendo o cuidado de acentuar em ambos os termos a segunda letra de cada producto.

Eliminando pelo processo de substituição fizemos apenas duas resoluções para chegar ás fórmulas finaes; ao passo que na precedente tivemos necessidade de tres.

Além desta simplificação, tem este a vantagem logica de unificar os dois outros processos de eliminação que vamos estudar, tornando a phase retrogada commum a todos elles.

Esta fica constituida simplesmente pelo processo por *substituição*, cujo principio fundamental se torna assim predominante.

Como se vê este processo baseia-se apenas no seguinte artificio: quando se considerão duas equações a duas incognitas póde-se substituir em qualquer dellas uma destas incognitas pela fórmula correspondente tirada da outra equação, concebendo a incognita restante temporariamente como conhecida.

130. — METHODOS DE REDUCÇÃO AOS MESMOS COEFFICIENTES E DOS COEFFICIENTES INDETERMINADOS; COMPARAÇÃO DESTES DOIS MODOS DE ELIMINAÇÃO COM O ANTERIOR E OBSERVAÇÃO SOBRE A MARCHA SEGUIDA EM AMBOS. O processo que acaba de ser exposto reduz pois, a resolução do caso complexo de duas equações a duas incognitas á do caso simples e fundamental de uma equação a uma incognita. Esta reducção constitue tambem o objecto essencial dos outros processos de eliminação.

Devemos, pois definir esta como destinada a reduzir á resolução de um systema qualquer de equações á de uma só equação a uma incognita.

Os dois outros processos que temos de apreciar, podem ser considerados como accessorios do precendente porque concorrem com elle para constituir um methodo de eliminação applicavel a equações de um grau qualquer, quando generalizados na parte superior do calculo algebrico.

Um delles, o processo de *reducção por somma ou subtracção*, é, como o precedente, caracterisado pelo artificio empregado para fazer desapparecer uma das incognitas de qualquer das equações sem alterar o systema.

Este artificio consiste em igualar os coefficientes da incognita que se quer eliminar nas duas equações, e combinal-as depois por somma ou subtracção, conforme os signaes dos termos que os contém são differentes ou eguaes.

Deste modo, na equação transformada, assim obtida, os dois termos se destroem, dando lugar ao des-

apparecimento de uma incognita e ficando somente a outra.

Isto posto, o systema considerado poderá ser substituldo por outro equivalente, com o mesmo numero de equações, isto é, uma das primitivas e a transformada obtida , que só contém uma incognita.

Achado este systema, começa a phase retrogada já caracterizada no processo precedente.

Isto é, resolve-se a transformada e substitue-se a fórmula correspondente na outra equação, na qual se elimina assim uma das incognitas.

Resolvendo por sua vez esta equação relativamente a outra incognita, ter-se-á a fórmula final.

Para tornar iguaes os coefficientes da incognita a eliminar, multiplica-se cada equação pelo coefficiente que tem a mesma incognita na outra.

Mas, semelhantemente á reducção das fracções ao mesmo denominador, esta marcha espontanea comporta simplificações conforme a relação que existe entre esses coefficientes.

E' o que acontece quando um delles é multiplo do outro, caso em que basta se multiplicar uma das equações pelo quociente dos dois.

Para esclarecer este processo, consideremos o systema

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Multiplicando todos os termos da primeira equação por a', e os da segunda por a, teremos:

$$\left.\begin{aligned} aa'x + ba'y &= ca' \\ a'ax + b'ay &= c'a \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

Subtrahindo a segunda equação da primeira, teremos:

$$aa'x - aa'x + ba'y - b'ay = ca' - c'a,$$

ou

$$ba'y - b'ay = ca' - c'a$$

ou, ainda *pondo* y *em evidencia* no primeiro membro,

$$(ba' - b'a)\ y = ca' - c'a.$$

O systema (II) equivalente a (I) fica, pois, substituido por este outro

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ (ba' - b'a)\ y = ca' - c'a \end{array}\right\} \text{(III)}$$

Obtido este systema, está terminada a phase eliminativa, e começa a resolutiva, que, segundo dissemos, é commum a todos os processos.

Resolve-se a segunda equação relativamente a y, o que dá

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'},$$

e esta fórmula substitue-se na primeira. Esta reduzir-se-á então a

$$ax + b \times \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'} = c$$

que, sendo resolvida, nos dá a outra fórmula final. Isto feito, teremos

$$ax = c - b\,\frac{ca' - ac'}{ba' - ab'}, \text{ donde } x = \frac{c - \dfrac{b\,(ca' - ac')}{ba' - ab'}}{a}$$

Esta fórmula reduz-se facilmente a

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

e constitue com a precedente,

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

o systema explicito procurado.

Como se vê, este processo apenas distingue-se do anterior pelo artificio empregado para passar do systema primitivo (I) ao transformado (II), em que uma das equações só possue uma incognita.

Elles têm de commum, entretanto, a phase retrograda em que se elimina por substituição utilisando a resolução afim de transformar o systema (II) naquelle que representa o estado explicito do systema primitivo (I).

A distincção entre os dois processos será ainda mais caracterisada, se eliminarmos y pelo mesmo modo que eliminamos x.

Para isso multiplicaremos todos os termos da primeira equação do systema (I) por b', coefficiente de y na segunda.

Teremos então

$$\left.\begin{aligned} ab'x + bb'y &= cb' \\ a'bx + b'by &= c'b \end{aligned}\right\} (a_1)$$

Subtrahindo uma da outra, termo a termo, chegaremos a

$$ab'x - a'bx + bb'y - bb'y = cb' - c'b$$

ou

$$(ab' - a'b)\, x = cb' - c'b.$$

O systema transformado será, em vez de (II), um outro constituido pela segunda equação deste systema e pela equação acima, isto é,

$$\left.\begin{aligned} (ab' - a'b)\, x &= cb' - c'b \\ (ba' - ab')\, y &= ca' - ac' \end{aligned}\right\} (a_2)$$

Deste systema se passará immediatamente ao systema explicito final, sem que seja preciso resolver directamente

Universidade de S. Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

nenhuma das equações do systema dado, como se fez em (II).

Teremos com effeito

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \\ y &= \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \end{aligned}\right\} (a_3)$$

Como o anterior, este processo permitte obter directamente o systema (a_3) em que cada incognita se acha isolada, deixando, assim, como se vê, apreciar a distincção entre as duas phases, eliminativa e resolutiva.

Acabamos com effeito de observar que depois de eliminar x e obter uma equação em y, pode-se, por nova applicação do artificio, eliminar y e obter uma outra equação em x.

Uma vez resolvidas, estas duas equações nos darão o systema explicito procurado, equivalente ao implicito primitivo.

Vejamos agora o processo dos *coefficientes indeterminados*, chamado de *Bezout*, nome do geometra que o vulgarisou.

Consiste em multiplicar qualquer das equações propostas por uma indeterminada ; combinar a equação assim obtida com a outra por somma ou subtracção e substituir uma das equações do systema primitivo por esta transformada depois de havel-a reduzido a só conter uma incognita, eliminando a outra pela annullação do seu coefficiente, mediante a substituição do valor conveniente da mesma indeterminada.

Para applical-o consideremos ainda o systema :

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

Multiplicando a primeira equação por uma indeterminada m, o que a não altera, podemos substituir o systema (α) pelo equivalente,

$$\left.\begin{aligned} max + mby &= mc \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\} (\beta)$$

Subtrahindo membro a membro a segunda equação da primeira, teremos .

$$(ma - a')\,x + (mb - b')\,y = mc - c' \quad (\gamma)$$

Sendo m uma quantidade indeterminada, póde-se suppol-a relacionada de modo tal com o coefficiente de x ou de y que um ou outro se annulle, reduzindo esta equação a uma só incognita.

Si quizermos eliminar a incognita x, a expressão de m será obtida pela *equação de condição* $am - a' = o$; se for y, será dada pela equação $mb - b' = o$.

Isto quer dizer que a fórmula da indeterminada é sempre fornecida pela equação que se obtem igualando a zero o coefficiente da incognita que se pretende eliminar.

Si esta for x, a fórmula de m será

$$m = \frac{a'}{a},$$

que substituida na equação do systema (δ), nos dará

$$\left(\frac{a'}{a}\,b - b'\right) y = \frac{a'}{a}\,c - c'$$

Esta equação sendo equivalente á primeira do systema (β), podemos substituir este e consequentemente o primitivo (α), pelo seguinte

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{a'}{a}\,b - b'\right) y &= \frac{a'}{a}\,c - c' \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\} (\delta).$$

Obtido este systema, a phase retrograda será identica á dos processos anteriores.

A eliminação por substituição e a resolução transformam este systema em um outro que representa o estado explicito do primitivo.

Com effeito, resolvendo a primeira equação relativamente a y e substituindo a fórmula obtida na segunda, ficará esta contendo então uma só incognita, cuja fórmula se obtem resolvendo-a por sua vez.

Temos assim :

$$y = \frac{\frac{a'}{a}c - c'}{\frac{a'}{a}b - b'} = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'}$$

$$a'x + b' \times \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'} = c'$$

que fornece por substituição

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

Assim considerado, este processo de eliminação distingue-se tambem dos anteriores pelo artificio empregado na primeira phase, para passar do systema dado (α) ao transformado (δ), que é composto de uma das equações primitivas e de outra a uma só incognita.

Mas tem de commum com elles a phase inversa em que a eliminação por substituição transforma este ultimo systema em outro equivalente que traduz o estado explicito do systema primitivo.

Este processo apresenta certa analogia com o precedente.

Distingue-se porém por ficar indeterminado o factor multiplicador, que só mais tarde é fixado pela condição de annullar o coefficiente de uma das incognitas ; emquanto que no processo de reducção, o multiplicador é préviamente

determinado de modo a tornar iguaes os coefficientes da incognita a eliminar.

Neste processo, como nos anteriores, o systema transformado podia ser de duas equações a uma incognita.

Para isto bastaria applicar na eliminação de y o mesmo artificio usado na de x, isto é multiplicar a segunda equação por outra indeterminada, m', e substituir esta pela fórmula obtida, resolvendo a equação a que o coefficiente de y igualado a zero désse lugar.

Teriamos então:

$$a' m' x + b' m' y = m' c',$$

que, combinada com a equação

$$ax + by = c,$$

daria:

$$(m' a' - a) x + (m' b' - b) y = m' c' - c.$$

Fazendo

$$m' b' - b = o,$$

viria

$$m' = \frac{b}{b'},$$

que substituindo na equação acima daria:

$$\left(\frac{b}{b'} a' - a\right) x = \frac{b}{b'} c' - c.$$

Sendo esta equação equivalente a

$$a' x + b' y = c',$$

podemos substituir o systema transformado (δ) pelo seguinte:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{a'}{a} b - b'\right) y &= \frac{a'}{a} c - c' \\ \left(\frac{b}{b'} a' - a\right) x &= \frac{b}{b'} c' - c, \end{aligned}\right\} (\delta,)$$

em que as incognitas, x e y ainda se acham implicitamente.

Para tornal-as explicitas, basta resolver directamente cada uma destas equações, o que dará as fórmulas já obtidas.

Este modo de proceder offerece, como dissemos, a vantagem logica de deixar perfeitamente distinctas a phase eliminativa e a resolutiva.

Mas o outro modo deve ser preferido como permittindo uma melhor coordenação pelo estabelecimento de uma phase commum a todos os processos, onde a eliminação na phase retrograda é sempre feita por *substituição*.

Taes são os processos distinctos por meio dos quaes se reduz a resolução de duas equações a duas incognitas ao caso fundamental de uma equação a uma incognita.

A questão, em resumo, nos apresenta duas phases: a primeira em que se passa do systema dado para um outro tambem de duas equações, uma tendo duas incognitas e a outra uma só; a segunda, em que, resolvendo e eliminando por substituição, retrograda-se, passando-se do systema transformado para o systema explicito equivalente.

Esta segunda phase é a mesma para todos os processos que apenas se distinguem pelo artificio empregado na primeira, para obter-se a equação a uma incognita do systema transformado.

No *processo por substituição*, esta equação é obtida tirando de uma das propostas a fórmula da incognita a eliminar e substituindo-se na outra, *no processo de reducção* combinam-se as duas equações dadas por somma ou subtracção, depois de haver tornado iguaes os coefficientes da incognita a eliminar.

Finalmente, *no processo dos coefficientes indeterminados*, a equação a uma incognita é conseguida multiplicando uma das propostas por uma indeterminada, combinando a equação obtida com a outra primitiva por somma ou subtracção, e fazendo com que a mesma indeterminada annulle o coefficiente de uma das incognitas na equação resultante.

131 — EXAME DAS FORMULAS OBTIDAS NO CASO DE DUAS EQUAÇÕES A DUAS INCOGNITAS. Tendo apreciado o modo por que se reduz a solução do mais simples dos casos complexos ao fundamental, vamos agora estudar os typos que o caracterisam comparando-os com as fórmulas obtidas para as variaveis x e y.

Em resumo, vamos discutir estas fórmulas.

A discussão de uma fórmula consiste como sabemos no estudo das modificações que ella apresenta desde que se fazem variar os elementos que a constituem.

Examinemos, pois, sob tal aspecto as fórmulas fornecidas pelo systema

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\} (A) \text{ isto é}$$

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \text{ e } y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \quad (B)$$

Tres são as hypotheses principaes que se podem apresentar;

1.ª) os numeradores de x e y e o denominador commum não são nullos;

2.ª) só o denominador é nullo;

3.ª) o denominador é nullo sendo tambem um dos numeradores.

No primeiro caso o systema tem uma solução unica representada pelas fórmulas (B).

No segundo caso as expressões de x e de y tomam a fórma

$$x = \frac{m}{o}$$

$$y = \frac{n}{o}$$

Vejamos o que indicam estas expressões singulares relativamente ás equações do systema (A).

A hypothese considerada equivale á igualdade

$$ab' - ba' = o;$$

donde se tira

$$a' = \frac{ab'}{b}$$

que substituido na equação

$$a'x + b'y = c'$$

nos dá:

$$\frac{ab'}{b} x + b'y = c',$$

ou, dividindo por b', depois de haver multiplicado por b,

$$ax + by = \frac{c'b}{b}$$

Esta equação tem o mesmo primeiro membro que a equação

$$ax + by = c,$$

e o segundo differente.

Portanto, jámais ellas poderão ser verificadas pelos mesmos valores de x e y.

Demais semelhante facto torna-se incompativel com a hypothese admittida, porque sendo

$$\frac{bc'}{b'} = c,$$

seria

$$bc' = cb',$$

e então o numerador da primeira fórmula seria nullo, o que iria de encontro á hypothese estabelecida.

Esta conclusão absurda a que chegamos, nos deixa ver que a hypothese considerada determina, nas fórmulas finaes, uma modificação que indica não poderem as equações neste caso ser satisfeitas por nenhum systhema de soluções finitas.

Entretanto, devemos notar que estes resultados singulares podem representar uma solução tão legitima como qualquer outra.

Tratando-se, por exemplo, de procurar a distancia x do ponto de encontro de dous corpos que se movem separados um do outro, a uma certa origem, e a epoca y deste encontro, se succeder que as fórmulas obtidas para a hypothese de igual velocidade dos dois, nos apresentem soluções da forma

$$x = \frac{m}{o} \quad e \quad y = \frac{n}{o}$$

isto indicará que os moveis nunca se encontrarão.

Vejamos a terceira hypothese. Supponhamos que

$$ab' - ba' = o, \; cb' - bc' = o$$

e

$$ac' - ca'$$

differente de zero; a fórmula de x se reduzirá a

$$\frac{o}{o}$$

e a de y parecerá infinita.

Mas é facil de mostrar que a expressão de y se reduz tambem a

$$\frac{o}{o}$$

Com effeito, resolvendo

$$ab' - ba' = o$$

em relação a b' e substituindo a fórmula de b' em

$$cb' - bc' = o,$$

teremos

$$b' = \frac{ba'}{a}$$

e portanto

$$\frac{cba'}{a} - bc' = o,$$

ou

$$cba' - abc' = o,$$

ou ainda

$$ca' - ac' = o$$

Neste caso concluimos, portanto, que se a expressão de x tem a forma

$$\frac{o}{o},$$

a de y terá tambem a mesma forma e reciprocamente.

Para interpretar estas soluções, notemos que a relação

$$ab' - ba' = o$$

nos permitte como anteriormente, substituir o systema dado pelo systema

$$ax + by = c$$
$$ax + by = \frac{bc'}{b'}$$

donde se deduz que

$$c = \frac{bc'}{b'}$$

Por conseguinte, na hypothese considerada, as duas equações do systema proposto tornam-se iguaes, o que quer dizer que não obstante a diversidade de seus coefficientes, ellas podem ser substituidas por uma unica equação a duas incognitas, x e y.

Dahi resulta que essas incognitas são indeterminadas, isto é, que x e y admittem uma infinidade de valores.

Assim, pois, quando uma das fórmulas, em virtude das relações existentes entre os coefficientes, se apresentar sob a forma $\frac{o}{o}$, deveremos concluir que a outra tomará

tambem a mesma fórma e que as incognitas são indeterminadas.

Concretamente esta solução singular, considerando o problema acima enunciado, indicaria que os dois moveis partem de um mesmo ponto, e têm a mesma velocidade, de modo que o encontro é representado por todos os pontos da trajectoria sobre que elles se movem.

Podemos particularizar ainda o caso que estudamos, reunindo as hypotheses feitas á de serem os coefficientes b e b', por exemplo, iguaes a zero.

Então x terá a forma

$$\frac{o}{o} \quad \text{e} \quad y$$

tornar-se-á

$$\frac{ac' - ca'}{o}$$

As equações primitivas para esta supposição nos mostram que

$$x = \frac{c}{a}, \; x = \frac{c'}{a'}.$$

Si $\frac{c}{a}$ fôr differente de $\frac{c'}{a'}$ as equações serão incompativeis, isto é, não admittirão os mesmos valores de x e y; si

$$\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'},$$

será $a'c - ac' = o$ e as fórmulas tornar-se-ão

$$x = \frac{o}{o}$$

e

$$y = \frac{o}{o}$$

Devemos porém notar essa differença essencial que a expressão de y é realmente indeterminada, mas que a

de x só o é na apparencia, porquanto a introducção da hypothese nas equações, nos dá o valor determinado

$$x = \frac{c}{a}.$$

Para mostrar isto directamente, e apresentar o verdadeiro motivo deste facto singular no dominio abstracto, isto é, de ser o verdadeiro valor de uma expressão mascarado por um symbolo de indeterminação, representemos a relação

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} \text{ por } h$$

e a relação

$$\frac{b'}{b} \text{ por } k.$$

Dahi resulta que $a' = ha$, $c' = hc$ e $b' = kb$.

Estas expressões sendo substituidas na formula de x que estamos discutindo, nos dão

$$x = \frac{bck - cbh}{abk - abh} = \frac{cb\ (k - h)}{ab\ (k - h)} = \frac{c}{a}$$

O factor commum b tornando-se nullo, foi pois o que determinou a annullação dos termos da fracção que representa x.

Isto nos leva a concluir que muitas vezes o symbolo $\frac{0}{0}$ pode não traduzir uma indeterminação e ser originado pela existencia de um factor commum não supprimido e que se anulla para a hypothese particular que determina esse valor singular.

Por conseguinte quando por uma certa hypothese feita sobre os dois termos de uma fórmula ella se reduzir a $\frac{0}{0}$, não se deverá tirar conclusão alguma desse resultado, antes de examinar com cuidado se ha um factor

commum aos dois termos que se anullam para a hypothese em questão.

Se existe um tal factor, será preciso supprimil-o e fazer em seguida na expressão simplificada a hypothese que tenha dado $\frac{o}{o}$, para então se obter o verdadeiro valor da relação proposta.

Se não existe este factor tem lugar verdadeiramente a indeterminação.

E' o que se verifica na expressão de y, onde a indeterminação não é mais apparente. Para isto basta substituir as expressões de a', c' e b' na fórmula de y, o que dá

$$y = \frac{c\,(h - h)}{b\,(k - h)} = \frac{o}{o},$$

Neste caso ha sómente uma indeterminação parcial das incognitas que se apresentam sob a fórma $\frac{o}{o}$, por isso que uma dellas é determinada.

As consequencias serão analogas si fizermos $a = o$ e $a' = o$.

Poderiamos considerar ainda outras hypotheses particulares, mas não o faremos porque semelhante exame não offerece utilidade.

Moraes Rego — Elementos de Algebra (19 a).

132 — SOLUÇÃO NO CASO DE TRES EQUAÇÕES A TRES INCOGNITAS; INUTILIDADE DAS FÓRMULAS OBTIDAS. Passemos agora ao aspecto mais complexo de tres equações a tres incognitas.

(19 a) Convém dividir este paragrapho em duas lições oraes, finalizando aqui a primeira. Para compensar a perda de tempo poder-se-á dispensar a exposição do terceiro paragrapho, capitulo (21), cuja leitura deve entretanto ser feita pelos alumnos. Por este modo, o curso de Algebra exige sómente 48 lições verbaes.

A questão para este caso consiste em reduzir a resolução do systema ternario ao caso fundamental, por intermedio do binario.

E' preciso, pois, primeiramente passar do systema dado a um outro em que a eliminação tenha de ser feita entre duas equações a duas incognitas e depois passar deste systema ao final.

A phase eliminativa fica assim augmentada do conjuncto de transformações empregadas para passar do systema primitivo ao binario equivalente.

E, como a eliminação tem sempre lugar directamente entre duas unicas equações, a applicação dos processos estudados não exige modificação alguma, uma vez que se póde attribuir ás variaveis um caracter constante, embora temporario. Tomemos pois o systema

$$\left.\begin{aligned} &ax + by + cz = d \\ &a'x + b'y + c'z = d' \\ &a''x + b''y + c''z = d'' \end{aligned}\right\} (1)$$

Considerando as duas primeiras equações, nós podemos suppôr z constante e olhal-as assim como formando um systema binario a duas incognitas x e y.

Isto posto podemos, por um dos processos estudados, eliminar entre estas duas equações a incognita x, por exemplo, e a equação resultante em y e z poderá substituir uma das equações propostas.

Considerando depois a primeira e a terceira, podemos tambem, por identicos motivos, eliminar entre ellas a mesma variavel x, e a equação resultante em y e z substituirá uma das equações combinadas. Nestas condições, o systema (1) ficará substituido pelo equivalente

$$\left.\begin{aligned} &ax + by + cz = d \\ &(ba' - ab')\, y + y\,(ca' - ac')\, z = da' - ad' \\ &(ba'' - ab'')\, y + (ca'' - ac'')\, z = da'' - ad'' \end{aligned}\right\} (2)$$

Mediante este systema intermediario a questão fica reduzida a passar do systema binario em y e z, que entra na sua composição, ao caso fundamental.

Podemos assim substituir o systema (2) por um outro, tambem de tres equações, sendo porém uma dellas de tres variaveis, isto é, uma das equações do systema primitivo, a outra de duas e finalmente a restante de uma só.

Si for y esta variavel, o systema (2) ficará, depois destas transformações, substituido pelo equivalente

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ (ba' - ab')\,y + (ca' - ac')\,z = da' - ad' \\ [(ba' - ab')\,(ca'' - ac'') - (ba'' - ab'')\,(ca' - ac')] \times y = \\ = (da' - ad')\,(ca'' - ac'') - (da'' - ad'')\,(ca' - ac'). \end{array}\right\} \quad (3)$$

Chegado a este systema, começa a phase retrograda, que consiste em resolver a ultima equação do systema (3); substituir a fórmula de y na equação precedente, que só ficará com z; resolver esta equação, e substituir na primeira as fórmulas de z e y, dadas pelas duas ultimas, e emfim determinar nesta primeira a fórmula de x.

Effectuando esta phase resolutiva o systema (3) ficará substituido pelo systema explicito seguinte, equivalente ao primitivo:

$$\left.\begin{array}{l} z = \dfrac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''} \\ y = \dfrac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - c'da''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''} \\ x = \dfrac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''} \end{array}\right\} \quad (4)$$

Taes são as fórmulas das incognitas em formação dos coefficientes do systema de tres equações a tres incognitas.

A' sua inspecção vê-se que todas ellas têm o mesmo denominador, o qual se obtem facilmente tomando as duas lettras a e b, permutando-as e collocando em cada uma das permutações obtidas a lettra c, successivamente á direita, no meio e á esquerda, separando os grupos obtidos alternativamente pelos signaes (+) e (—) e finalmente collocando um accento na segunda lettra de cada grupo e dois na terceira.

Os numeradores são obtidos substituindo no denominador commum de cada fórmula o coefficiente da incognita a que ella se refere pelo segundo membro da equação correspondente (19 b).

(19 b) Examinando as fórmulas finaes que resolvem uma equação a uma incognita, duas equações a duas incognitas, tres equações a tres incognitas, Cramer achou uma regra pratica para construir, sem calculo, as fórmulas que resolvem um numero qualquer de equações entre igual numero de incognitas. Supponhamos as equações a m incognitas:

$$ax + by + cz + dt \ldots\ldots + gv = K$$
$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1t \ldots\ldots + g_1v = K_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2t \ldots\ldots + g_2v = K_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m-1}x + b_{m-1}y + c_{m-1}z + d_{m-1}t \ldots\ldots + g_{m-1}v = K_{m-1}$$

1°. A' direita do coefficiente a da primeira incognita escreve-se o da segunda b; inverte-se a ordem das letras e interpõe-se o signal (—) entre os dois productos ab e ba, formando-se assim $ab - ba$. A' direita de cada um dos termos desta differença escreve-se o coefficiente c da terceira incognita, collocando-o seguidamente em todos os lugares da direita para a esquerda, em cada uma destas permutações e tendo o cuidado de mudar de signal cada vez que c mudar de lugar. Forma-se assim a expressão:

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba + \ldots\ldots$$

Escreve-se do mesmo modo o coefficiente d da quarta incognita á direita de cada um dos termos desta expressão; depois faz-se

Poderiamos estabelecer para estas fórmulas uma apreciação analoga á que fizemos para o caso binario; mas um tal estudo é sem utilidade alguma e sem importancia logica.

Antes de tudo, convem, no dominio abstracto, coordenar o que ha de essencial, desenvolvendo sómente o que fôr de reconhecida utilidade.

Hoje isto é tanto mais necessario quanto mais desenvolvidos vão-se tornando os dominios superiores, fim que deve sempre visar a nossa educação.

A comparação dos casos de uma equação a uma incognita, de duas equações a duas incognitas e finalmente de tres equações a tres incognitas, nos mostra immediatamente a complicação crescente dos calculos algebricos á medida que se considera maior numero de equações.

Do mesmo modo, a comparação das fórmulas finaes a que chegamos nos deixa ver tambem o augmento de complexidade pelo simples accrescimo de uma incognita.

---

passar este coefficiente por todos os lugares a partir da direita, tendo o cuidado de mudar de signal cada vez que *d* mudar de lugar.

Achar-se-ha

$$abcd - abdc + adbc - dabc + acbd - acdb \ldots\ldots;$$

assim continuar-se-á até ter empregado o coefficiente da mesma incognita. Dá-se então em cada termo da expressão assim formada um accento á segunda letra, dois á terceira, tres á quarta etc., e obter-se-á deste modo o denominador commum das fórmulas de todas as incognitas.

2º. Para obter-se o numerador de cada uma, substitue-se no denominador commum o coefficiente da incognita que se procura pelo termo independente, conservando entretanto os mesmos accentos.

Tal a regra pratica de Cramer.

Universidade de S. Paulo
Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

Assim, a fórmula por demais simples no caso de uma equação a uma incognita, torna-se para duas equações a duas incognitas :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

e

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

No caso de tres equações a tres incognitas, já ficam as fórmulas (4) tão complicadas que o seu uso não é vantajoso (19 c), sendo preferivel effectuarem-se as transformações algebricas para resolver as equações.

Afim de julgar da complicação de taes fórmulas, á medida que augmenta o numero de incognitas, basta notar que o numerador especial de cada uma, ou o denominador commum a todas, tem sempre um numero de termos igual ao de permutações que se podem fazer com a totalidade das equações ou das incognitas distinctas; de modo que para quatro incognitas teriamos $1.2.3.4. = 24$ termos, para cinco, $1.2.3.4.5. = 120$ termos e assim por diante.

Voltando ao estudo da eliminação para o caso de tres equações a tres incognitas, podemos resumir o que temos exposto dizendo que ha ahi duas phases distinctas.

Na primeira se passa do systema dado a um outro de igual numero de equações e de incognitas, mas tendo a primeira tres incognitas, a segunda e a terceira duas; e deste ultimo systema a um outro equivalente, tendo ainda o mesmo numero de equações e incognitas, sendo porém a primeira de tres incognitas, a segunda de duas e a terceira de uma só.

Noutra phase, em sentido inverso á primeira, resolve-se a ultima equação e substitue-se a fórmula na prece-

---

(19 c) Por esse motivo a regra de Cramer não tem importancia alguma na pratica.

dente; resolvida esta por sua vez, substitue-se a fórmula achada na anterior, que ainda se resolve para ter a ultima das fórmulas procuradas.

A primeira phase é realizada por qualquer dos processos estudados; mas a segunda o é pelo processo de substituição unicamente. Tal é a marcha racional que segue o nosso espirito quando trata de reduzir a solução do caso de tres equações a tres incognitas ao caso fundamental de uma equação a uma incognita.

133 — APRECIAÇÃO DO CASO DE UM NUMERO QUALQUER DE EQUAÇÕES COM IGUAL NUMERO DE INCOGNITAS. Si considerarmos agora o caso de quatro equações a quatro incognitas, a reducção ao caso fundamental se faria por intermedio do caso ternario e do binario, já estudados. Supponhamos de um modo geral as equações

$$\left.\begin{aligned} &F\ (x,\ y,\ z,\ u) = 0 \\ &F_1\ (x,\ y,\ z,\ u) = 0 \\ &F_2\ (x,\ y,\ z,\ u) = 0 \\ &F_3\ (x,\ y,\ z,\ u) = 0 \end{aligned}\right\} (a)$$

Eliminando por um qualquer dos tres processos a incognita x entre a primeira e a segunda, entre a primeira e a terceira, entre a primeira e a quarta equações, teremos o systema equivalente

$$\left.\begin{aligned} &F\ (x,\ y,\ z,\ u) = 0 \\ &f_1\quad (y,\ z,\ u) = 0 \\ &f_2\quad (y,\ z,\ u) = 0 \\ &f_3\quad (y,\ z,\ u) = 0 \end{aligned}\right\} (b)$$

Com este systema, fica a questão reduzida ao caso ternario representado pelas tres ultimas equações. Elimi-

nando y entre a primeira dentre ellas e cada uma das outras, teremos outro systema transformado, equivalente ao primitivo,

$$\left.\begin{array}{l} F\ (x,\ y,\ z,\ u) = 0 \\ f_1\ (y\ \ z,\ u) = 0 \\ \varphi\ (z,\ u) \\ \varphi_1\ (z,\ u) \end{array}\right\} (c)$$

Com este systema fica a questão reduzida ao caso binario pelas duas ultimas equações. Eliminando z entre a primeira dentre ellas e a segunda, estaremos reduzido ao caso fundamental, e obteremos assim o systema equivalente ao primitivo:

$$\left.\begin{array}{l} F\ (x,\ y,\ z,\ u) = 0 \\ f_1\ (y,\ z,\ u) = 0 \\ \varphi\ (z,\ \ ) = 0 \\ \psi\ (u) = 0 \end{array}\right\} (d)$$

Começa então a phase retrograda; tire-se da ultima equação a fórmula de u e substitua-se na anterior, que por sua vez resolvida dá a fórmula de z. Esta, substituida na precedente com a fórmula de u, a obriga a só conter y.

Resolvendo-a obtem-se a fórmula de y, que com as de u e z serão substituidas na primeira equação do systema. A resolução desta dará finalmente a fórmula de x.

Os quatro casos que temos apreciado nos permittem agora concluir a marcha geral que segue a eliminação para reduzir um systema de um numero qualquer, m, de equações de m incognitas ao caso fundamental.

Para isto combina-se a primeira equação com cada uma das outras e eliminando sempre a mesma incognita, segundo o modo relativo ao caso binario, transforma-se o systema dado em outro equivalente, do mesmo numero de equações e incognitas, tendo a primeira equação m inco-

gnitas, a qual será uma das equações primitivas e as $m-1$ equações restantes, $m-1$ incognitas. Este systema em que se combina do mesmo modo as $m-1$ ultimas equações, reduz-se a outro de igual numero de equações e incognitas. Elimina-se entre estas $m-1$ equações uma mesma incognita e o primeiro systema intermediario é substituido por um outro equivalente ao mesmo numero de equações e incognitas, tendo a primeira m incognitas, a segunda $m-1$, e as $m-2$ equações restantes, cada uma $m-2$ incognitas. Com este systema, pela consideração destas $m-2$ equações, fica a questão reduzida a um systema de menos duas equações e incognitas.

Assim continuando, passaremos a fazer depender a questão de um systema de $m-3$ cquações; depois de $m-4$ e $m-5$ e assim por diante; o que, finalmente, permitte obter o ultimo systema constituido do mesmo numero de equações que os anteriores e do mesmo numero de incognitas, mas tendo a primeira equação m incognitas, a segunda $m-1$, a terceira $m-2$, a quarta $m-3$... a antepenultima 3, a penultima 2, e, finalmente, a ultima uma só incognita.

Obtido este systema começa a phase inversa, em que a eliminação é feita por substituição, e preparada sempre pela resolução das equações, afim de constituir o systema explicito final.

Vê-se, portanto, que, relativamente ás equações do 1° gráo, o calculo algebrico resolve plenamente com os recursos de que dispõe o problema que o caracterisa.

1° EXEMPLO. Seam as equações

$$5x - 3y = 1 \text{ e } 7y - 4x = 13$$

Empregando o processo de *comparação por igualdade*, tiraremos da primeira

$$x = \frac{3y + 1}{5}$$

e da segunda

$$x = \frac{7y - 13;}{4}$$

igualando estes valores, têm-se

$$\frac{3y + 1}{5} = \frac{7y - 13}{4},$$

da qual se tira

$$12y + 4 = 35y - 65 \text{ ou } 35y - 12y = 65 + 4, \text{ ou } 23y = 69,$$

donde

$$y = 3;$$

remontando ao primeiro dos valores de x, virá por substituição,

$$x = \frac{3.3 + 1}{5} = 2$$

Este processo embora mais simples que os outros, tem o inconveniente de ser longo.

2° EXEMPLO. Sejam

$$3x + 2y = 12,\ 2z + y = 5,\ e\ x + y + 3z = 8.$$

A segunda nos dá

$$y = 5 - 2z;$$

substituindo nas duas outras, ellas tornam-se

$$3x - 4z = 2,\ x + z = 3.$$

Esta ultima dá

$$x = 3 - z,$$

o que transforma a precedente em

$$9 - 3z - 4z = 2;$$

donde

$$z = 1,$$

e por conseguinte

$$x = 3 - z = 2 \quad y = 5 - 2z = 3.$$

Este processo por *substituição* é sobretudo vantajoso quando todas as incognitas não entram em uma ou mais equações do systema, como neste caso.

3° EXEMPLO. Sejam ainda

$$5x - 3y = 9 \text{ e } 2x + 7y = 20$$

Multiplicando os dois membros da primeira por 2, coefficiente de x na segunda, e os dois membros desta por 5, coefficiente de x na primeira, teremos

$$10x - 6y = 18 \text{ e } 10x + 35y = 100.$$

Subtrahindo a primeira equação da segunda, membro a membro, virá

$$35y + 6y = 100 - 18 \text{ ou } 41y = 82,$$

donde se tira

$$y = \frac{82}{41} = 2$$

Substituindo este valor na primeira das equações dadas, obteremos

$$5x - 6 = 9 \text{ ou } 5x = 15,$$

donde

$$x = \frac{15}{5} = 3.$$

As equações propostas são pois satisfeitas por

$$x = 3 \text{ e } y = 2,$$

e unicamente por estes valores.

4°. EXEMPLO. Sejam as equações

$$30x - 37y = 166 \text{ e } 24x - 25y = 280.$$

O processo precedente (reducção aos mesmos coefficientes, isto é, eliminação por addição ou subtracção), simplifica-se aqui, determinando o *m. m. c.* aos coefficientes de x. Tem-se

$$30 = 2 \times 3 \times 5 \text{ e } 24 = 2^3 \times 3;$$

de sorte que o *m. m. c.* destes dois coefficientes é

$$2^3 \times 3 \times 5 = 120.$$

O quociente de 120 por 30 é 4: multiplicaremos, pois, os dois membros da primeira equação por 4. O quociente de 120 por 24 é 5: multiplicaremos os dois membros da segunda equação por 5. Obtem-se assim o systema equivalente

$$120x - 148y = 664 \text{ e } 120x - 125y = 1.400$$

Subtrahindo a primeira equação da segunda virá

$$-125y + 148y = 1.400 - 664 \text{ ou } 23y = 736,$$

donde

$$y = \frac{736}{23} = 32.$$

Substituindo este valor na primeira equação, obtem-se

$$30x - 37.\ 32 = 166,$$

donde

$$30x = 166 + 37.\ 32 = 1.350,$$

e, por conseguinte

$$x = \frac{1.350}{30} = 45.$$

Os valores procurados são, pois,

$$x = 45 \text{ e } y = 32$$

e são os unicos.

5°. EXEMPLO. Sejam emfim as equações

$$(a - b)\,x + (c - a)\,y = k \text{ e } (r - s)\,x + (t - u)\,y = l.$$

Multiplicando ambos os membros da primeira por uma indeterminada m, virá

$$(a - b)\,mx + (c - d)\,my = mk;$$

subtrahindo desta equação a segunda teremos

$$[(a-b)\,m-(r-s)]\;\;x + [(c-a)\;\;m-(t-u)]\;\;y = mk-l.$$

Annullando o coefficiente de x para eliminar esta incognita, virá

$$(a - b)\,m - (r - s) = 0$$

ou

$$(a - b)\,m = (r - s),$$

donde

$$m = \frac{r - s}{a - b}.$$

Da equação transformada deduz-se, depois da annullação do coefficiente de x, que

$$y = \frac{mk - l}{(c - d)\,m - (t - u)};$$

a expressão precedentemente obtida, virá, depois das transformações convenientes:

$$y = \frac{l\,(a - b) - (r - s)\,k}{(a - b)\,(t - u) - (c - d)\,(r - s)};$$

substituindo esta expressão de y em qualquer das equações propostas e resolvendo-a em seguida, virá, finalmente:

$$x = \frac{k\,(t - u) - (c - d)\,l}{(a - b)\,(t - u) - (c - d)\,(r - s)}$$

§ 20

Transformação das fórmulas pelo emprego do maior divisor commum algebrico

135 — EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU A DUAS INCOGNITAS. — Consideremos ainda o systema de duas equações a duas incognitas:

$$\frac{3\,pex}{e-f} - \frac{e^2\,y}{e+f} = -\frac{2\,nf}{e-f}$$

$$px + (e+f)\,y = \frac{nf}{e-f}$$

Nós vimos que a resolução de taes equações se reduz ao caso de uma incognita.

Comparando-as, com effeito, com as fórmulas obtidas para a solução das equações geraes,

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\},$$

vemos immediatamente que:

$$a = \frac{3\,pe}{e-f},\quad b = -\frac{e^2}{e+f},\quad c = -\frac{2\,nf}{e-f}$$

e que

$$a' = p,\ b' = e+f,\ c' = \frac{n\,f}{e-f}.$$

Substituindo esta expressões nas fórmulas

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

teremos:

$$x = \frac{-\frac{2\,nf}{e-f}(e+f) - \frac{-e^2}{e+f} \times \frac{nf}{e-f}}{\frac{3\,p}{ef}(e+f) - \frac{-e^2}{e+f} \times p}$$

Para reduzir esta expressão multiplicaremos ambos os termos das primeiras fracções que figuram no numerador e no denominador por $e+f$, e ambos os termos da segunda que se acha no denominador por $(e-f)$.

Teremos assim :

$$x=\frac{\frac{-2nf(e+f)^2}{(e-f)(e+f)}+\frac{e^2nf}{(e+f)(e-f)}}{\frac{3pe(e+f)^2}{(e-f)(e+f)}+\frac{pe^2(e-f)}{(e+f)(e-f)}}=\frac{\frac{2nf(e+f)^2+e^2nf}{(e-f)(e+f)}}{\frac{3pe(e+f)^2+pe^2(e-f)}{(e-f)(e+f)}}=$$

$$=\frac{-2nf(e+f)^2+e^2nf}{3pe(e+f)^2+pe^2(e-f)}=\frac{e^2nf-2nf(e^2+2ef+f^2)}{pe^3-pe^2f+3pe(e^2+2ef+f^2)}=$$

$$=\frac{e^2nf-2nfe^2-4nef^2-2nf^3}{pe^3-pe^2f+3pe^3+6pe^2f+3pef^2}=\frac{-e^2nf-4nef^2-2nf^3}{4pe^3+5pe^2f+3pef^2}$$

Substituindo aquellas expressões na fórmula de y e attendendo a que ella tem o mesmo denominador que o de x, virá :

$$y=\frac{\frac{3pe}{e-f}\times\frac{nf}{ef}-\frac{-2nf}{e-f}\times p}{\frac{4pe^3+5pe^2f+3pef^2}{(e+f)(e-f)}}=\frac{\frac{3penf+2npf\times(e-f)}{(e-f)(e-f)}}{\frac{4pe^3+5pe^2f+3pef^2}{(e+f)(e-f)}}=$$

$$=\frac{pnf\times(3e+2e-2f)}{(e-f)^2}\div\frac{4pe^3+5pe^2f+3pef^2}{(e+f)(e-f)}=$$

$$=\frac{pnf(5e-2f)}{(e-f)(e-f)}\times\frac{(e+f)(e-f)}{4pe^3+5pe^2f+3pef^2}=$$

$$=\frac{(5pnef-2pnf^2)(e+f)}{(4pe^3+5pe^2f+3pef^2)(e-f)}=\frac{(5enf-2nf^2)(e+f)}{(4e^3+5e^2f+3ef^2)(e-f)}=$$

$$=\frac{5ne^2f-2nef^2+5nef^2-2nf^3}{(4e^4+5e^3f+3e^2f^2)-4e^3f-5e^2f^2-3ef^3}=$$

$$=\frac{5ne^2f+3nef^2-2nef^3}{4e^4+e^3f-2e^2f^2-3ef^3}=\frac{nf(5e^2+3ef-2f^2)}{4e^4+e^3f-2e^2f^2-3ef^3}$$

Em lugar de tomar novo exemplo, vamos resolver de outra maneira as equações precedentes.

Si para chegar áquelles resultados tivessemos começado expellindo os divisores dos termos das equações pro-

postas, o calculo, que se teria feito da maneira seguinte, seria muito menos embaraçoso.

Com effeito, tomaremos as equações

$$\frac{3\,pex}{e-f} - \frac{e^2y}{e+f} = -\frac{2nf}{e-f}$$

$$px + (e+f)\,y = \frac{nf}{e-f}$$

Multiplicando a principio os dois membros da primeira equação por $e^2 - f^2$, producto dos dois divisores

$$e+f \text{ e } e-f,$$

teremos:

$$3pe\,(e+f)\,x - e^2\,(e-f)\,y = -2nf\,(e+f)$$

ou

$$3pe^2\,x + 3pefx - e^3y + e^2fy = -2nef - 2nf^2,$$

ou ainda

$$(3pe^2 + 3pef)\,x + (e^2f - e^3)\,y = -2nf - 2nf^2$$

Multiplicando tambem ambos os membros da segunda equação por $(e-f)$, divisor do termo independente das incognitas, teriamos

$$p\,(e-f)\,x + (e+f)\,(e-f)\,y = nf$$

ou

$$(pe - pf)\,x + (e^2 - f^2)\,y = nf.$$

Comparando estas duas equações com as equações geraes

$$ax + by = c \text{ e } a'x + b'y = c'$$

conclue-se que:

$$a = 3pe^2 + 3pef;\ b = e^2f - e^3,\ c = -2nef - 2nf^2,\ a' = pe - pf,\ b' = e^2 - f^2,\ c' = nf.$$

Applicando as formulas geraes já conhecidas,

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad e \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

virá

$$x = \frac{(-2nf^2 - 2nef)(e^2 - f^2) - (e^2f - e^3)nf}{(3pe^2 + 3pef)(e^2 - f^2) - (e^2f - e^3)(pe - pf)}$$

$$y = \frac{(3pe^2 + 3pef)nf - (-2nf^2 - 2nef)(pe - pf)}{(3pe^2 + 3pef)(e^2f^2) - (e^2f - e^3)(pe - pf)}$$

A primeira transforma-se em

$$x = \frac{-2ne^2f^2 - 2ne^3f + 2nf^4 + 2nef^3 - ne^2f^2 + ne^3f}{3pe^4 - 3pe^2f^3 + 3pe^3f - 3pef^3 - 3pe^3f + pe^2f^2 + pe^4 - pe^3f}$$

ou

$$x = \frac{-ne^3f - 3ne^2f^2 + 2nef^3 + 2nef^4}{4pe^4 + pe^3f - 2pe^2f^2 - 3pef^3}$$

A segunda transforma-se em

$$y = \frac{3npe^2f + 3npef^2 - 2npf^3 + 2npef^2 + 2npe^2f - 2npef^2}{3pe^4 - 3pe^2f^2 + 3pe^3f - 3pef^3 - pe^3f + pe^2f^2 + pe^4 - pe^3f}$$

ou

$$y = \frac{5npe^2f + 3npef^2 - 2npf^3}{4pe^4 + pe^3f - 2pe^2f^2 - 3pef^3}$$

Comparando estas expressões de x e de y com as que tinhamos achado, não é difficil ver logo a identidade dellas.

Com effeito, quanto ás expressões de y, sua identidade manifesta-se sem nenhuma difficuldade.

Relativamente ás expressões de x, para saber como a primeira é a mesma que a segunda, basta notar que a igualdade destas duas expressões suppõe necessariamente que o numerador

$$-ne^3f - 3ne^2f^2 + 2nef^3 + 2nf^4$$

da segunda contém o numerador

$$-ne^2f - 4nef^2 - 2nf^3$$

da primeira, do mesmo modo que o denominador

$$4\,pe^4 + pe^3f - 2\,pe^2f^2 - 3\,pef^3$$

da segunda, contém o denominador

$$4\,pe^3 + 5\,pe^2f + 3\,pef^2$$

da primeira.

Ora, dividindo o segundo numerador pelo primeiro, acha-se, com effeito, o mesmo quociente, $e - f$, que se acharia dividindo o segundo denominador pelo primeiro.

Isto é, que a expressão

$$x = \frac{-\,ne^2f^3 - 3\,ne^2f^2 + 2\,nef^3 + 2\,nf^4}{4\,pe^4 + pe^3f - 2\,pe^2f^2 - 3\,pef^3}$$

se transforma em

$$x = \frac{(e-f)\,(-\,ne^2f + 4\,nef^2 + 2\,nf^3)}{(e-f)\,(4\,pe^3 + 5\,pe^2f + 3\,pef^2)}$$

ou simplesmente em

$$x = \frac{-\,ne^2f + 4\,nef^2 + 2\,nf^3}{4\,pe^3 + 5\,pe^2f + 3\,pef^2},$$

desde que se ponha de parte o divisor $e - f$ commum a ambos os seus termos.

A maneira pela qual acabamos de reduzir a mais composta das duas fórmulas de x á mais simples, tornou-se facil de imaginar porque tinhamos presente as duas expressões. O mesmo não succederia porém si conhecessemos apenas a mais complexa e quizessemos simplifical-a.

E como isto acarretaria inconvenientes na solução de uma questão qualquer, vamos estudar um methodo geral para reduzir toda fórmula fraccionaria susceptivel de simplificação. E' facil sentir desde já que este methodo deve consistir em dividir ambos os termos da expressão fraccionaria pelo seu *maior divisor commum*, isto é, pela

expressão algebrica do mais alto grau em relação aos coefficientes e aos expoentes, que divide exactamente os dois termos da expressão considerada.

136 — METHODO GERAL PARA DETERMINAR O M. D. C. ALGEBRICO. Tendo já estudado o modo pelo qual se divide duas expressões algebricas, só nos resta, portanto, indicar um methodo geral para determinar o seu m. d. c.

Nenhuma difficuldade ha nisso, porque o processo a seguir é o mesmo adoptado na arithmetica. Si a A e B representam duas quantidades e Q o quociente de sua divisão, esta quantidade será o m. d. c. daquellas si a divisão for exacta. No caso contrario, isto é, si houver um resto R, a questão ficará reduzida a achar o m. d. c. entre B e R.

Com effeito, sendo Q o quociente da divisão, será $A = B\,Q + R$; ora, o m. d. c. entre A e B, dividindo A e B, divide $B\,Q$; porém, dividindo a somma A e a parcella $B\,Q$, dividirá evidentemente a outra parcella R (20ª).

Assim pois, si for exacta a divisão de Q por R, será R o m. d. c. procurado. Si assim não acontecer, isto é, si houver um resto R', a questão ficará reduzida a determinar o m. d. c. entre R e R'.

Com effeito, representando por Q' o quociente da divisão, será $B = R\,Q' + R'$; ora, o m. d. c. dividindo a R' e R, dividirá $R\,Q' + R'$ ou B; mas dividindo B e R, dividirá tambem $B\,Q + R$ ou A.

Continuando assim esta serie de divisões, ou chegar-se-á a um resto nullo ou não; no 1° caso o ultimo divisor é o m. d. c. procurado, e no 2° ás duas quantidades consideradas não admittem um commum divisor.

(20ª) Isso tem lugar porque: Si um numero a divide dois outros M e N elle dividirá sua somma $M + N$, bem como sua differença $M - N$. Com effeito, designando por q e q' os quocientes que se obtem, ter-se-á $M = aq$ e $N = aq'$, donde $M \pm N = a\,(q \pm q')$ donde ainda

$$\frac{M \pm N}{a} = q \pm q' \quad c.\,q.\,d.$$

Esta marcha que acabamos de indicar é, como se vê, commum á Algebra e á Arithmetica. A pesquisa do m. d. c. é assim uma simples applicação da divisão, da qual algebricamente constitue um complemento indispensavel para simplificar as fórmulas fraccionarias (20b).

137—A OPERAÇÃO NO CASO DE DOIS MONOMIOS—O m. d. c. a duas quantidades sendo constituido pelo producto de todos os seus divisores communs, é facil obtel-o no caso de dois monomios. Para chegar-se a este resultado, basta procurar o m. d. c. entre os seus coefficientes e escrever em seguida todas as lettras communs que figuram como factores nos dois monomios, dando-lhes o menor expoente que ellas apresentam. Este producto será o m. d. c. procurado.

Como se vê, não ha necessidade de procurar o m. d. c. entre dois monomios quando se quer apenas simplificar a relação entre elles, porque effectuando a divisão o m. d. c. fica espontaneamente supprimido, isto é, desapparecem de um dos monomios todos os factores communs ao outro,

138—NO CASO DE DOIS POLYNOMIOS: MARCHA DO CALCULO. —Si a fórmula fraccionaria é constituida pela relação entre dois polynomios não divisiveis exactamente, a sua simplificação exige tambem que os dividamos pelo m. d. c.

(20.b) Apenas devemos aqui notar que o raciocinio precedente suppõe essencialmente que os quocientes successivos da divisão de *A* por *B* tem todos os seus termos inteiros em relação aos coefficientes. Concebe-se com effeito que si o quociente da divisão de *A* por *B* fosse fraccionario, não teriamos o direito de dizer que todo o factor que divide *B* dividirá *B Q*.

Ora, concebe-se que acontecerá muitas vezes que o coefficiente do 1º termo do dividendo parcial não será exactamente divisivel por aquelle que se acha no 1º termo do divisor. Neste caso será preciso multiplicar o dividendo por um factor tal que o coefficiente do 1º ter[illegible]eiro.

E[illegible] o m. d. c. que se procura desde que [illegible]sor; porque não deverá fazer [illegible] podendo, portanto, entrar

a ambos, isto é, pelo polynomio do mais alto grau em relação aos expoentes e aos coefficientes, que divide exactamente os dois.

Para maior clareza, supponhamos que se trata de achar o m. d. c. entre os dois polymonios

$$-3a^3 + 3ba^2 - b^2a + b^3 \text{ e } 4a^2 - 5ba + b^2.$$

Primeira operação

$$\begin{array}{r|l} -12a^3 + 12ba^2 - 4b^2a + 4b^3 & 4a^2 - 5ba + b^2 \\ \underline{-15ba^2 + 3b^2a} & \overline{-3a - 3b} \\ -3ba^2 - b^2a + 4b^3 & \\ -12ba^2 - 4b^2a + 16b^3 & \\ \underline{-15b^2a + 3b^3} & \\ -19b^2a + 19b^3 & \\ -19b^2(-a + b) & \end{array}$$

Segunda operação

$$\begin{array}{r|l} 4a^2 - 5ba + b^2 & -a + b \\ \underline{4ba} & \overline{-4a + b} \\ -\underline{ba + b^2} & \\ 0 & \end{array}$$

A' primeira vista ficamos embaraçados para fazer a divisão dos dois polynomios, porque o primeiro termo $-3a^3$ do dividendo não é exactamente divisivel pelo primeiro termo $4a^2$ do divisor.

Mas si observarmos que o coefficiente 4 deste não é factor de todos os termos de

$$4a^2 - 5ba + b^2,$$

e que assim em virtude do que acima dissemos, 4 não poderá fazer parte do m. d. c. procurado, podemos

sem nenhum inconveniente introduzir este factor no dividendo, o que dá

$$-12a^3+12ba^2-4b^2a+4b^3$$

e então a divisão dos dois primeiros termos torna-se-á possivel.

Effectuando esta divisão, acharemos $-3a$ para primeiro termo do quociente e

$$-3ba^2-b^2a+4b^3$$

para resto.

E como neste resto o expoente de a é ainda igual ao do divisor, nada impede de continuar a operação, multiplicando de novo este resto por 4, afim de tornar possivel a divisão dos dois primeiros termos.

Feito isto, virá

$$-12ba^2-4b^2a+16b^3$$

que dividido por

$$4a^2-5ba+b^2,$$

dá para quociente $-3b$ e para resto

$$-19b^2a+19b^3$$

Mas este ultimo resto podendo ser posto sob a forma

$$19b^2(-a+b)$$

vê-se que o factor $19b^2$ divide esse resto sem dividir o divisor, donde, em virtude do que acima dissemos, este factor não pode entrar na constituição do maximo divisor commum; o que equivale a dizer que o m. d. c. entre

$$4a^2-5ba+b^2 \text{ e } 19b^2(a+b)$$

e por conseguinte entre as duas quantidades propostas, é o mesmo que existe entre

$$4a^2-5ab+b^2 \text{ e } (-a+b)$$

Assim podemos, sem inconveniente, supprimir este factor e a questão está reduzida a procurar o m. d. c. entre

$$4a^2 - 5ba + b^2 \quad \text{e} \quad -a + b$$

(segunda operação).

Dividindo estes dois polynomios um pelo outro, acharemos um quociente exacto

$$-4a + b\,; \text{ donde } -a + b \text{ ou } b - a$$

é seu m. d. c. e por conseguinte o é tambem entre as quantidades propostas.

139 — ABREVIAÇÃO DO CALCULO; REGRA DA OPERAÇÃO. — Neste mesmo exemplo, como em todos aquelles em que o expoente da lettra ordenadora é maior de uma unidade no dividendo que no divisor, pode-se abreviar a operação multiplicando logo o dividendo pelo quadrado do coefficiente do primeiro termo do divisor. Ora, concebe-se com effeito que por este meio o primeiro quociente parcial que se obtem deve encerrar este coefficiente na primeira potencia.

Multiplicando o divisor pelo quociente e fazendo a reducção com o dividendo assim preparado, obtem-se um resto que deve ainda conter o coefficiente como divisor, o que permittirá continuar a divisão até que se obtenha um resto de mais fraco grau que o divisor, em relação á lettra ordenadora.

Eis aqui o typo do calculo.

Primeira operação :

Multiplicando o polynomio

$$-3a^3 + 3ba^2 - ba^2 + b^3 \text{ por } 16$$

quadrado de 4 (coefficiente do 1º termo do divisor

$$4a^2 - 5ba + b^2)$$

temos :

$$\begin{array}{r|l} -48a^3+48ba^2-16b^2a+16b^3 & 4a^2-5ba+b^2 \\ \underline{-12ba^2-4b^2a+16b^3} & \underline{-12a-3b} \\ -19ba^2+19b^3 & \end{array}$$

ou

$$19b^2\,(-a+b)$$

Segunda operação

$$\begin{array}{r|l} 4a^2-5ba+b^2 & -a+b \\ \underline{-ba+b^2} & \underline{-4a+b} \\ 0 & \end{array}$$

Comprehende-se facilmente que si a lettra ordenadora no dividendo excede de duas, tres... unidades, o expoente da mesma lettra no divisor, seria preciso multiplicar o dividendo pela terceira, quarta... potencia do coefficiente do primeiro termo do divisor.

Isso é facil de conceber.

Tomemos um outro exemplo :

Sejam :

$$15a^5+10a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3-3ab^4$$

e

$$12a^3b^2+38a^2b^3+16ab^4-10b^5$$

Antes de proceder á divisão destes dois polynomios, comecemos por observar que o primeiro contém a como factor commum a todos os termos; ora, este factor não fazendo parte do segundo polynomio, podemos supprimil-o como não fazendo parte do m. d. c.

Pela mesma razão o factor $2b^2$, sendo commum a todos os termos do segundo polynomio e não figurando no primeiro, pode ser supprimido.

Assim a questão fica reduzida a procurar o m. d. c. entre os dois polynomios :

$$15a^4 + 10a^3b + 4a^2b^2 + 6ab^3 - 3b^4$$

e

$$6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3$$

seguindo a mesma marcha que no exemplo precedente.

Mas para que o m. d. c. tenha os seus coefficientes inteiros basta multiplicar todo o dividendo pelo coefficiente 6 do primeiro termo do divisor; ou antes pelo quadrado de 6, conforme o que dissemos precedentemente.

Porém, como 15, coefficiente do primeiro termo do dividendo, tem com 6, coefficiente do primeiro do divisor, um factor commum 3, para tornar aquelle divisivel por este basta evidentemente multiplical-o por 2, factor de 6, que não entra em 15.

Feita esta preparação, effectua-se a divisão, o que dá $5a$ para primeiro termo do quociente e

$$-75a^3b - 32a^2b^2 + 37ab^3 - 6b^4$$

para resto.

$$\begin{array}{l|l}
30a^4 + 20a^3b + 8a^2b^2 + 12ab^3 - 6b^4 & 6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3 \\
\quad -75a^3b - 32a^2b^2 + 37ab^3 - 6b^4 & \overline{5a - 25b} \\
\quad -150a^3b - 64a^2b^2 + 74ab^3 - 12b^4 & \\
\hline
\quad +411a^2b^2 + 274ab^3 - 137b^4 & \\
\text{ou} \quad 137b^2(3a^2 + 2ab - b^2) &
\end{array}$$

E como o primeiro termo deste resto tem para coefficiente 75 que contém ainda o factor 3 que entra em 6, basta multiplicar este resto por 2 para continuar a divisão que, depois de effectuada, deu o resto

$$411a^2b^2 + 274ab^3 - 137b^4,$$

no qual ha o factor commum $137b^2$ que vamos por de parte na segunda divisão por não figurar elle no novo dividendo.

Universidade de S. Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

Teremos pois que procurar agora o m. d. c. entre

$$6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3 \quad \text{e} \quad 3a^2 + 2a - b^2$$

Effectuando a divisão acha-se:

$$\begin{array}{l|l} 6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3 & 3a^2 + 2ab - b^2 \\ \underline{+ 15a^2b + 10ab^2 - 5b^3} & 2a + 5b \\ 0 & \end{array}$$

O m. d. c. procurado é, portanto, o resto precedente, isto é,

$$3a^2 + 2ab - b^2. \qquad (20c)$$

Podemos agora enunciar do seguinte modo a regra para determinar o m. d. c. de dois polynomios:

Ordenados em relação ás potencias decrescentes de uma mesma letra, começa-se supprimindo nos dois polynomios os factores monomios communs a cada um delles.

Si o factor monomio supprimido no dividendo tiver com o supprimido no divisor um factor commum, põe-se este de parte como devendo entrar na constituição do m. d. c. *procurado.*

Isso feito, multiplica-se todo o dividendo pelo coefficiente do primeiro termo do divisor ou por um dos factores deste coefficiente capaz de tornar exacta a divisão do primeiro coefficiente do dividendo pelo primeiro do divisor.

(20c) Poder-se-ia perguntar si as suppressões operadas, no curso do calculo, dos factores communs a todos os restos têm apenas por objecto simplificar os calculos, ou si são realmente indispensaveis.

Ora, pode-se facilmente reconhecer que taes suppreessões são necessarias; porque si, no exemplo precedente, não se supprimisse o factor $137b^2$, seria preciso, para tornar possivel a divisão do primeiro termo do novo dividendo pelo primeiro termo do divisor, multiplicar todo o dividendo por $137b^2$; mas então se introduziria no dividendo um factor que se achava tambem no divisor, donde resultaria que o m. d. c. procurado se complicaria do factor $137b^2$ que não devia a principio fazer parte delle.

Effectua-se a divisão, o que dá um certo resto de grau menor que o divisor, no qual se supprimem os factores monomios ou polynomios communs a todos os coefficientes da letra principal.

Toma-se em seguida este resto para divisor, o segundo polynomio para dividendo, e procede-se em relação a estes dois polynomios como para os precedentes.

Continúa-se nesta serie de divisões até que se obtenha um resto que divida exactamente o resto precedente, caso em que este resto é o m. d. c. procurado; ou até que se tenha obtido um resto independente da letra principal, caso em que os dois polynomios não têm divisor commum, salvo algum factor commum descoberto no começo da operação.

Si applicarmos esta regra aos dois polynomios

$$-ne^3d - 3ne^2d^2 + 2ned^3 + 2ned^4 \text{ e } 4pe^4 + pe^3d - 2pe^2d^2 - 3ped^3$$

para os quaes achamos o divisor commum $c - d$ no ultimo dos exemplos de resolução de equação.

Este divisor foi então obtido porque sabiamos que, nas duas fórmulas achadas, o primeiro termo dividido pelo segundo devia dar o mesmo quociente que

$$-ne^2d - 4ned^2 + 2nd^3 \text{ por } 4pe^3 + 5pe^2d + 3ped^2;$$

mas pode ser encontrado agora pelo modo systematico que acabamos de enunciar.

Para isto, depois de supprir dn no primeiro e pe no segundo, dividimos deste modo um pelo outro:

$$\begin{array}{l|l} 4e^3 + e^2d - 2ed^2 - 3d^3 & -e^3 - 3e^2d + 2ed^2 + 2d^3 \\ \hline -4e^3 - 12e^2d + 8ed^2 + 8d^3 & -4 \\ \hline -11e^2d + 6ed^2 + 5d^3 & \end{array}$$

Supprimindo o factor d commum aos termos do resto

$$-11e^2d + 6ed^2 + 5d^3$$

e multiplicando por 11 todos os termos do divisor

$$-e^3 - 3e^2d + 2ed^2 + 2d^3,$$

teremos ainda a divisão:

$$\begin{array}{l|l}
-11e^3 - 33e^2d + 22ed^2 + 22d^3 & -11e^2 + 6ed + 5d^2 \\
\cline{2-2}
+11e^3 - 6e^2d - 5ed^2 & e + 34d. \\
\cline{1-1}
\quad -39e^2d + 17ed^2 + 22d^3 & \\
-429e^2d + 187ed^2 + 242d^2 & \\
+429e^2d - 234ed^2 - 195d^3 & \\
\cline{1-1}
\quad -47ed^2 + 47d^3 & \\
-47d^2(e - d) &
\end{array}$$

Supprimindo o factor $47d^2$ no resto e por elle dividindo o divisor, virá:

$$\begin{array}{l|l}
-11e^2 + 6ed + 5d^2 & e - d \\
\cline{2-2}
+11e^2 - 11ed & -11e - 5d \\
\cline{1-1}
\quad -5ed + 5d^2 & \\
+5ed - 5d^2 & \\
\cline{1-1}
\quad 0 &
\end{array}$$

O m. d. c. é portanto $e—d$, o que confirma o resultado já obtido.

140 — DO CASO EM QUE HA MAIS DE DOIS POLYNOMIOS; REDUCÇÃO AO PRECEDENTE. No caso de haver necessidade de procurar o m. d. c. a muitos polynomios (como por exemplo, no caso em que tivessemos de multiplicar muitas fórmulas fraccionarios cujos termos fossem polynomios), a questão reduzir-se-ia á repetição de um maior ou menor numero de operações identicas á que acabamos de executar.

Com effeito, supponhamos que se tem de determinar o m. d. c. aos polynomios A, B e C.

Procuraremos o m. d. c. entre A e B; seja D.

Determinaremos depois o m. d. c. entre D e C, seja D'. Podemos affirmar que D' é o m. d. c. procurado entre A, B e C; porque o m. d. c. A, B e C, devendo dividir A e B, dividirá evidentemente seu m. d. c. D; mas, dividindo D e tambem C, deve dividir D' que é o m. d. c. entre D' e C. Portanto D' é o m. d. c. aos tres polynomios A, B e C.

141 — O emprego do m. d. c. algebrico é por emquanto pouco frequente; mas o alcance ulterior desta doutrina, na parte superior do calculo das relações directas, obriga a instituil-a desde os rudimentos da algebra.

Com este estudo terminamos o que de essencial offerecem as combinações fundamentaes da algebra.

Não apreciaremos especialmente o calculo fraccionario, porque as suas regras não differem das estabelecidas na Arithmetica, e apenas constituem uma generalisação dellas. A simplificação das fracções e a sua isomeria não carecem de nenhuma consideração nova, porque o producto das grandezas indeterminadas se effectua entre elementos distinctos, cuja decomposição só exige a intervenção dos *numeros primos* para os respectivos coefficientes.

Temos concluido o estudo das principaes transformações das fórmulas a que dão lugar as equações do 1º gráo a uma ou mais incognitas quando resolvidas de accôrdo com as regras que indicamos nas lições precedentes.

Como bem se percebe, era preciso que á phase algebrica ou de resolução juntassemos este estudo complementar, cujo fim é, como acabamos de ver, simplificar as fórmulas obtidas, afim de facilitar a phase arithmetica ou de avaliação.

Mas, para que semelhante estudo fique completo, precisamos ainda apreciar as transformações que podem resultar das duas operações relativas ao ultimo par de

elementos algebricos, uma constituida e outra generalisada pela algebra, isto é, da *potenciação* e da *radiciação.*

Tal será o assumpto do paragrapho seguinte.

§ 21

Resolução de alguns problemas por meio das equações do 1º grau

142 — Com o fim de nos familiarisarmos com o emprego das equações do 1º grau a uma ou mais incognitas, vamos apresentar aqui algumas questões praticas.

Para resolver por este modo qualquer problema proposto, o que primeiro se deve fazer é traduzil-o algebricamente, e é isto o que se chama *pôr o problema em equação.*

Evidentemente nenhuma regra fixa poderá ser estabelecida para tal fim, por isso que semelhante representação varia necessariamente com as questões, exigindo menor ou maior habilidade conforme o enunciado vulgar for mais ou menos approximado da syntaxe algebrica.

O unico preceito que pode ser formulado consiste em indicar, com o auxilio dos signaes algebricos, sobre as quantidades conhecidas, representadas quer por numeros quer por letras, e sobre as quantidades desconhecidas, sempre expressas por letras, os mesmos raciocinios e as mesmas operações que seria preciso fazer para verificar os valores das incognitas, si ellas fossem dadas.

Para fazer uso deste preceito, é preciso determinar a principio com cuidado quaes são as operações que o enunciado da questão encerra, quer explicita quer implicitamente.

Mas é precisamente nisso que se acha a difficuldade de pôr em equação um problema proposto (*21 a*).

(21 a) Lacroix — *Elements d'Algebre, 25e edition 1888.*

Para reconhecel-o, vamos tomar alguns exemplos, começando pelos dois problemas das *fontes e dos correios* que apresentados pela primeira vez por Clairaut, se tornaram classicos no ensino da algebra.

143 — Em primeiro lugar consideremos o problema das fontes.

De um modo geral pode ser assim enunciado:

Suppondo que duas fontes correm separadamente, e que uma enche um reservatorio em a *horas e a outra em* b *horas, pergunta-se que tempo seria preciso para enchel-o, correndo as duas simultaneamente?*

Si esse tempo fosse conhecido, seria facil verifical-o calculando a quantidade d'agua fornecida por cada fonte, e reunindo os resultados, nos certificarmos então de que realmente esta somma comporia a totalidade d'agua que póde conter o reservatorio.

Para formar a equação designaremos por x o tempo desconhecido, e indiquemos sobre x as operações enunciadas que devem ligar esta quantidade á a e b.

Isto posto, tomando a capacidade do reservatorio para unidade, ver-se-á que a primeira fonte que o encheu só num numero a de horas, fornece em uma hora a quantidade d'agua representada por

$$\frac{1}{a}$$

e por conseguinte dará em x horas

$$x \times \frac{1}{a}$$

ou

$$\frac{x}{a}$$

A segunda fonte que enche só o reservatorio em b horas, fornece em uma hora a quantidade d'agua

$$\frac{1}{b}$$

e por conseguinte dará em x horas,

$$x \times \frac{1}{b}$$

ou

$$\frac{x}{b}$$

A quantidade total d'agua fornecida pelas duas fontes conjuntamente será pois,

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b}$$

e porque esta quantidade deve ser igual a que contem o reservatorio, e que foi tomada para unidade, ter-se-á finalmente a equação

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$$

Esta equação sendo submettida ás regras já conhecidas, conduz a

$$bx + ax = ab$$

donde

$$x = \frac{ab}{b+a}$$

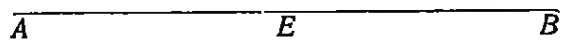
Esta ultima fórmula indica, para resolver todos os casos da questão proposta, que se deve dividir o producto dos tempos pela somma dos mesmos.

144 — Resolvamos agora o *problema dos correios*. Póde geralmente ser enunciado do seguinte modo:

Dois correios para irem ao encontro um do outro, partem ao mesmo tempo de duas cidades cuja distancia é conhecida; sabendo-se quantos kilometros cada um delles faz por hora, pergunta-se em que ponto da estrada commum se encontrarão.

Representemos por a a distancia das duas cidades, que chamaremos A e B; por b o numero de kilometros

que percorre em uma hora o correio partido de A; por c o numero de kilometros percorrido no mesmo tempo pelo correio que partiu de B e finalmente por x e y os percursos respectivos de um e de outro desde A e B até o ponto de encontro E como mostra a figura seguinte:



por isso que

$$AE + BE = AB,$$

teremos a equação

$$x + y = a$$

Notemos que o primeiro correio que faz b kilometros em uma hora e por conseguinte um kilometro em

$$\frac{1}{b}$$

da hora, percorrerá x kilometros no tempo representado por

$$x \times \frac{1}{b} \text{ ou } \frac{x}{b}$$

Pela mesma razão, o segundo correio que fez c kilometros em uma hora e por conseguinte um kilometro em

$$\frac{1}{c}$$

da hora, percorrerá a distancia y no tempo

$$y \times \frac{1}{c} \text{ ou } \frac{y}{c}$$

Por isso que o tempo gasto por ambos no percurso das distancias x e y é o mesmo, teremos ainda a equação

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$$

As equações do problema serão por conseguinte

$$\begin{cases} x + y = a \\ \frac{x}{b} = \frac{y}{c} \end{cases}$$

Fazendo desapparecer o denominador b da segunda, teremos

$$x = \frac{by}{c}$$

substituindo esta expressão de x na primeira, que tornar-se-á

$$\frac{by}{c} + y = a$$

deduziremos

$$by + cy = ac$$

donde se vê que

$$y = \frac{ac}{b + c}$$

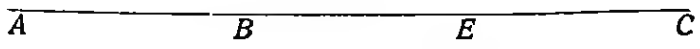
Substituindo emfim esta expressão de y na de x, ter-se-á

$$x = \frac{b}{c} \times \frac{ac}{b + c} \text{ ou } x = \frac{abc}{c\,(b + c)}$$

ou finalmente

$$x = \frac{ab}{b + c}$$

145 — Embaracemos mais o problema. Supponhamos para isto que os dois correios marcham no mesmo sentido em direcção ao ponto C, isto é, que partem ao mesmo tempo dos pontos A e B, seguindo o que parte daquelle ponto atrás do que parte deste dirigindo-se ambos para o ponto C, como mostra a figura seguinte:



Nesta hypothese torna-se evidente que o primeiro correio só pode encontrar o segundo se tiver maior velocidade e que o ponto de encontro E se achará neste caso entre B e C.

Nestas condições conservando os mesmos dados que acima, e observando que agora

$$AE - BE = AB,$$

ter-se-á

$$x - y = a$$

A segunda equação

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$$

exprimindo do mesmo modo a igualdade dos tempos gastos pelos dois correios para encontrarem-se, não mudará evidentemente.

As duas equações

$$x - y = a$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$$

sendo resolvidas como as precedentes, nos darão

$$x = \frac{by}{c}$$

$$\frac{by}{c} - y = a, \; by - cy = ac$$

$$y = \frac{ac}{b - c}$$

$$x = \frac{b}{c} \times \frac{ac}{b - c} = \frac{abc}{c(b - c)}$$

e emfim

$$x = \frac{ab}{b - c}$$

Evidentemente os valores de x e de y só serão positivos quando $b > c$, isto é, quando o correio que parte de A é mais veloz do que o outro, que parte de B.

Si fizermos, por exemplo,

$$b = 20,\ c = 10,$$

ter-se-á

$$x = \frac{20\,a}{20 - 10} = \frac{20\,a}{10} = 2\,a,$$

$$y = \frac{10\,a}{20 - 10} = \frac{10\,a}{10} = a;$$

donde resulta que o ponto de encontro E está afastado do ponto A de duas vezes AB.

Si agora suppuzermos que $b < c$, por exemplo,

$$b = 10,\ c = 20,$$

achar-se-á

$$x = \frac{10\,a}{10 - 20} = \frac{10\,a}{-10} = -a,$$

$$y = \frac{20\,a}{10 - 20} = \frac{20\,a}{-10} = -2\,a.$$

Estes valores negativos deixam ver que a questão não pode agora ser concebida nos termos em que foi enunciada.

E' com effeito absurdo admittir-se que o correio que parte de A percorrendo apenas 10 kilometros por hora possa jamais encontrar o que parte de B marchando com a velocidade de 20 kilometros e tendo partido adiante do primeiro.

Entretanto, estes mesmos valores resolvem a questão num outro sentido; porque substituindo-os nas equações

$$x - y = a,$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c},$$

ter-se-á

$$-a + 2a = a,$$

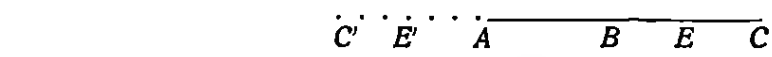
$$-\frac{a}{10} = -\frac{2a}{20},$$

equações que são satisfeitas, por isso que os primeiros membros tornam-se iguaes aos segundos.

E si attendermos aos signaes dos termos que compõem a primeira, ver-se-á como se deve modificar o enunciado da questão para tornal-a possivel.

Com effeito, vê-se que o caminho a, correspondente a x é percorrido pelo primeiro correio, que está de facto subtrahido do caminho $2a$, correspondente a y e percorrido pelo segundo correio; de sorte que tudo se passa como se tivessemos mudado y em x e x em y e como se houvessemos supposto que o correio partido de B marchasse atrás do outro.

Essa mudança no enunciado importa em mudar o sentido da marcha dos correios ; de sorte que em vez de marcharem para o ponto C, seguem do lado opposto a C, conforme mostra a figura seguinte



O encontro dar-se-á então em E' e dahi resulta que

$$BE' - AE' = AB,$$

o que dá, com effeito,

$$y - x = a$$

e do mesmo modo,

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}.$$

Achar-se-ia então

$$x = \frac{ab}{c - b} = \frac{10\,a}{20 - 10} = a,$$

$$y = \frac{ac}{c - b} = \frac{20\,a}{20 - 10} = 2a$$

valores positivos que resolvem a questão no sentido preciso de seu enunciado.

146 — Basta reflectir sobre o enunciado desta questão para verificar que ha um caso em que é inteiramente absurda.

E' o que acontece quando se suppõe que os dois correios têm a mesma velocidade: é então evidente que, seja qual fôr o ponto de partida, á direita ou á esquerda, jamais poderão se encontrar, por isso que mediará entre elles o mesmo intervallo do ponto de partida.

Semelhante absurdo manifesta-se claramente nas equações, porque obtem-se então $b = c$, visto como tendo ambos os correios a mesma velocidade, o espaço percorrido na unidade de tempo será o mesmo.

A equação

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$$

torna-se

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b},$$

donde resulta que

$$x = y$$

Em vista disso, a equação $x - y = a$ transforma-se em

$$x - x = a \text{ ou } 0 = a,$$

resultado absurdo, porque suppõe nulla uma quantidade a cuja grandeza é dada.

Um tal absurdo manifesta-se de maneira assás singular nas expressões das incognitas,

$$x = \frac{ab}{b-c}, \; y = \frac{ac}{b-c}.$$

O denominador commum $b - c$, tornando-se nullo na hypothese de $b = c$, ter-se-á

$$x = \frac{ab}{0}, \; y = \frac{ac}{0}$$

ou

$$x = \infty \text{ e } y = \infty,$$

que exprimem symbolicamente a impossibilidade da questão.

Entretanto é facil de verificar que os valores

$$x = \frac{ab}{0}, \text{ e } y = \frac{ac}{0}$$

satisfazem ás equações propostas; mesmo porque é uma propriedade essencial da Algebra que os symbolos representativos das incognitas, quaesquer que sejam elles, sendo submettidos ás operações indicadas sobre essas incognitas, satisfaçam as equações do problema.

Substituindo-os, com effeito nas equações

$$x - y = a$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b},$$

ter-se-á para o primeiro

$$\frac{ab}{0} - \frac{ab}{0} = a,$$

ou

$$\frac{ab - ab}{0} = a \text{ ou } ab - ab = a \times 0,$$

ou emfim

$$0 = 0$$

A segunda equação nos dá, nas mesmas circumstancias,

$$\frac{ab}{0 \times b} = \frac{ab}{0 \times b}$$

Os dois membros de cada equação, tornando-se iguaes, é obvio que são ellas satisfeitas.

Resta-nos ainda explicar como a noção indicada pela expressão $\frac{ab}{0}$ convém ao resultado que acima encontramos.

Para isso dividamos por x os dois membros da equação

$$x - y = a,$$

ter-se-á

$$1 - \frac{y}{x} = \frac{a}{x}$$

E como a equação

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b}$$

nos dá $x = y$, a primeira tornar-se-á

$$1 - 1 = \frac{a}{x} \text{ ou } 0 = \frac{a}{x}$$

O erro consiste aqui na quantidade $\frac{a}{x}$, de que o segundo membro excede o primeiro; mas semelhante erro tornar-se-á cada vez menor, á medida que x crescer.

E', pois, com razão que a Algebra fornece para x uma expressão que não poderá ser representada por nenhum numero por maior que seja, mas que indicando uma grandeza maior que qualquer uma que se imagine, nos mostra de que modo se póde attenuar cada vez mais o erro resultante da supposição.

147 — Resta-nos sómente ver quaes os valores que tomam as expressões de x e y quando os dois correios têm a mesma velocidade e partem do mesmo ponto e no mesmo sentido.

E' evidente que a sua juncção não se daria em nenhum ponto particular, visto como teria lugar em toda a extensão do percurso.

O ponto A e o ponto B, confundindo-se neste caso, ter-se-á então $a = 0$ e constantemente $b = c$; virá pois

$$x = \frac{0.b}{0} = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0.c}{0} = \frac{0}{0}$$

Para interpretar estes valores, remontemos ás equações do problema.

A primeira, tornando-se

$$x - y = 0, \text{ nos dá } x = y;$$

substituindo este valor na segunda que é então

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b}, \text{ virá } \frac{y}{b} = \frac{y}{b}$$

Ora, esta equação, tendo os seus dois membros identicos, isto é, compostos dos mesmos termos, affectos do mesmo signal, é satisfeita por qualquer valor que se attribua a y e não poderá dar para esta incognita um valor determinado.

De outro lado torna-se evidente que a equação

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b},$$

significa que $x = y$, equação identica, que não exprime por conseguinte nada mais que a primeira.

Resalta sómente de uma e da outra que os dois correios estarão sempre juntos, por isso que as distancias x e y se contam ambas do ponto A, e são iguaes na origem, e, portanto, em todo o percurso. A expressão $\frac{0}{0}$ é, pois, aqui o symbolo de uma quantidade indeterminada, isto é, que admitte uma infinidade de valores: dizemos aqui, porque casos ha em que isto não acontece e então a expressão considerada não tem a mesma origem que a precedente.

Já dissemos com effeito que o symbolo $\frac{0}{0}$ póde indicar tambem a existencia de um factor commum a ambos os termos de uma relação, e que uma vez supprimido tal factor elle não se reproduz mais.

148 — OUTROS PROBLEMAS — Vamos resolver tres outros problemas de incontestavel utilidade pratica.

I. *Tem-se duas barras de prata, uma com o titulo 0,820, a outra com o titulo de 0,950; formar por meio dellas uma liga pesando 115 grammas e ao titulo de 0,870.*

Designemos por x e y os numeros de grammas de outro metal, que é preciso juntar ás duas barras para obter a liga pedida. Tem-se immediatamente

$$x + y = 115$$

Exprimindo que a quantidade de prata contida na liga é egual á somma das que se contêm nas partes misturadas, teremos a segunda equação

$$0{,}820\,x + 0{,}950\,y = 115 \cdot 0{,}870.$$

Temos, pois, um systema de duas equações a duas incognitas, para resolver o problema.

Da primeira deduz-se

$$y = 115 - x;$$

substituindo este valor na segunda, obtem-se

$$x.\ 0{,}820 + (115 - x) \cdot 0{,}950 = 115 \cdot 0{,}870,$$

donde

$$x\,(0{,}950 - 0{,}820) = 115\,(0{,}950 - 0{,}870),$$

isto é

$$x \cdot 0{,}130 = 115 \cdot 0{,}080.$$

Resolvendo esta equação, virá

$$x = \frac{115 \cdot 0,080}{0,13} = 70,769$$

e, por conseguinte,

$$y = 115 - x = 44^{g},231,$$

valores que verificam as condições do problema.

II. *Conhecendo os pesos especificos* d *e* d' *de duas substancias e o peso especifico* D *de uma de suas combinações ou de uma de suas misturas, determinar a proporção de certa substancia contida no peso* P *da combinação ou mistura considerada, suppondo-se que a combinação se opera sem variação de volume.*

Designemos por x e y os pesos das duas substancias, e observemos que o volume é igual ao quociente do peso pelo peso especifico.

Tem-se então

$$x + y = P$$

$$\frac{x}{d} + \frac{y}{d'} = \frac{P}{D}$$

A segunda equação exprime que a somma dos volumes misturados ou combinados é igual ao volume da mistura ou da combinação.

Resolvendo a primeira equação, obtém-se

$$y = P - x;$$

substituindo esta expressão na segunda, virá

$$\frac{x}{d} + \frac{P}{d'} - \frac{x}{d'} = \frac{P}{D}$$

ou

$$x\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d'}\right) = \frac{P}{D} - \frac{P}{d'},$$

isto é

$$x\frac{d'-d}{dd'} = \frac{P(d'-D)}{Dd'}$$

Simplificando e mudando os signaes dos dois parenthesis, visto como suppomos $d > d'$ e, por conseguinte, $D > d'$, virá

$$x = \frac{Pd\,(D-d')}{D\,(d-d')}$$

Para achar y, pode-se notar que as equações consideradas não mudam, quando nellas se troca x por y e y por x, d por d' e d' por d.

Fazendo as mesmas trocas na expressão de x, visto como as condições de symetria permittem deduzir do valor de uma incognita o da outra, acha-se immediatamente

$$y = \frac{Pd'\,(D-d)}{D\,(d'-d)} = \frac{Pd'\,(d-D)}{D\,(d-d')}$$

Trocamos os signaes dos parenthesis, porque d é ao mesmo tempo maior que d' e maior que D.

Póde-se applicar estas fórmulas á solução do celebre problema do rei de Syracusa *Hieron: este rei, havia entregue a um ourives uma certa quantidade de ouro para fazer uma corôa destinada a Jupiter. Acabada a obra elle suspeitou que uma parte do ouro houvesse sido substituida por igual peso de prata. Para tirar a duvida consultou a Archimedes, e este resolveu o problema por meio da lei que descobriu para a physica e que tomou o seu nome.*

A corôa pesava 4.765 grammos. O peso especifico do ouro é 19,56, o da prata 10,47; o peso especifico da corôa devia ser portanto 15,06. Para conhecer a quantidade de prata introduzida pelo ourives, basta, portanto, fazer na formula

$$y = \frac{Pd'\,(d-D)}{D\,(d-d')}$$

$$P = 7465,\ d = 19,56\ d' = 10,47,\ D = 15,06.$$

Acha-se $y = 1674{,}2$ a menos de $0{,}1$. Assim se vê que o ourives substituiu 1647,2 grammos de ouro por igual peso de prata.

III. *A distancia entre duas cidades collocadas á margem de uma via ferrea é* a. *Um comboio parte da primeira cidade para a segunda com uma velocidade de* v *kilometros por hora;* h *horas depois um outro comboio parte da segunda cidade para a primeira com uma velocidade de* v' *kilometros por hora. Pergunta-se, no fim de que tempo e a que distancia da primeira cidade terá lugar o cruzamento dos dois comboios.*

No ponto de encontro, a somma das distancias percorridas pelos dois comboios é igual a a. Si o caminho percorrido pelo primeiro comboio for designado por x e o do segundo por y, ter-se-á

$$x + y = a$$

Mas o caminho x foi percorrido num tempo igual a $\frac{x}{v}$ sendo a hora a unidade de tempo. Pela mesma razão, o caminho y foi percorrido num tempo $\frac{y}{v'}$.

De mais, o primeiro combio tendo um avanço de h horas, a differença dos tempos considerados deve ser igual a h; dahi pois a segunda equação

$$\frac{x}{v} - \frac{y}{v'} = h$$

Substituindo nesta a incognita y pelo seu valor $a - x$, deduzido da primeira equação, virá

$$\frac{x}{v} - \frac{a - x}{v'} = h,$$

donde

$$v'x - av + vx = vv'h \text{ e } x = \frac{v(a + v'h)}{v + v'}$$

O tempo decorrido entre a parte do primeiro comboio e o encontro com o segundo sendo igual a $\frac{x}{v}$, terá para expressão

$$\frac{a + v'h}{v + v'}.$$

CAPITULO VIII

TRANSFORMAÇÕES ALGEBRICAS BASEADAS NA LEI BINOMINAL, DE NEWTON: APPLICAÇÃO DESTA LEI Á POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO ARITHMETICA E ALGEBRICA

§ 22

Instituição da lei de Newton: sua applicação ás potencias quaesquer de um binomio e de um polynomio

149 — IMPORTANCIA DA LEI BINOMINAL DE NEWTON — Tendo estudado as *transformações das fórmulas* relativas aos dois primeiros pares de elementos algebricos, vamos agora nos occupar das que se referem ao terceiro par.

Todas essas transformações repousam essencialmente sobre o estudo directo da lei que rege o desenvolvimento de uma potencia qualquer de um binomio.

Não precisamos tratar aqui do modo de elevar a uma potencia qualquer um termo monomio, porque esta questão é muito simples.

Para resolvel-a basta elevar o coefficiente deste termo á potencia considerada e multiplicar o expoente de cada um dos factores literaes, que o compõem, pelo expoente da potencia.

Vejamos como reduzir a esta questão a mais complexa em que é dada uma expressão algebrica de mais de um termo, e procura-se formar uma qualquer de suas potencias.

O processo espontaneo consiste como sabemos em formar successivamente todas as potencias até aquella que se considera, mediante o emprego redobrado da multiplicação.

Si, por exemplo, quizessemos a quarta potencia de um binomio, teriamos primeiramente de formar o seu quadrado, depois o cubo e finalmente a quarta potencia.

Este processo, embora natural, é comtudo longo e fastidioso na sua applicação.

A lei binominal de Newton fez, porém, desapparecer estes inconvenientes, porque permitte o desenvolvimento da potencia qualquer de um binomio, sem que seja necessario formar as potencias precedentes.

Ella tem ainda a grande vantagem de permittir o desenvolvimento de uma potencia de um polynomio, reduzindo este caso ao da potenciação de um binomio.

Além disto, graças a esta lei, a elevação á potencia poude ser considerada como uma operação distincta da multiplicação, e a extracção das raizes extendeu-se a um grau qualquer, apesar da complexidade dos calculos uniformemente exigidos. Veremos como a instituição dos logarithmos fez desapparecer tal inconveniente.

150 — Nenhum embaraço póde offerecer o estudo directo da lei binominal quando se conhece a fórmula das combinações, já indicada na arithmetica, e o modo pelo qual a considerou o eminente Clairaut.

Para estabelecer a lei que rege o desenvolvimento de uma potencia qualquer de um binomio, formemos successivamente o producto de uma serie indeterminada de binomios cujo primeiro termo suppomos commum a todos.

Conservando differentes os segundos termos dos binomios multiplicadores e observando os productos resultantes, vejamos si é possivel instituir uma lei geral para os respectivos desenvolvimentos.

Si conseguirmos isso, é claro que estará *ipso facto*, conhecida a lei do desenvolvimento da potencia corres-

pondente ao numero de binomios multiplicados, desde que se tenha o cuidado de tornar communs os segundos termos respectivos:

Teremos:

1° Producto

$$(x + a)\,(x + b) = x^2 + a \mid x + ab$$
$$+ b \mid$$

2° Producto

$$(x + a)\,(x + b)\,(x + c) = x^3 + a \mid x^2 + ab \mid x + abc$$
$$+ b \mid + ac \mid$$
$$+ c \mid + bc \mid$$

3° Producto

$$(x + a)\,(x + b)\,(x + c)\,(x + d) = x^4 + a \mid x^3 + ab \mid x^2 + abc \mid x + abcd$$
$$+ b \mid + ac \mid + abd \mid$$
$$+ c \mid + ad \mid + acd \mid$$
$$+ d \mid + bc \mid + bcd \mid$$
$$+ bd \mid$$
$$+ cd \mid$$

4º Producto

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e) = x^5$	$+ a$	$+ b$	$+ c$	$+ d$	$+ e$					
	$x^4 + ab$	$+ ac$	$+ ad$	$+ ae$	$+ bc$	$+ bd$	$+ be$	$+ cd$	$+ ce$	$+ de$
	$x^3 + abc$	$+ abd$	$+ abe$	$+ acd$	$+ ace$	$+ ade$	$+ bcd$	$+ bce$	$+ bde$	$+ cde$
	$x^2 + abcd$	$+ abce$	$+ abde$	$+ acde$	$+ bcde$					
	$x + abcde$									

.....

A inspecção destes desenvolvimentos nos mostra:

1.º Que cada um delles é um polynomio completo, homogeneo e ordenado do mesmo modo que os binomios factores;

2.° Em relação aos expoentes, que o expoente de x é a principio igual ao numero de binomios multiplicados, e que este expoente diminue successivamente de uma unidade, de um termo ao seguinte, até o ultimo termo onde é nullo, o que prova que o numero de termos de cada um dos productos é superior de uma unidade ao numero de binomios factores;

3.° Quanto aos coefficientes das diversas potencias de x, nota-se que o coefficiente do primeiro termo é á unidade; que o coefficiente do segundo (que tem um termo antes de si e em que o expoente de x é menor de uma unidade que o numero de factores) é igual á somma dos segundos termos dos binomios factores; que o coefficiente do terceiro termo (que tem dois antes de si, e em que o expoente de x é menor de duas unidades que o numero de factores) é igual á somma dos productos differentes dos segundos termos dos binomios factores, multiplicados dois a dois; que o coefficiente do quarto termo (que tem tres antes de si e em que o expoente de x é menor de tres unidades que o numero de factores) é igual á somma dos productos differentes dos segundos termos dos binomios factores multiplicados tres a tres.

Deixando-nos guiar por analogia, podemos dizer que o coefficiente de um termo qualquer, daquelle que tem n antes de si e em que o expoente de x é menor de n unidades que o numero de binomios factores, é igual a somma dos productos differentes dos segundos termos dos binomios factores multiplicados n a n; que emfim o coefficiente do ultimo termo é igual ao producto dos segundos termos dos binomios factores.

Si multiplicarmos seis, sete, oito, etc., binomios, verificaremos sempre a mesma lei na formação dos productos, de modo que podemos concluir a sua generalidade para um numero qualquer, m, de binomios.

Teremos neste caso :

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots.(x+j)(x+k) = x^m + A_1 x^{m-1} + \\ + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots. + A_{n-1} x^{m-n+1} + \\ + A_n x^{m-n} \ldots. + A_m,$$

sendo A_1 a somma dos segundos termos dos m binomios multiplicados, isto é,

$$A_1 = a + b + c + \ldots. + l + k;$$

A_2 igual á somma dos productos differentes dos m segundos termos dos binomios factores, multiplicados dois a dois; A_3 igual á somma dos mesmos multiplicados tres a tres, e assim por diante até A_m que é igual ao producto dos m segundo termos dos binomios factores, isto é,

$$A_m = abcd \ldots. ijk$$

Obtida assim por indicação, esta lei póde ser ainda verificada, mostrando-se que admittindo-a para um numero m de binomios, ainda é verdadeira para $m + 1$.

Com effeito, multiplicando ambos os membros da igualdade precedente por um outro binomio $x + l$, teremos :

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots.(x+k)(x+l) = = x^{m+1} + \\ + A_1 \left| \begin{matrix} x^m \\ + l \end{matrix} \right. + A_2 \left| \begin{matrix} x^{m-1} \\ + lA_1 \end{matrix} \right. + \ldots. + A_{n-1} \left| \begin{matrix} x^{m-n+2} \\ + A_{n-2} l \end{matrix} \right. + A_n \left| \begin{matrix} x^{m-n+1} \\ + A(n-1) l \end{matrix} \right. + \\ + \ldots. + A_{m-1} \left| \begin{matrix} x^2 \\ + A_{m-2} l \end{matrix} \right. + A_m \left| \begin{matrix} x \\ + A_{m-1} l \end{matrix} \right. + A_m l$$

A' inspecção deste producto nota-se que nelle se realiza tudo quanto anteriormente observamos :

A subordinação dos expoentes é evidentemente a mesma; porque o expoente de x no primeiro termo é igual a $(m + 1)$, numero de binomios factores e vae diminuindo de uma unidade de um termo ao seguinte até o

ultimo em que é nullo; de modo que se observa ser o numero total de termos do producto igual a $m + 2$, isto é, igual ao numero de binomios que se multiplicam mais um.

Quanto aos coefficientes, nota-se tambem: que o do primeiro termo é a unidade; que o do segundo é $A_1 + l$; ora A_1 por hypothese sendo igual á somma dos segundos termos dos m primeiros binomios, $A_1 + l$ será a somma dos segundos termos dos $m + 1$ binomios; que o coefficiente do terceiro termo é $A_2 + A_1 l$; ora A_2 sendo por hypothese a somma dos productos differentes, dois a dois, dos segundos termos dos m primeiros binomios e $A_1 l$ exprimindo a somma dos productos de cada um dos segundos termos dos m primeiros binomios multiplicados pelo novo segundo termo l, logo $A_2 + A_1 l$ é a somma dos productos differentes dois a dois dos segundos termos dos $m + 1$ binomios; que o coefficiente do quarto termo, será $A_3 + A_2 l$, isto é, igual á somma dos productos differentes tres a tres dos segundos termos dos $m + 1$ binomios; que em geral, por isso que A_n exprime a somma dos productos n a n dos segundos termos dos m primeiros binomios e $A_{n-1} l$ a somma dos productos $(n - 1)$ a $(n - 1)$ destes segundos termos multiplicados pelo novo segundo termo l, conclue-se que $A_n + A_{n-1} l$ é igual á somma dos productos differentes n a n dos segundos termos dos $m + 1$ binomios; e finalmente que o ultimo termo $A_m l$ é o producto de todos os segundos termos dos $m + 1$ binomios.

Concluimos, pois, que a lei de composição, supposta verdadeira para o producto de um numero m de binomios, o é tambem para um numero $m + 1$; ella é portanto geral e extensiva a um numero qualquer.

151 — Igualemos agora os segundos termos dos binomios, isto é, concebamos que no producto effectuado dos m factores $(x + a)$, $(x + b)$, etc. (1) se faça

$$a = b = c = d = e = \ldots = k.$$

E' a principio evidente que a expressão deste producto torna-se no primeiro membro $(x + a)^m$.

Vejamos o desenvolvimento que constitue o segundo membro : os coefficientes sendo

$$A_1 \text{ ou } a + b + c + d + \ldots + k;$$

$$A_2 \text{ ou } ab + ac + \ldots; \; A_3 \text{ ou } abc + abd + \text{etc.},$$

é claro que fazendo as substituições na expressão considerada (1).

1.° O coefficiente de x^{m-1} ou A_1 tornar-se-á em

$$a + a + a + a + a \text{ etc.},$$

isto é, a repetido tantas vezes quantas são as letras a, b, c, d ...., e como estas são em numero de m, teremos que A_1 se reduz a ma;

2.° que o coefficiente A_2, de x^{m-2}, se reduz a

$$a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + \ldots,$$

isto é, a a^2 repetido tantas vezes quantos são os productos differentes que se podem fazer com as m letras tomadas duas a duas: como porém, estes productos são dados pelo numero de combinações de m objectos dois a dois, o seu numero será expresso por $mC_2 \times a^2$;

3.° que o coefficiente A_3 de x^{m-3} se reduzirá a

$$a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + \ldots,$$

isto é, a a^3 repetido tantas vezes quantos são os productos differentes dos m segundos termos dos binomios factores tres a tres, e como o numero destes productos é dado pelo de combinações de m elementos tres a tres, elle será igual a $a^3 \times mC_3$.

Em geral, sendo $A_n x^{m-n}$ o termo que tem n termos antes de si, o coefficinnte A_n, que na hypothese de serem differentes os binomios factores era igual á somma dos

productos differentes n a n dos seus segundos termos, reduzir-se-á agora a a^n multiplicado pelo numero desses productos differentes, ou, o que é o mesmo, pelo numero de combinações que podem ser feitas com as m letras tomadas n a n, isto é $A_n = {}^mC_n \times a^n$.

Finalmente A_m representando o producto dos m segundos termos dos binomios factores, quando fizermos

$$a = b = c = d = \text{etc.}$$

elle reduzir-se-á a

$$a \times a \times a \times a \ldots . \times a = a^m$$

Fazendo pois na expressão (1) as substituições dos coefficientes pelos seus correspondentes teremos:

$$(x+a)^m = x^m + {}^mC_1\, a x^{m-1} + {}^mC_2\, a^2 x^{m-2} + {}^mC_3\, a^3 x^{m-3} + \\ + \ldots {}^mC_n\, a^n x^{m-n} + \ldots . + {}^mC_{m-3}\, a^{m-3} x^3 + \\ + {}^mC_{m-2}\, a^{m-2} x^2 + {}^mC_{m-1}\, a^{m-1} x + a^m. \qquad (2)$$

A theoria das combinações tendo-nos mostrado que

$${}^mC_1 = m, {}^mC_2 = \frac{m(m-1)}{1.2}, {}^mC_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.}, \ldots . {}^mC_n = \\ = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1.2.3.\ldots. n},$$

e que

$${}^mC_n = {}^mC_{m-n},$$

teremos para expressão final do desenvolvimento de $(x+a)^m$.

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.} a^3 x^{m-3} + \\ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} a^4 x^{m-4} + \ldots . + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+2)(m-n+1)}{1.2.3\ldots.(n-1)n} a^n x^{m-n} + \\ + \ldots . + a^m \qquad (3)$$

Tal é a fórmula geral denominada de binomio de Newton.

Vê-se que o seu desenvolvimento tem $m + 1$ termos, sendo os extremos x^m e a^m.

Nos termos intermediarios o expoente de x vae diminuindo e o expoente de a crescendo de uma unidade de um termo ao seguinte; de modo que em cada termo a somma dos expoentes das duas letras é sempre m, o que era de esperar, visto como o binomio $x + a$ sendo homogeneo, as suas potencias devem tambem sel-o.

152 — USO DO TERMO GERAL DA FÓRMULA DO BINOMIO; EXAME ESPECIAL DESTA — O termo affecto de $a^n x^{m-n}$, isto é, aquelle que tem n antes de si, e que por isso é de ordem $n + 1$, é chamado *termo geral* porque delle poderemos deduzir todos os outros termos mediante hypotheses particulares feitas sobre n.

Representando-o por T_{n+1}, teremos (2)

$$T_{n+1} = {}^mC_n\, a^n\, x^{m-n}$$

ou (3)

$$T_{n+1} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-n+2)\,(m-n+1)}{1.2.3\,\ldots\,(n-1)\,n}\, a^n\, x^{m-n} \quad (4)$$

Fazendo a substituição de n por $n + 1$, teremos o termo seguinte, isto é, o de ordem $n + 2$;

$${}^mC_{n+1}\, a^{n+1}\, x^{m-(n+1)} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots}{1.2.3\,\ldots}$$

$$\frac{(m-n+2)\;(m-n+1)\;(m-n)}{1.2.3\ldots\;(n-1)\,n\,(n+1)}\, a^{n+1}\, x^{m-(n+1)}$$

Comparando este termo com o precedente, nota-se que o seu coefficiente se obtem multiplicando o coefficiente do termo precedente pelo expoente de x $(m-n)$ e dividindo-o pelo expoente de a (n) augmentado de uma unidade; e que relativamente aos expoentes de a e de x, elle

differe do precedente pelo facto de estar este diminuido e aquelle augmentado de uma unidade.

Como a expressão (4) representa um termo qualquer desde que seja particularisado, podemos concluir que *o coefficiente de um termo qualquer se obtem multiplicando o coefficiente do termo precedente pelo expoente de* x *nesse termo, e dividindo o resultado pelo expoente de* a *augmentado de uma unidade.*

Esta dependencia de um termo para o precedente, que aliás pode ser directamente verificada no desenvolvimento (3), é na parte que diz respeito aos coefficientes uma consequencia immediata da formula estabelecida na Theoria de Combinações, onde vimos:

$$^{m}C_{n+1} = \frac{m-n}{n+1}\ ^{m}C_{n}$$

A expressão (2) nos mostra com effeito que $^{m}C_{n}$ é o coefficiente do termo de ordem $n+1$, e que $^{m}C_{n+1}$ é o coefficiente do termo de ordem $n+2$.

E como o expoente de a num termo qualquer representa o numero de termos que estão antes e o expoente de x o numero de termos que estão depois, podemos completar esse termo escrevendo á direita do coefficiente obtido as letras a e x, augmentando de uma unidade o expoente daquella no termo precedente e diminuindo uma unidade no expoente desta.

Além desta dependencia de um termo para com o precedente, a expressão (2) nos mostra que os coefficientes dos termos equidistantes dos extremos são iguaes, isto é

$$^{m}C_{2} = {}^{m}C_{m-2},\ {}^{m}C_{3} = C_{m-3},\ {}^{m}C_{4} = {}^{m}C_{m-4},$$
$$^{m}C_{5} = {}^{m}C_{m-5} \ \ldots\ \text{etc.};$$

por isso que vimos na Theoria das Combinações que

$$^{m}C_{n} = {}^{m}C_{m-n}$$

O termo geral (4) deduzido do desenvolvimento (3) tambem nos leva á mesma conclusão. Porque, fazendo $n = 1, 2, 3$, etc., obteremos o 2°, 3°, 4° .... etc., termos, isto é:

$$max^{m-1}, \quad \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2},$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.} a^3 x^{m-3}$$

etc.; e fazendo tambem $n = m - 1, m - 2, m - 3$, etc., obteremos o penultimo, antepenultimo etc., termos, isto é

$$ma^{m-1}x, \quad \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} x^2, \quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.} a^{m-3}x^3 \text{ etc.}$$

Comparando aquelles termos com estes, verifica-se effectivamente que elles são iguaes dois a dois.

Esta propriedade que se deduz do termo geral, dispensa-nos de calcular os coefficientes dos termos que vão além da metade do desenvolvimento:

Si o expoente m é impar o numero $m + 1$ dos termos do desenvolvimento é par; e como os coefficientes reproduzem-se dois a dois a partir dos extremos, bastará calcular metade dos coefficientes do desenvolvimento e repetil-os depois na ordem inversa, trocando os expoentes de x e de a.

Si o expoente m é par, o numero $m + 1$ dos termos do desenvolvimento é impar; os coefficientes destes termos reproduzem-se então dois a dois a igual distancia dos extremos, com excepção do termo do meio unico cujo coefficiente não se reproduz, e que é maior que o coefficiente de todos os outros.

Bastará neste caso calcular metade mais um destes coefficientes.

Assim, por exemplo, no desenvolvimento de $(x + a)^8$ que consta de nove termos, depois de ter achado os coefficientes dos cinco primeiros termos, escrevemos o coefficiente

Universidade de São Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

ente do sexto termo igual ao do quarto, o do setimo igual ao do terceiro, o do oitavo igual ao do segundo, e finalmente o do nono igual ao do primeiro.

Ora, o primeiro termo do desenvolvimento é x^8. E como o coefficiente de um termo qualquer se forma do precedente multiplicando o seu coefficiente pelo expoente de x, e dividindo o producto pelo expoente de a augmentado de uma unidade, o coefficiente do segundo termo será

$$\frac{1 \times 8}{1} = 8.$$

Augmentando o expoente de a e diminuindo o expoente de x de uma unidade, obteremos $8\,ax^7$ para segundo termo.

Pela mesma razão, o terceiro terá

$$\frac{8 \times 7}{2} = \frac{8}{2} \times 7 = 28$$

para coefficiente, sendo elle portanto $28\,a^2x^6$.

Pela mesma razão, o quarto terá

$$\frac{28 \times 6}{3} = 56$$

para coefficiente, sendo elle, portanto $56\,a^3x^5$.

O quinto será

$$\frac{56 \times 5}{4}\, a^4x^4 = 70\, a^4x^4.$$

Repetindo como dissemos acima os termos formados a partir do precedente, trocando o expoente de x pelo de a e vice-versa, teremos todos os outros, isto é,

$$56\,a^5x^3,\ 28\,a^6x^2,\ 8\,a^7x \text{ e } a^8.$$

O desenvolvimento será, pois:

$$(x + a)^8 = x^8 + 8\,ax^7 + 28\,a^2x^6 + 56\,a^3x^5 + 70\,a^4x^4 + 56\,a^5x^3 + \\ + 28\,a^6x^2 + 8\,a^7\,x + a^8.$$

Seja ainda a desenvolver $(x + a)^9$. Depois do que acabamos de dizer, bastará calcular cinco termos.

Depois de haver formado os dois primeiros termos com auxilio da fórmula (3), se multiplica, 9 coefficiente do segundo por 8, expoente de x neste termo, e divide-se o resultado por 2 expoente de a augmentado de uma unidade. Augmentando de uma unidade o expoente de a e diminuindo de uma unidade o expoente de x, teremos $36\,a^2x^7$ para terceiro termo.

O quarto será

$$\frac{36 \times 7}{3}\,a^3x^6 \text{ ou } 84\,a^3x^6.$$

O quinto será

$$\frac{84 \times 6}{4}\,a^4x^5 = 126\,a^4x^5.$$

Repetindo dahi em diante os termos obtidos em ordem inversa e tendo o cuidado de dar a a o expoente de x, e a x o expoente de a, teremos obtido o desenvolvimento.

$$(x + a)^9 = x^9 + 9\,ax^8 + 36\,a^2x^7 + 84\,a^3x^6 + 126\,a^4x^5 + 126\,a^5x^4 + \\ + 84\,a^6x^3 + 36\,a^7x^2 + 9\,a^8x + a^9.$$

E' facil verificar que a somma destes coeficientes é igual a nona potecia do numero 2.

Fazendo, com effeito $x = a = 1$, virá:

$$2^9 = 1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = \\ 2\,(1 + 9 + 36 + 84 + 126) = 512.$$

O que se observa neste desenvolvimento tem lugar em qualquer outro, porque fazendo na fórmula (3) $x = a = 1$, virá

$$2^m = 1 + m + \frac{m\,(m-1)}{1.2} + \ldots + \frac{m\,(m-1)}{1.2} + m + 1$$

Como a fórmula (3) é verdadeira para qualquer valor de x e de a, é claro que substituindo $+a$ por $(-a)$ esta continuará ainda a ser verdadeira.

Teremos então

$$(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} + \ldots. \quad (5)$$

Si fizermos aqui a hypothese precedente, isto é $x = a = 1$, teremos

$$0 = 1 - m + \frac{m(m-1)}{1.2} - \ldots - \frac{m(m-1)}{1.2} + m - 1.$$

Esta expressão nos mostra que a somma dos coefficientes de ordem impar é igual a somma dos de ordem par; porque se a somma dos termos additivos deste desenvolvimento sendo subtrahida da somma dos termos negativos dá um resto nullo, a primeira que é de ordem impar é igual a segunda que é de ordem par.

Fazendo nas fórmulas (3) e (5) $x = 1$ e $a = z$, teremos:

$$\left.\begin{aligned}(1+z)^m &= 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3.} z^3 + \ldots \\ (1-z)^m &= 1 - mz + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} z^3 + \ldots\end{aligned}\right| \quad (6)$$

fórmulas que dão o desenvolvimento de um binomio cujo primeiro termo é a unidade.

Fazendo na fórmula (2) a substituição de m por $m+1$ virá:

$$(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + (m+1)C_1 ax^m + (m+1)C_2 a^2 x^{m-1} + (m+1)C_3 a^3 x^{m-2} + \\ + \ldots + (m+1)\,C_{m-1}\, a^{m-1} x^2 + (m+1)\,C_m\, a^m x + a^{m+1}.$$

Comparando esta fórmula com a que lhe deu origem, nota-se que os seus coefficientes são iguaes aos coefficien-

tes da mesma ordem no desenvolvimento de $(x + a)$ augmentado cada um do coefficiente precedente.

Com effeito, a theoria das combinações nos mostrou que

$$^{m}C_{n} = {}^{m-1}C_{n} + {}^{m-1}C_{n-1}$$

ou substituindo m por $m + 1$.

$$^{m+1}C_{n} = {}^{m}C_{n} + (^{m-1})\,C_{n-1}.$$

Ora, comparando por exemplo o coefficiente do terceiro termo do desenvolvimento acima, isto é, $^{m+1}C_{2}$ com os coefficientes do terceiro e segundo termos do desenvolvimento de $(x + a)^{m}$, nota-se com effeito que

$$^{m+1}C_{2} = {}^{m}C_{2} + {}^{m}C_{1},$$

em virtude da fórmula acima.

O mesmo se verificaria comparando os demais termos.

Prevalecendo-nos desta observação, vamos formar as potencias successivas do binomio $x + a$, desde 1 até 10. Teremos:

$$(x + a)^{1} = x + a$$

$$(x + a)^{2} = x^{2} + 2ax + a^{2}$$

$$(x + a)^{3} = x^{3} + 3ax^{2} + 3a^{2}x + a^{3}$$

$$(x + a)^{4} = x^{4} + 4ax^{3} + 6a^{2}x^{2} + 4a^{3}x + a^{4}$$

$$(a + x)^{5} = x^{5} + 5ax^{4} + 10a^{2}x^{3} + 10a^{3}x^{2} + 5a^{4}x + a^{5}$$

$$(a + a)^{6} = x^{6} + 6ax^{5} + 15a^{2}x^{4} + 20a^{3}x^{3} + 15a^{4}x^{2} + 6a^{5}x + a^{6}$$

$$(x + a)^{7} = x^{7} + 7ax^{6} + 21a^{2}x^{5} + 35a^{3}x^{4} + 35a^{4}x^{3} + 21a^{5}x^{2} + 7a^{6}x + a^{7}$$

$$(x + a)^{8} = x^{8} + 8ax^{7} + 28a^{2}x^{6} + 56a^{3}x^{5} + 70a^{4}x^{4} + 56a^{5}x^{3} + 28a^{6}x^{2} + 8a^{7}x + a^{8}$$

$$(x + a)^{9} = x^{9} + 9ax^{8} + 36a^{2}x^{7} + 84a^{3}x^{6} + 126a^{4}x^{5} + 126a^{5}x^{4} + 84a^{6}x^{3} + 36a^{7}x^{2} + 9a^{8}x + a^{9}$$

$$(x + a)^{10} = x^{10} + 10ax^{9} + 45a^{2}x^{8} + 120a^{3}x^{7} + 210a^{4}x^{6} + 252a^{5}x^{5} + 210a^{6}x^{4} + 120a^{7}x^{3} + 45a^{8}x^{2} + 10a^{9}ax + a^{10}.$$

Observando estes coefficientes nota-se que os dos primeiros termos que se acham na primeira columna vertical são todos iguaes a unidade; que os da segunda columna vertical são os numeros da escala natural desde 1 até 10; que os da terceira columna são os numeros triangulares; que os da quarta são os numeros pyramidaes triangulares e etc.

Continuando a desenvolver as differentes potencias successivas de $x + a$, e continuando a dispôr do mesmo modo os coefficientes, comprehende-se que obteremos o *triangulo arithmetico de Pascal*, já conhecido na «Theoria numerica da ordem».

153 — TRANSFORMAÇÃO DA LEI BINOMINAL POR MEIO DA FÓRMULA DAS PERMUTAÇÕES. O desenvolvimento binominal (2) póde ainda tomar uma outra forma em que os coefficientes dos seus termos só dependem das permutações.

Para isso basta comparar os seus coefficientes com a fórmula conhecida.

$$^{m}C_{n} = \frac{P_{m}}{P_{n} \times P_{m-n}}$$

Fazendo $n = 1, 2, 3, 4, 5$, etc., teremos

$$^{m}C_{1} = \frac{P_{m}}{P_{1} \times P_{m-1}} = m; \; ^{m}C_{2} = \frac{P_{m}}{P_{2} \times P_{m-2}} = \frac{m\,(m-1)}{1.2}$$

$$^{m}C_{3} = \frac{Pm}{P_{3} \times P_{m-3}} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.2.3} \; etc.$$

Substituindo estas expressões na do desenvolvimento (2) teremos a formula

$$(x + a)^{m} = x^{m} + \frac{P_{m}}{P_{1} \times P_{m-1}} ax^{m-1} + \frac{P_{m}}{P_{2} \times P_{m-2}} a^{2}x^{m-2} +$$

$$+ \frac{P_{m}}{P_{3} \times P_{m-3}} a^{3}x^{m-2} + \ldots + \frac{P_{m}}{P_{m-n} \times P_{n}} a^{n}x^{m-n} +$$

$$+ \ldots + a^{m} \qquad (9)$$

onde o numerador commum a todos os coefficientes é igual ao numero de permutações correspondente ao expoente do binomio, sendo os denominadores respectivos iguaes ao producto das permutações dos expoentes dos dois elementos do mesmo binomio no termo considerado do desenvolvimento.

154. — O EMPREGO DA LEI NO CASO DOS POLYNOMIOS. Esta transformação do desenvolvimento de Newton suscita o modo mais proprio a manifestar a lei das potencias de um polynomio, gradualmente reductivel por contracções provisorias ao caso binominal, como passamos a mostrar.

Supponhamos para isso que se quer o desenvolvimento da mesma potencia de um polynomio qualquer

$$a + b + c + d + e + \ldots,$$

si representarmos por α a somma

$$b + c + d + e + \ldots$$

isto é de todos os termos que seguem ao primeiro, ficaremos reduzidos a desenvolver $(x + \alpha)^m$ e obteremos um polynomio que procederá segundo as potencias ascendentes de α; isto é segundo as potencias ascendentes de um polymonio que tem um termo de menos que o proposto.

Designando do mesmo modo por β a somma

$$c + d + e + \ldots.$$

de todos os termos que seguem o primeiro termo de α, far-se-á depender a formação das 2^a, 3^a, 4^a....m^a. potencias de α das potencias do mesmo grau de β, isto é, das potencias de um polynomio contendo dois termos de menos que o polynomio proposto; de sorte que, continuando a fazer essas contracções provisorias, se chegará a não ter que formar sinão as potencias successivas de um binomio.

A elevação de um polynomio a uma potencia qualquer fica assim consistindo em um maior ou menor numero de desenvolvimentos da potencia de um binomio, unico caso directamente tratado pela lei de Newton.

Exemplos: Supponhamos que se pede a segunda potencia do trimomio

$$ax + by - c.$$

Fazendo

$$by - c = \alpha,$$

teremos:

$$(ax + \alpha)^2 = a^2x^2 + 2\,\alpha\,ax + \alpha^2.$$

Substituindo α pela expressão correspondente vem:

$$(ax + by - c)^2 = a^2x^2 + 2\,(by - c)\,ax + (by - c)^2,$$

expressão que reduz a questão á elevação do binomio

$$by - c$$

á segunda potencia.

Teremos, pois,

$$(by - c)^2 = b^2y^2 - 2\,bcy + c^2,$$

donde

$$(ax + by - c)^2 = a^2x^2 + 2\,(by - c)\,ax + (b^2y^2 - 2\,bcy + c^2)$$

ou

$$(ax + by - c)^2 = a^2x^2 + 2\,axby - 2\,acx + b^2y^2 - 2\,bcy + c^2,$$

onde se vê que *o quadrado de um polynomio é igual á somma dos quadrados de cada um dos seus termos mais a somma dos duplos producto delles, combinados dois a dois.*

Supponhamos agora que se quer formar o cubo do quatrinomio

$$a + b + c + d.$$

Fazendo

$$b + c + d = \alpha,$$

virá:

$$(a + b + c + d)^3 = (a + \alpha)^3 = a^3 + 3\,a^2\alpha + 3\,a\alpha^2 + \alpha^3.$$

Fazendo

$$c + d = \beta,$$

virá:

$$\alpha^2 = (b + \beta)^2 = b^2 + 2\,b\beta + \beta^2 \text{ e } \alpha^3 = (b + \beta)^3 = b^3 + 3\,b^2\beta + 3\,b\beta^2 + \beta^3;$$

e como

$$\beta^2 = (c + d)^2 = c^2 + 2\,cd + d^2, \text{ e } \beta^3 = (c + d)^3 = c^3 + 3\,c^2d + 3\,cd^2 + d^3,$$

será:

$$\alpha^2 = b^2 + c^2 + d^2 + 2\,(bc + bd + cd);$$

portanto

$$\alpha^3 = b^3 + c^3 + d^3 + 3\,(b^2c + b^2d + bc^2 + bd^2 + c^2d + cd^2) + 6\,bcd;$$

e assim

$$(a + b + c + d)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3\,(a^2b + a^2c + a^2d + b^2c + b^2d + c^2d + ca^2 + ab^2 + ac^2 + ad^2 + bc^2 + ba^2) + 6\,(abc + abd + acd + bcd).$$

Este exemplo nos mostra que o cubo de um polynomio é igual á somma dos cubos de seus termos mais a somma do tripulo de suas combinações, duas a duas, mais o sextuplo de suas combinações tres a tres, de tal sorte que em cada producto seja tres a somma dos expoentes.

Resta-nos agora resolver as duas questões relativas á determinação do termo geral e do numero de termos do desenvolvimento de um polynomio.

Para a primeira é que tem lugar a utilidade que attribuimos a fórmula (9) em que transformamos o desenvolvimento binominal.

O termo geral desta fórmula, isto é

$$\frac{P_m}{P_{m-n} \times P_n}$$

ou

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots.\ m}{1.\ 2.\ 3.\ n \times 1.\ 2.\ 3.\ \ldots.\ (m-n)}\ a^n\ x^{m-n}$$

fornece todos os termos do desenvolvimento do polynomio dando a n os valores successivos $0, 1, 2, 3, 4 \ldots m$, comtanto que se convenha em não levar em conta o producto $1, 2, 3 \ldots . n$ quando si suppuzer $n = o$, assim como $1, 2, 3 \ldots . (m - n)$ quando n for igual a m

Isso posto, suppondo que o polynomio dado seja

$$a + b + c + d \ldots,$$

e m o grau da potencia considerada, faremos como se disse acima

$$b + c + d + \ldots . = \alpha,$$

o que conduz a desenvolver

$$(a + \alpha)^m.$$

O termo geral deste desenvolvimento será em virtude da fórmula acima expresso por

$$^mC_n\ \alpha^n\ a^{m-n}, \qquad (10)$$

sendo

$$^mC_n = \frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots.\ m}{1.\ 2.\ 3.\ n \times 1.\ 2.\ 3 \ldots\ (m-n)}.$$

A questão fica, portanto, reduzida a procurar o termo geral de α^n.

Fazendo neste polynomio a contracção

$$c + d + e + \ldots = \beta,$$

será

$$\alpha = b + \beta,$$

e portanto

$$\alpha^n = (b + \beta)^n.$$

O termo geral deste desenvolvimento será

$$^nC_p\ \beta^p\ b^{n-p} \qquad (11)$$

sendo

$$^nC_p = \frac{1.\ 2.\ 3.\ldots n}{1.\ 2.\ 3.\ldots p \times 1.\ 2.\ 3.\ldots (n-p)}.$$

Desta fórmula

$$^nC_p\ \beta^p\ b^{n-p}$$

se deduzirão todas as potencias successivas de α desde que, para cada valor de m se attribua a p todos os valores desde zero até o de n de que se trata; portanto, multiplicando todos estes valores de α^n pelos valores correspondentes de

$$^mC_n\ a^{m-n},$$

obteremos todos os termos do desenvolvimento de

$$(a + b + c + d + \ldots)^m.$$

Substituindo portanto em (10) a expressão α^n pelo seu termo geral (11), teremos:

$$^mC_n\ ^nC_p\ a^{m-n}\ b^{n-p}\ \beta^p \qquad (12)$$

expressão que seria o termo geral do desenvolvimento, si β fosse um monomio.

Suppondo porém, que assim não seja, vê-se que a questão está reduzida a procurar o termo geral de

$$\beta^p = (c + d + e + \ldots)^p.$$

Fazendo

$$d + e + \ldots = \gamma, \text{ será } \beta = c + \gamma$$

e portanto

$$\beta^p = (c + \gamma)^p$$

nota-se que o termo geral deste desenvolvimento é

$$^pC_q \gamma^q c^{p-q} \tag{13}$$

sendo

$$^pC_q = \frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ p}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ q \times 1.2.3.\ (p-q)}$$

Substituindo este termo geral (13) em lugar de β^p na expressão (12), teremos

$$^mC_n\ ^nC_p\ ^pC_q\ a^{m-n}\ b^{n-p}\ \gamma^q, \tag{14}$$

que seria o termo geral do desenvolvimento de

$$(a + b + c + \ldots.)^m,$$

si γ fosse um monomio; e assim por diante.

Para fixar as idéas supponhamos que γ é com effeito um monomio.

Será então $\gamma = d$; que substituindo na expressão precedente, conjunctamente com os valores de

$$^mC_n,\ ^nC_p\ ^pC_q,$$

acima exarados, e supprimindo os factores communs aos dois termos da fracção producto, nos dará para termo geral do desenvolvimento de

$$(a + b + c + d)^m$$

a seguinte formula:

$$T = \frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ m}{1.2.3.\ \ldots\ (m-n) \times 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (n-p) \times 1.\ 2.\ \ldots\ (p-q) \times 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ q} \times$$

$$\times\ a^{m-n}\ b^{n-p}\ c^{p-q}\ d^q$$

Pela constituição desta fórmula, é facil concluir qual a expressão do termo geral de um polynomio de um numero qualquer de termos.

Com effeito, ella nos mostra que a somma dos expoentes $m-n$, $n-p$, $p-q$ e q é igual a m, isto é, que os expoentes das constantes a, b, c e d têm uma somma igual ao grau da potencia; mostra-nos, além disso, que o coefficiente do termo geral tem para numerador o numero de permutações correspondente ao grau da potencia do polynomio, e para denominador o producto dos numeros de permutações correspondentes aos expoentes das constantes no termo em questão.

Considerando, pois, a potencia m de um polynomio

$$(a+b+c+\ldots)$$

a expressão do termo geral seria da forma

$$T=\frac{1.\ 2.\ 3\ldots\ m}{1.\ 2.\ 3\ldots n\times 1.\ 2.\ 3\ldots p\times 1.\ 2\ 3\ldots q\times 1.\ 2.\ 3\ldots r\times\ldots etc.}a^n b^p c^q d^r\ldots \quad (15)$$

na qual os expoentes n, p, q, etc., satisfazem a condição imposta pela equação

$$n+p+q+r+\text{etc.}\ldots\ =m;$$

de sorte que para deduzir desta fórmula todos os termos do desenvolvimento, bastará procurar todos os systemas de valores inteiros e positivos de n, p, q e r que satisfazem aquella equação de condição, e os substituir em seguida na fórmula acima.

Si applicarmos esta fórmula á determinação do termo de

$$(a+b+c)^{10}$$

que é affecto de $a^5b^3c^2$ acharemos

$$\frac{1.\ 2.\ 3\ldots\times 10a^5b^3c^2}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\times 1.\ 2.\ 3\times 1.\ 2}=2.520\ a^5b^3c.$$

A segunda questão, isto é, a determinação da fórmula que dá o numero de termos do desenvolvimento é facilmente resolvida recorrendo-se ao problema arithmetico das *repartições*.

Com effeito, suppondo que os expoentes n, p, q, r, etc. são em numero n' é claro que a equação

$$n+p+q+r+\ldots. = m,$$

a que têm de satisfazer os differentes valores inteiros e positivos que devem ser substituidos na expressão do termo geral, traduz a repartição de m em n' partes, correspondentes aos valores dos n' expoentes n, p, q, r... etc., que a satisfazem : E como a cada systema de valores destes expoentes corresponde um termo do desenvolvimento

$$(a+b+c+\ldots)^m,$$

uma vez que elles satisfaçam á equação de condição, a questão da determinação do numero de termos, reduz-se a empregar a fórmula que dá o numero de repartições de m em n' partes, que é como sabemos :

$${}^mR_{n'} = \frac{(m+1)\,(m+2)\ldots.\,(m+n'-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots.\,(n'-1)}$$

Esta fórmula dá o numero de termos do desenvolvimento

$$(a+b+c+\ldots)^m,$$

desde que se substitua m pelo expoente da potencia e n pelo numero de termos do polynomio.

Querendo por exemplo, o numero de termos dos desenvolvimentos de

$$(a+b)^m,\ (a+b+c)^m,\ (a+b+c+d)^m,$$

etc, fazemos n' successivamente igual a 2, 3, 4 etc., o que nos dará as expressões

$$^{m}R_2 = m + 1,\ ^{m}R_3 = \frac{(m+1)\ (m+2)}{1.\ 2},\ ^{m}R_4 = \frac{(m+1)\ (m+2)\ (m+3)}{1.\ 2.\ 3},$$

e etc.

Particularizando nestas fórmulas o expoente m, teremos o numero de termos do quadrado, cubo, da quarta potencia, etc., de um binomio, de um trinomio, de um quatrinomio e etc.

No exemplo acima,

$$(a + b + c)^{10},$$

o numero de termos seria dado pela expressão seguinte :

$$^{10}R_3 = \frac{(10+1)\ (10+2)}{1.\ 2} = \frac{11 \times 12}{2} = 66.$$

Apreciada a lei segundo a qual se desenvolvem as differentes potencias das expressões algebricas, devemos considerar a extracção das raizes, transformação inversa á que deixamos estudada, e que tem por fim, dado o desenvolvimento de uma potencia qualquer, determinar aquella que a originou.

Antes porém de tratar desta questão relativamente ás expressões algebricas, convém mostrar o quanto o theorema de Newton é eminentemente proprio a generalisar a extracção das raizes dos numeros determinados, apenas apreciada no calculo dos valores para o caso verdadeiramente usual das raizes quadradas.

155 — Notemos para isso que, *no caso negativo ou fraccionario do expoente da potencia, a lei de Newton tem ainda inteira applicação.*

Com effeito, fazendo a substituição de m por $(-m)$ na fórmula (3), virá :

$$(x+a)^{-m} = x^{-m} - max^{-m-1} + \frac{-m(-m-1)}{1.\ 2}a^2x^{-m-2} -$$

$$- \frac{-m(-m-1)(-m-2)}{1.\ 2}a^3x^{-m-3} + \text{etc.} \qquad (7)$$

que dá o desenvolvimento das potencias negativas de um binomio qualquer, por meio de uma *serie illimitada.*

Fazendo na mesma fórmula (3) a substituição de m por $\frac{m}{n}$ teremos tambem :

$$(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a\, x^{\frac{m}{n}-1} + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ 2}\, a^2 x^{\frac{m}{n}-2} +$$

$$+ \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\ 2.\ 3}\, a^3 x^{\frac{m}{n}-3} + \ldots \quad (8),$$

que dá o desenvolvimento illimitado da potencia fraccionaria de um binomio qualquer.

Vamos terminar este estudo da lei binominal applicando-a aos exemplos seguintes :

$$1^{\circ}.\ \left(3ac^{\frac{1}{2}} + 2bd^{\frac{3}{2}}\right)^5 = \left(3ac^{\frac{1}{2}}\right)^5 + 5\left(2bd^{\frac{3}{2}}\right)\left(3ac^{\frac{1}{2}}\right)^4 +$$

$$+ 10\left(2bd^{\frac{3}{2}}\right)^2 \left(3ac^{\frac{1}{2}}\right)^3 + 10\left(2bd^{\frac{3}{2}}\right)^3 \left(3ac^{\frac{1}{2}}\right)^2 +$$

$$+ 5\left(2bd^{\frac{3}{2}}\right)^4 \times \left(3ac^{\frac{1}{2}}\right) + \left(2bd^{\frac{3}{2}}\right)^5 = 243a^5c^{\frac{5}{2}} + 810a^4bc^2d^{\frac{3}{2}} +$$

$$+ 1080a^3b^2c^{\frac{3}{2}}\, a^3 + 720a^2b^3cd^{\frac{9}{2}} + 240ab^4c^{\frac{1}{2}}\, d^6 +$$

$$+ 32b^5d^{\frac{15}{2}}.$$

Neste exemplo fizemos applicação da fórmula (3).
No seguinte fazemos uso da formula (5).

$$2^{\circ}.\ (3ac - 2bd)^4 = (3ac)^4 - 4(2bd)(3ac)^3 + 6(2bd)^2(3ac)^2 -$$

$$- 4(2bd)^3(3ac) + (3bd)^4 = 81a^4c^4 - 216a^3bc^3d + 216a^2b^2c^2d^2 -$$

$$- 96a^3b^3cd^3 + 16b^4d^4.$$

No exemplo seguinte empregamos a fórmula (7).

$$3^{\circ}.\ (a+x)^{-1} = a^{-1} - xa^{-2} + x^2a^{-3} - x^3a^{-4} \text{ etc} = \frac{1}{a} -$$

$$- \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^5}{a^6} + \ldots \text{ etc.}$$

Vamos agora empregar a fórmula (8).

$$4^{o}.\ \left(y+a\right)^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\,ay^{\frac{2}{3}-1} + \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{1.\ 2} \times$$

$$\times\, a^{2}y^{\frac{2}{3}-2} + \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)}{1.\ 2.\ 3}\,a^{3}y^{\frac{2}{3}-3} + \text{etc.}$$

Si o expoente for negativo, o desenvolvimento será o seguinte :

$$5^{o}.\ \left(y+a\right)^{-\frac{2}{3}} = y^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}\,ay^{-\frac{5}{3}} + \frac{5}{9}\,a^{2}y^{-\frac{8}{3}} -$$

$$-\frac{40}{81}\,a^{3}y^{-\frac{11}{3}} + \text{etc.}$$

Comparando os dois primeiros exemplos com os tres ultimos, observa-se que estes dão um desenvolvimento illimitado, ao passo que aquelles contem um numero determinado de termos.

Semelhante circumstancia resulta de havermos empregado um expoente inteiro e positivo nos primeiros, e um expoente negativo ou fraccionario nos ultimos.

Em todo caso vê-se que a lei de Newton tem plena applicação, seja qual for o expoente empregado.

Mais, bem inspirados que os mathematicos do seculo XVIII, os do seculo XVII já lhe haviam expontaneamente dado uma tal extensão, á medida que o aperfeiçoamento das formações algebricas instituia novas classes de expoentes.

Foi essa generalisação que permittiu applicar a mesma lei á extracção das raizes numericas de um indice qualquer conforme mostraremos no paragrapho seguinte.

§ 23

Applicação da lei binominal á extracção das raizes numericas de um indice qualquer

156 — Facilmente se chega á instituição da regra para extrahir a raiz qualquer de um numero, apreciando o desenvolvimento resultante da potencia correspondente e fixando as transformações numericas a effectuar para passar da potencia considerada ao numero primitivo ou raiz que a produziu. Para isto cumpre considerar dois casos, conforme se quer extrahir a raiz n de um numero de n algarismos, ou de mais n.

157 — RAIZ N DE UM NUMERO DE N ALGARISMOS — Este caso não offerece difficuldade porque a raiz n de um numero que não tem mais de n algarismos é um dos nove primeiros numeros da escala numerica, ou acha-se comprehendido entre dois dentre elles.

Com effeito, formando com auxilio da formula do binomio as differentes potencias dos nove primeiros numeros, nota-se:

1.° Que o quadrado de um numero de um só algarismo não pode ter mais de dois, donde por conseguinte a raiz quadrada de um numero de dois algarismos não pode ter mais de um, porque 100 que é o menor numero de tres algarismos é o quadrado de 10 que tem dois;

2.° Que o cubo de um numero de um só algarismo não pode ter mais de tres, porque 1000, que é o menor numero de quatro algarismos, já é o cubo de 10, que contém dois, donde por conseguinte a raiz cubica de um numero que não tem mais de tres algarismos não pode ter mais de um;

3.° Que a quarta potencia de um numero de um só algarismo não pode ter mais de quatro, porque 10.000 que é o menor numero de cinco algarismos já é a quarta potencia de 10 que só tem dois, de modo que a raiz quarta

de um numero que não tem mais de quatro algarismos não pode ter mais de um.

Emfim, vê-se que em geral a potencia n de um numero inteiro de um só algarismo não póde ter mais de n algarismos, porque 10^n que é o menor dos numeros de $n + 1$ algarismos, já é a potencia n de 10 que só têm dois.

Concluimos, portanto, que a raiz n de um numero que não tem mais de n algarismos será um dos nove primeiros numeros inteiros ou cahirá entre dois destes numeros, de modo que para obtel-a bastará tomar o menor ou o maior dos dois numeros simples cujas n^{as}. potencias comprehendem o numero dado.

Note-se que é mesmo facil assignalar os dois numeros de algarismos entre os quaes se póde achar comprehendida a potencia m de um numero composto de n algarismos.

Com effeito, este numero está necessariamente comprehendido entre aquelle que é formado da unidade seguida de n zeros e o que é formado da unidade seguida de $n - 1$ zeros. Ora, a potencia m de 1 seguido de n zeros tem $mn + 1$ algarismos e a potencia m de 1 seguido de $n - 1$ zeros tem $(n - 1)\, m + 1$ algarismos.

Portanto a potencia m de um numero de n algarismos pode ter, desde $mn - m + 1$ até $mn + 1$ algarismos.

Assim, por exemplo, a potencia setima de um numero de seis algarismos pode ter desde 36 até 42 algarismos.

158 — Admittamos agora que o numero dado, que representaremos por N tem mais de n algarismos.

Em vista do que acima dissemos, pode-se affirmar que a raiz procurada tem mais de um algarismo.

Mas, para obtel-a facilmente, consideremos a principio o que se passa em geral quando a raiz procurada é um numero de dois algarismos, isto é, composto de dezenas e unidades.

Representando por a as dezenas e b as unidades, será $N = (a + b)^n$.

Applicando a lei binominal, virá:

$$N = (a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + n\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots. \text{ etc. (1)}$$

Este desenvolvimento nos mostra que o numero dado contém a potencia n das dezenas, isto é, a^n, mais n vezes o producto da potencia $n - 1$ das dezenas pelas unidades, e mais uma serie de outras partes que é inutil enumerar.

Isso posto, a potencia n das dezenas não podendo dar unidades de uma ordem inferior a unidade seguida de n zeros, devemos procurar a raiz a das dezenas, não nos n ultimos algarismos do numero dado, mas sim naquelles que ficarem á esquerda, depois de havermos separado os n da direita.

Extrahindo, portanto, a raiz da maior n^a potencia contida nesta parte á esquerda, teremos as dezenas da raiz *procurada*.

Como a expressão (1) póde ser posta sob a forma

$$N - a^n = na^{n-1}b + \text{etc.}, \qquad (2)$$

concluimos que subtrahindo a n^a potencia das dezenas da raiz (a^n) do numero dado, obteremos um resto que conterá o producto de n vezes a potencia $n - 1$ das dezenas pelas unidades da raiz, e mais uma serie de outros productos.

Este primeiro producto nos dará as unidades da raiz.

Com effeito, si ao lado do resto correspondente aos primeiros algarismos separados, escrevermos o algarismo seguinte e dividirmos o numero resultante por n vezes a potencia $n - 1$ das dezenas obtidas, teremos um

quociente que evidentemente exprimirá as unidades da raiz ou um numero maior.

Para experimentar esse numero, escrevel-o-emos á direita do que representa as dezenas da raiz, elevaremos o numero resultante á potencia n e o subtrahiremos do numero dado. Si o subtrahendo for menor que o minuendo, o segundo algarismo achado exprimirá as unidades da raíz; mas si for maior, será um numero muito grande e então será preciso que diminuamos de uma ou de muitas unidades o numero correspondente.

159 — No intuito de melhor comprehender as considerações precedentes, vamos particularisal-as para os casos em que se trata das raizes quadradas, cubicas, quartas, e etc., de dois algarismos.

I. Seja em primeiro lugar o caso mais usual da raiz quadrada.

Sabemos a principio que o quadrado de um numero de dois algarismos não póde ter menos de tres nem mais de quatro.

Sejá pois dado um numero de tres ou de quatro algarismos, *3844* por exemplo.

Representando por a as dezenas e por b as unidades da raiz procurada, teremos neste caso que

$$3844 = (a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2.$$

Observe-se a principio que o quadrado das dezenas, dando pelo menos centenas, não pode fazer parte dos dois ultimos algarismos *44*; devemos portanto separal-os, ficando certo de que é em *38* que se acha contido o quadrado das dezenas; e, como o maior quadrado contido em *38* é *36* cuja raiz é *6*, devemos concluir que *6* representa as dezenas da raiz procurada, isto é, que $a = 6$.

Quadrando *6*, teremos $a^2 = 36$; subtrahindo *36* de *38*, resta-nos *2*. Escrevendo em seguida de *2* os dois alga-

rismos separados, *44*, teremos o numero *244* que na fórmula acima corresponde a $2ab + b^2$, por isso que da somma

$$a^2 + 2\,ab + b^2$$

temos já subtrahido a parcella a^2.

Só nos resta, portanto, achar as unidades da raiz.

Para isso basta observar que si dividirmos $2\,ab$ por $2\,a$, teremos b.

Portanto, si dividirmos *244* por *120*, dobro das seis dezenas ou *60* unidades achadas, o quociente *2* será as unidades procuradas.

Então, ajuntando os dois termos

$$2\,ab = 2 \times 60 \times 2 \text{ e } b^2 = 2^2,$$

teremos para somma *244*; subtrahindo esta somma do resto obtido, *244*, o resultado será nullo, o que mostra ser exactamente *62* a raiz quadrada de *3844*.

A marcha que acabamos de seguir é susceptivel de duas abreviações:

1ª, porque *2ab* e *2a* dando dezenas, póde-se fazer nos dois productos abstracção do ultimo algarismo; e portanto, em lugar de dividir *244* por *120*, bastará dividir *24* por *12*;

2ª, porque $2ab + b^2$ sendo igual a $(2\,a + b)\,b$, vê-se que para ter de uma só vez os dois productos, bastará escrever as unidades ao lado do dobro das dezenas e multiplicar tudo pelas unidades.

Assim, ao lado de *12*, dobro das dezenas *6*, escreveremos as unidades *2*, e multiplicando tudo por *2*, acharemos *244*.

II. Supponhamos agora que se trata de extrahir a raiz cubica.

Suppondo que esta raiz é de dois algarismos, devemos tomar um numero de *4* a *6* algarismos, porque o cubo de

um numero de dois algarismos não pode ter nem menos de quatro algarismos nem mais de seis.

Isso posto, seja *571.787* o numero dado.

Representando por *a* as dezenas e por *b* as unidades da raiz procurada, teremos neste caso:

$$571.787 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Notando logo que o cubo das dezenas ou a^3 dando pelo menos milhares, não pode fazer parte dos tres ultimos algarismos *787*, procuraremos somente para ter as dezenas *a*, a raiz cubica de *571*, que é *8*.

Subtrahimos então *512* de *571*, sendo o resultado *59*.

Escrevendo em seguida a este resto os tres algarismos separados *787*, teremos *59.787* para representar

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Vê-se então que, dividindo o primeiro termo

$$3a^2b \text{ por } 3a^2,$$

ou pelo triplo do quadrado das dezenas conhecidas, se achará *b*, ou as unidades.

Ora, sendo

$$3a^2 = 3 \times 80^2 = 19200,$$

é claro que si dividirmos *59.787* por *19.200*, ou simplesmente *597* por *192* (por isso que a^2 representa centenas), teremos um quociente *3*, que dar-nos-á as unidades procuradas.

Para ver se o numero *3* não é muito grande, formaremos as tres partes

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

para as subtrahir de *59.787*.

Mas para formar estes productos com facilidade, basta notar que

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = b(3a^2 + 3ab + b^2) =$$
$$= b[(1a + b)(2a + b) + b^2]$$

isto é:

1°, que basta ajuntar as unidades successivamente com as dezenas e com o dobro das dezenas;

2°, que se deve multiplicar as duas sommas;

3°, que a este producto deve-se ajuntar o quadrado das dezenas;

4°, emfim que se deve multiplicar tudo pelas unidades.

Seguindo esta marcha, teremos

$$3(83 \times 163 + 6400) = 59.787;$$

o que é mais rapido do que fazer as operações indicadas por

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

III. Supponhamos agora que se trata de extrahir a raiz quarta de um numero.

Suppondo que esta raiz tenha dois algarismos sómente, a potencia quarta proposta não pode ter nem menos de cinco algarismos nem mais de oito.

Seja, pois, *8.503.056* o numero dado.

Representando por *a* as dezenas e por *b* as unidades da raiz procurada, teremos:

$$8.503.056 = (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Nota-se a principio que a^4, dando pelo menos dezenas de milhares, não pode ser contida nos quatro ultimos algarismos *3.056*; nós os separamos pois e procuramos qual a raiz quarta de *850*, que, de antemão sabemos ser um numero simples.

E' facil de vêr que este numero é *5* para *625*, restando portanto *225*. Escrevendo á direita deste resto os quatro algarismos separados *3.056* teremos *2.253.056* para representar

$$4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

cuja primeira parte $4a^3b$ vai nos fornecer as unidades, por isso que dividindo $4a^3b$ por $4a^3$, o quociente é b.

Mas, como a^3 commum ao dividendo e ao divisor, dá pelo menos milhares, separemos nestes dois numeros os tres ultimos algarismos, e em lugar de dividir

$$2.253.056 \text{ por } 4a^3 = 500.000,$$

dividiremos sómente *2.253* por *500*; o que dará *4* para as unidades procuradas.

Então, conhecendo as dezenas e as unidades, formaremos as quatro partes

$$4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ou

$$b\,(4a^3 + 6a^2b + 4ab^2 + b^3),$$

tomando a somma destes quatro productos, que são:

$$4 \times 125.000 + 6 \times 2500 \times 4 + 4 \times 50 \times 16 + 64.$$

ou

$$500.000 + 60.000 + 3.200 + 64 = 563.264,$$

que multiplicaremos por $b = 4$.

Como o producto *2.253.056*, sendo subtrahido de *2.253.056* deixa zero para resto, concluimos que o numero proposto *8.503.056* é a quarta potencia exacta de *54*.

Raciocinando e operando de uma maneira analoga para as potencias seguintes, se verá que, em geral, para extrahir-se a raiz n de dois algarismos de um numero, que neste caso não pode ter mais de $2n$ algarismos, nem

menos de $n + 1$, pode-se dar a seguinte regra: separa-se neste numero os n algarismos da direita (porque a^n deve ter n zeros á sua direita); procura-se em seguida a raiz n da parte restante á esquerda, (raiz que não pode ter sinão um algarismo); eleva-se em seguida o numero obtido á potencia n, e subtrahe-se da parte utilisada.

Escreve-se á direita do resto obtido os algarismos separados e se o divide por n vezes a potencia $n - 1$ das dezenas já achadas, divisão que se simplificará separando $n - 1$ algarismos á direita dos dois termos.

O quociente obtido representará as unidades da raiz.

Escreve-se o algarismo que a representa á direita das dezenas obtidas.

Eleva-se o numero resultante á potencia n e subtrahe-se do numero proposto.

Si o resultado for nullo este será uma potencia perfeita da ordem n.

Para melhor sentir a analogia existente nas extracções successivas das raizes quadradas, cubicas, quartas e quintas de dois algarismos, vamos figurar as operações que acabamos de fazer.

(1ª) $\sqrt{3844}$; $a^2 = 38.44$ | 62 ; 36 | $120 = 2a$; 24.4

$b(2a + b) = 24.4$; 0 ; $122 = 2a + b$; $2 = b$

$(3844 = a^2 + 2ab + b^2)$

(2ª) $\sqrt[3]{571787}$; $a^3 = 571.787$ | 83 ; 512 | $19200 = 3a^2$; 59.787 | $163 = 2a + b$; 59.787 | $83 = a + b$; 00.000 | 489 ; 1304 ; $13529 = (2a + b)(a + b)$; $6400 = a^2$; $19929 = (2a + b)(a + b) + a^2$; $3 = b$; $59787 = b[(2a + b)(a + b) + a^2]$

$(571788 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$

(3ª) $\sqrt[4]{850.3056}$ $a^4 = 625$ | $8.503.056 \mid 54$ | $500.000 = 4a^3$

$4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ | $2.225.056$ | $2.225.056$ | $0.000.000$

$500.000 = 4a^3$

$60.000 = 6a^2b$

$3.200 = 4ab^2$

$64 = b^3$

$563.264 = 4a^3 + 6a^2b + 4ab^2 + b^3$

$4 = b$

$2.253.056 = b(4a^3 + 6a^2b + 4ab^2 + b^3)$

$(8.50.30.56 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)$

(4ª) $\sqrt[5]{60.466.176}$ $a^5 = 243$ | $604.66176 \mid 36$ | $4050000 = 5a^4$

$5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ | 36.166176 | 00.000000

$4.050.000 = 5a^4$

$1.620.000 = 10a^3b$

$324.000 = 10a^2b^2$

$32.400 = 5ab^3$

$1.296 = b^4$

$6.027.696 = 5a^4 + 10a^3b + 10a^2b^2 + 5ab^3 + b^4$

$6 = b$

$36.166.116 = b(5a^4 + 10a^3b + 10a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)$

$(60.466176 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5)$

Vimos que era possivel escrever-se para as unidades da raiz um quociente mais forte do que o conveniente, mas que esse defeito se tornava patente logo que elevando a raiz obtida á potencia considerada, se encontrasse um resultado maior que o numero proposto.

Póde tambem acontecer que as unidades da raiz sejam expressas por um numero menor que o conveniente.

Mas este erro pode reconhecer-se facilmente.

E' assim por exemplo que extrahindo a raiz quadrada si obtivesse um resto maior que o dobro da raiz achada, isso nos adverteria de que ella é muito fraca.

Com effeito, o quadrado de d é d^2, e o de

$$d + 1 \text{ é } d^2 + 2d + 1$$

que excede

$$d^2 \text{ de } 2d + 1.$$

Por exemplo, o quadrado de *13* é *169*; si depois de ter achado para raiz *12*, operarmos como ficou dito, se terá para resto

$$25 = 2 \times 12 + 1.$$

Quanto aos cubos, como os de dois numeros consecutivos

$$d \text{ e } d + 1$$

são

$$d^3 \text{ e } d^3 + 3\,d^2 + 3\,d + 1,$$

cuja defferença é

$$3\,d^2 + 3\,d + 1,$$

vê-se que si se obtivesse um resto, no fim da operação, igual ao triplo do quadrado da raiz, mais o triplo desta raiz mais um, isso seria uma prova de que se tinha achado para as unidades da raiz um numero menor de *1*.

Raciocinar-se-ia do mesmo modo para as raizes mais elevadas.

160 — Consideramos agora o caso em que a raiz deve ter mais de dois algarismos.

Supponhamos a principio que esta raiz qualquer deve ter tres algarismos.

E' claro que se póde considerar os dois primeiros á esquerda, como exprimindo o numero de dezenas, e o ultimo a direita o numero de unidades.

Em virtude da regra estabelecida, será preciso separar a principio n algarismos da direita sobre a potencia pro-

posta, ficando a questão reduzida a procurar a raiz *n* dos algarismos restantes a esquerda.

Mas, esta raiz tendo dois algarismos, vê-se pelo methodo geral, dado para as raizes de dois algarismos, que é preciso ainda separar ahi *n* algarismos sobre a direita, e procurar a raiz *n* dos algarismos restantes a esquerda; subtrahir em seguida a potencia *n* desta raiz achada e ao lado do resto abaixar os *n* algarismos seguintes separando os *n — 1* algarismos sobre a direita, dividir os algarismos restantes á esquerda, pelo potencia *n — 1* da raiz achada, multiplicada por *n*, escrever o quociente á direita do algarismo já achado para raiz.

Olhando estes dois algarismos da raiz como formando um só numero de dezenas, não restará mais, para achar o terceiro algarismo, do que proceder como fizemos para achar o segundo.

Raciocinando para quatro algarismos, para cinco, etc, como se acaba de fazer para tres, vêr-se-á que em geral *para se achar a raiz* n *de um numero, composto de tantos algarismos quanto se quizer, será preciso dividir este numero em classes de* n *algarismos a partir da direita; extrahir a raiz* n *da ultima classe á esquerda, que será o primeiro algarismo da raiz procurada, elevar este algarismo á potencia* n *e subtrahir da classe considerada; baixar e escrever á direita do resto a classe seguinte, separando os* n — 1 *algarismos da direita; dividir os algarismos restantes á esquerda por* n *vezes a potencia* n — 1 *da raiz achada; o quociente obtido será o segundo algarismo da raiz; elevar os dois algarismos obtidos á potencia* n *e subtrahir das classes consideradas; baixar e escrever á direita do resto a classe seguinte, separando os* n — 1 *algarismos da direita; dividir a parte restante á esquerda por* n *vezes a potencia* n — 1 *da raiz achada, o que dará para quociente o terceiro algarismo da raiz e assim por diante.*

Acabamos de ver que cada vez que se tiver achado um algarismo da raiz, será preciso elevar toda a raiz já obtida á potencia n e subtrahir das classes consideradas.

Entretanto, nos exemplos dados, para raizes de dois algarismos, prescrevemos subtrahir, sómente do resto, seguido da ultima classe a direita, os productos de

$$2a + b \text{ por } b, \text{ de } (a + b)(2a + b) + a^2 \text{ por } b \text{ e } etc.$$

Este ultimo methodo é com effeito, preferivel para o segundo e terceiro graus por ser mais expedido. Mas, para grau superior, é preferivel seguir o methodo geral.

161 — INCONVENIENTES DESTA MARCHA DIRECTA; APPLICAÇÕES. — Como acabamos de vêr, a extracção de uma raiz qualquer de um numero reduz-se sempre ao caso fundamental em que a raiz só tem um algarismo, e a uma serie de divisões.

Uma simples apreciação do conjuncto das operações uniformes que constituem o processo de extracção de raiz basta para nos fazer ver immediatamente o augmento crescente de trabalho quando cresce o indice da raiz, ou o numero de algarismos do numero dado, ou os dois conjunctamente.

Este accrescimo de difficuldades para as divisões, como já nos deixa ver a raiz cubica, torna-se muito maior quando se passa ás raizes superiores.

Tal inconveniente foi completamente afastado com a instituição dos logarithmos, que veio simplicar consideravelmente os calculos numericos. Delia nos occuparemos mais adiante.

Vamos fazer algumas applicações afim de melhor sentir a neccessidade de semelhante simplificação.

1ª. Seja proposto extrahir a raiz quadrada de *69.288.976*.

Teremos:

69.28.89.76	*8324*
64	*163 × 3 = 489*
52.8	*1662 × 2 = 3324*
48 9	*16644 × 4 = 66576*
398.9	
332 4	
6657.6	
6657 6	
0	

A raiz procurada é o numero *8.324*.

2ª. Seja proposto extrahir a raiz cabica do numero *520.300.455.507*.

Teremos:

520.300.455.507	*8.043*	*1604*	*16083*
512	*19.2*	*804*	*8043*
83.004.55	*19 200*	*6416*	*48249*
7718 464	*1.939.248*	*12832*	*64332*
581 9915.07		*1289616*	*128664*
581 9915 07		*640000*	*129355569*
000 0000 00		*1929616*	*64641600*
		4	*193997169*
		7718464	*3*
			581991507

3ª. Seja ainda proposto extrahir a raiz quarta de *778.973.067.987.921*.

Aqui pode-se ou seguir a marcha geral, ou decompor a operação em duas, extrahindo a principio a raiz quadrada e em seguida a raiz quadrada desta raiz.

Universidade ... Departamento de Matemática

Teremos segundo as duas marchas.

1ª)	778.9730.6798.7921	5.283		7.78.97.30.67.98.79.21		27.910.089
	6.25	500		378		47
	1539.730	562432		499.7		549
	7311 616	588791808		563.0		5581
	4781146.798			496.79.879		5582008
	77720518656			502381522.1		55820169
	1767881427.921			0		
	718973067987921					
	0			27.91.00.895.283		
				29.1	102	
				870.0	1048	
				3168.9	10563	
				0		

4ª. Seja *11.167.913.618.807* para extrahir a raiz quinta. Achar-se-á *407* exactamente.

5ª. Seja emfim *94.931.877.133* para extrahir a raiz setima. Achar-se-á *37* exactamente.

162 — APPLICAÇÃO DA LEI BINOMINAL PARA OBTER AS RAIZES COM APPROXIMAÇÃO — Quando a quantidade proposta não tem raiz exacta e além disso se quer obter sua raiz com um grande grau de precisão, póde-se directamente utilisar a fórmula do binomio, fazendo uso dos expoentes fraccionarios.

Supponhamos por exemplo que se quer extrahir a raiz m de N.

Decomporemos N em duas partes taes que a primeira a^m seja uma potencia m^a exacta de a e a maior possivel relativamente á segunda parte b, que por esta razão poderá ser algumas vezes negativa; de modo que se tenha sempre $a^m > b$.

Obtem-se:

$$\sqrt[m]{N} = \sqrt[m]{a^m + b} = \sqrt[m]{a^m \left(1 + \frac{b}{a^m}\right)},$$

ou

$$\sqrt[m]{N} = a\,(1+x)^{\frac{1}{m}}$$

fazendo

$$x = \frac{b}{a^m}.$$

Desenvolvendo pela fórmula do binomio virá

$$\sqrt[m]{N} = a\,(1+x)^{\frac{1}{m}} = a\left[1 + \frac{1}{m}\,x + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)}{1.2}x^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)}{1.2.3}x^3 + \ldots.\right]$$

ou

$$\sqrt[m]{N} = a\,(1+x)^{\frac{1}{m}} = a\left[1 + \frac{x}{m} + \frac{1-m}{2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(1-m)\,(1-2m)}{1.2.3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$

ou

$$\sqrt[m]{N} = a\,(1+x)^{\frac{1}{m}} = a\left[1 + \frac{x}{m} - \frac{(m-1)}{1.2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{(m-1)\,(2m-1)}{1.2.3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 - \frac{(m-1)\,(2m-1)\,(3m-1)}{1.2.3.4} \times$$

$$\left. \times \left(\frac{x}{m}\right)^4 + (k)\ \text{etc.}\right.$$

Comprehende-se que será preciso formar uma infinidade de termos para que a forma precedente, que é uma serie infinita, exprima quasi exactamente a raiz procurada.

Entretanto, é certo que contentando-nos com um grande numero desses termos, teremos na sua somma um valor bastante approximado da raiz procurada.

Si, feitas as substituições, perceber-se que os termos da serie decrescem rapidamente, um pequeno numero de termos bastará para dar uma approximação sufficiente, porque mostraremos que a differença entre a somma de todos os termos da serie e a somma dos termos considerados é menor que o termo seguinte. (23ª)

Deve-se portanto, tomar um numero de termos tal que á inspecção do que se segue ao ultimo, se reconheça estar elle abaixo da unidade de ordem decimal que determina a approximação. E' facil reconhecer que este methodo é sobretudo vantajoso quando r é uma fracção muito pequena, porque então os termos da serie diminuirão mui rapidamente e com um pequeno numero de termos tem-se a approximação desejada.

Como applicação, supponhamos se trata de extrahir a raiz cubica de *31*.

O maior cubo contido em *31*, sendo *27*, faremos na fórmula acima

$$a^m = 27,\ b = 4, \text{ donde } x = \frac{4}{27},\ m = 3 \text{ e } a = 3.$$

(23ª) Seja $a - b + c - d + e - f +$ etc, uma serie indefinida de termos na qual se suppõe que $a, b, c \ldots e$ são quantidades decrescentes.

E' facil mostrar que o valor numerico de s, sendo s a somma de todos os termos da serie, está comprehendido entre duas sommas consecutivas quaesquer de seus termos.

Com effeito, tomemos ao acaso duas sommas consecutivas:

$$a - b + c - d + e - f \text{ e } a - b + c - d + e - f + g;$$

Consideremos a primeira e observemos que os termos que seguem $- f$ são: $+ g - h + k - l + \ldots$.

Ora, sendo a serie decrescente, as differenças $g - h$, $k - l \ldots$ são positivas; donde se segue que para obter o valor completo da somma s, será preciso ajuntar á somma $a - b + c - d + e - f$, um certo numero positivo.

Assim, pois, será: $a - b + c - d + e - f < s$.

Quanto á segunda, os termos que seguem $+ g$ são: $- h + k - l + m \ldots$; ora as differenças $- h + k - l + m \ldots$ são nega-

Teremos: (*k*)

$$\sqrt[3]{31} = 3\left(1+\frac{4}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = 3\left[1+\frac{4}{3\times 27} - \frac{(3-1)}{1.2}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{4}{3\times 27}\right)^2 + \frac{(3-1)(2\times 3-1)}{1.2.3}\left(\frac{4}{3\times 27}\right)^3 -$$

$$\left. - \frac{(3-1)(2\times 3-1)(3\times 3-1)}{1.2.3.4}\left(\frac{4}{3\times 27}\right)^4 + etc.\right]$$

ou

$$\sqrt[3]{31} = 3\left(1+\frac{4}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = 3 + \frac{4}{27} - \frac{16}{2.187} + \frac{320}{531.441} -$$

$$- \frac{2560}{43.046.721} + \text{etc}$$

Considerando estes cinco primeiros termos, e reduzindo a decimaes, obteremos a principio para os termos additivos:

$$\left.\begin{array}{l} 3 = 3{,}00000 \\ \frac{4}{27} = 0{,}14815 \\ \frac{320}{531441} = 0{,}0006 \end{array}\right| = 3{,}14875;$$

e para os termos subtractivos:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{16}{2.187} = -0{,}00731 \\ -\frac{2.560}{43046721} = -0{,}00006 \end{array}\right| = -0{,}00737$$

---

tivas; donde se vê que para ter o verdadeiro valor de x será preciso ajuntar a somma $a - b + c - d + e - f + g$ uma quantidade negativa, isto é, diminuir esta somma.

Tem-se pois: $a - b + c - d + e - f + g > s$.

Portanto s está comprehendido entre as duas sommas; e como o valor numerico da differença entre estas duas sommas é evidente g, concluimos que *o erro commettido* quando se toma um certo numero de termos $a - b + c - d + e - f$, para valor da somma s, é numericamente menor que o termo que segue immediatamente áquelle em que se opera.

portanto,

$$\sqrt[2]{31} = 3,14138$$

a menos de

$$0,00001.$$

Suponhamos ainda que se deseja a raiz cubica de *56*. Sendo *27* o maior cubo contido em *56*, teremos

$$a^m = 27,\ b = 29;$$

como porém a^m deve ser maior que *b*, para que os termos da serie diminuam ao envez de augmentar, decomporemos

$$56 \text{ em } 64 - 8 \text{ ou } 4^3 - 8,$$

e faremos :

$$m = 3,\ a^3 = 4^3,\ b = 8,$$

donde

$$a = 4 \text{ e } x = \frac{-8}{64} = -\frac{1}{8}.$$

Teremos então fazendo as substituições na fórmula (*k*):

$$\sqrt[3]{56} = 4\left[1 - \frac{1}{3\times 8} - \frac{(3-1)}{1.2}\left(\frac{1}{3\times 8}\right)^2 - \right.$$

$$- \frac{(3-1)(2\times 3-1)}{1.2.3}\left(\frac{1}{3\times 8}\right)^3 - \frac{(3-1)(2\times 3-1)}{1.2.3.4} \times$$

$$\left. \times \frac{(3\times 3-1)}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{3\times 8}\right)^4 - \text{etc.}\right]$$

Neste caso, em que os termos da serie são negativos, e decrescentes, convém tomar um numero de termos bastante grande afim de que se esteja bem certo de que o conjuncto dos termos desprezados não influe sobre a ordem decimal a que se quer levar a approximação.

Para exercicio vamos dar os seguintes exemplos :

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64+1} = 4,02073 \quad \text{a menos de } 0,00001;$$

$$\sqrt[4]{260} = \sqrt[4]{256+4} = 4,01553 \quad » \quad » \quad » \; 0,00001;$$

$$\sqrt[5]{39} = \sqrt[5]{32+7} = 2,0807 \quad » \quad » \quad » \; 0,0001;$$

$$\sqrt[7]{108} = \sqrt[7]{128-20} = 1,95204 \quad » \quad » \quad » \; 0,00001.$$

.....

E' excusado dizer que não trataremos aqui do pretendido *calculo dos radicaes*, como fazem de ordinario nesta theoria a maior parte dos auctores modernos. Realmente não apresentam elles nenhuma noção nova, como é facil de mostrar tendo em vista a consideração dos *expoentes fraccionarios*. Com effeito, dizem elles :

1.° *Que para extrahir a raiz de uma quantidade basta dividir o expoente desta pelo indice do radical:*

Ora, esta noção não é nova porque a raiz de uma quantidade não é mais do que uma potencia fraccionaria cujo expoente é o desta quantidade dividido pelo indice do radical, isto é

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

2.° *Que para reduzir dois ou mais radicaes ao mesmo indice, basta tomar para indice dos mesmos radicaes o menor multiplo commum aos indices propostos e multiplicar os respectivos quocientes por cada um dos expoentes que affectam as quantidades submettidas aos radicaes*:

Ora, esta noção tambem não é nova porque substituindo os radicaes dados por potencias fraccionarias, a questão se reduz evidentemente a substituir as fracções

que formam os expoentes por outras isomeras, conforme a regra formulada pela arithmetica; isto é,

$$\sqrt[m]{a^{p}},\ \sqrt[n]{a^{m}},\ \sqrt[r]{a^{mn}}$$

são respectivamente o mesmo que

$$a^{\frac{p}{m}},\ a^{\frac{m}{n}},\ a^{\frac{mn}{r}},$$

de sorte que estas potencias não se alteram multiplicando ambos os termos de cado um dos expoentes por um mesmo numero para tornal-os isomeros, isto é

$$a^{\frac{pnr}{mnr}},\ a^{\frac{mmr}{nmr}},\ a^{\frac{mnmn}{rmn}}.$$

3.° *Que para sommar ou subtrahir radicaes semelhantes, basta tomar a somma ou differença dos coefficientes e multiplical-a pelo radical commum:*

Não ha tambem aqui noção nova, porque substituindo os radicaes por potencias fraccionarias, a questão não é mais do que uma *reducção de termos semelhantes;* por ex:

$$3a\sqrt{b} + 2\sqrt{a^2 b} = 3a\sqrt{b} + 2a\sqrt{b} = 3a\,b^{\frac{1}{2}} + 2ab^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 5a\ b^{\frac{1}{2}} = 5a\sqrt{b},$$

e tambem

$$3a\sqrt{b} - 2\sqrt{a^2 b} = 3ab^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{1}{2}} = 3ab^{\frac{1}{2}} - 2ab^{\frac{1}{2}} = ab^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{b}.$$

4.° *Que para multiplicar dois radicaes de um mesmo indice basta multiplicar as quantidades a elle submettidas:*

Substituindo os radicaes por potencias fraccionarias, já sabemos tambem que a questão se reduz neste caso á

multiplicação de dois monomios de expoentes fraccionarios segundo a regra ordinaria; por ex:

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = a^{\frac{1}{m}} \times b^{\frac{1}{m}} = (ab)^{\frac{1}{m}};$$

e

$$a\sqrt[n]{b^p} \times c\sqrt[n]{d^q} = acb^{\frac{p}{n}} d^{\frac{q}{n}} = ac\,(b^p\, d^q)^{\frac{1}{n}} = ac\sqrt[n]{b^p\, d^q}.$$

5.° *Que para dividir dois radicaes do mesmo indice, basta dividir as quantidades submettidas a elles:*

Substituindo os radicaes pelas potencias fraccionarias correspondentes, a questão se reduz a dividir duas potencias; por ex.:

$$\sqrt[m]{a^p} \div \sqrt[m]{b^q} = a^{\frac{p}{m}} \div b^{\frac{q}{m}} = \left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\frac{a^p}{b^q}}$$

6.° *Que para elevar um, radical a uma potencia, basta elevar á mesma potencia a quantidade a elle submettida:*

Substituindo o radical pela potencia fraccionaria correspondente, a questão se reduz a elevar uma potencia á outra, para o que basta, como vimos, multiplicar o expoente da primeira pelo da segunda; assim

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^p = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^p = a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p}.$$

7.° *Que para extrahir a raiz de um radical, basta extrahir a raiz da quantidade a elle submettida, o que equivale a extrahir della uma unica raiz cujo indice é o producto dos dois indices:*

Substituindo o radical por uma potencia fraccionaria, e traduzindo por outra a raiz a extrahir, a questão se reduz evidentemente a elevar uma potencia fraccionaria á outra, para o que basta multiplicar os respectivos expo-

entes um pelo outro; assim por exemplo: para obter, a raiz m de

$$\sqrt[n]{a},$$

faremos

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

Como se vê, não ha nenhuma noção verdadeiramente nova no pretendido calculo dos radicaes, o qual, como muitas outras questões modernamente tratadas em algebra, constituem pesquisas viciosas, inuteis e por conseguinte prejudiciaes.

§ 24

Extracção das raizes algebricas

163 — Havendo apreciado a lei binominal como consequencia da reacção que a algebra exerce sobre a arithmetica quando generalisa a lei das potencias, vamos considerar a applicação desta á determinação das raizes algebricas.

Já sabemos que, para elevar um monomio a uma potencia qualquer, eleva-se o coefficiente a esta potencia e se multiplica o expoente de cada letra que o compõe pelo expoente da potencia.

A generalisação dos expoentes, dando logar a que olhemos as raizes como potencias fraccionarias, comprehende-se que a extracção da raiz de um monomio qualquer se reduz sempre a formar uma potencia fraccionaria.

O denominador do expoente desta potencia é o grau da raiz a extrahir.

Vamos agora verificar que a lei de Newton reduz a este caso fundamental, por intermedio do caso binominal, a extracção das raizes dos polynomios, as quaes se sujei-

tam muito mais facilmente que as raizes numericas á competencia directa daquella lei.

164 O CASO DA EXTRACÇÃO DA RAIZ DE UM POLYNOMIO, QUANDO ELLA É BINOMIA. — Supponhamos que se quer extrahir a raiz m de um polynomio.

Admittindo que a raiz seja conhecida e da forma binomia $x + a$, é claro que o polynomio em questão será

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{1.\ 2}\,a^2x^{m-2} + \ldots.$$

Observando a constituição deste polynomio

$$x^m + max^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{1.\ 2}\,a^2x^{m-2} + \ldots.,$$

nota-se que o seu 1º termo é a potencia m do 1º termo da raiz $(x + a)$; que o termo seguinte é igual á m vezes a potencia $(m-1)$ do 1º termo x da raiz pelo 2º termo a.

165 NO CASO EM QUE A RAIZ DE UM POLYMONIO É TAMBEM UM POLYNOMIO: SUA DETERMINAÇÃO. — Supponhamos agora que a raiz, ao envez de ser um binomio, consta de tres, quatro, etc., termos.

Vimos que a sua elevação á potencia se reduz ao caso precedente por meio de contracções provisorias.

Si, por exemplo, se trata de um trinomio $(x + b + c)$, teremos:

$$(x+b+c)^m = x^m + mx^{m-1}(b+c) + \text{etc.} =$$

$$= x^m + mx^{m-1}b + \frac{m\,(m-1)}{1.\ 2}\,x^{m-2}b^2 + \ldots. +$$

$$+ mx^{m-1}c + \frac{m\,(m-1)}{1.\ 2}x^{m-2}c^2 + \ldots.$$

Em virtude desta reducção, nota-se ainda que o 1º termo do desenvolvimento é a potencia m do 1º termo da raiz; e que o termo seguinte $mx^{m-1}b$ é igual a m vezes a potencia $m-1$ do 1º termo x da raiz pelo segundo b.

Si a raiz contiver um maior numero de termos

$$x + b + c + d + e \ldots,$$

que suppomos ordenados em relação ás potencias de uma letra, é facil de ver raciocinando do mesmo modo, que a sua potencia m contém, além de outras partes,

$$x^m + mx^{m-1}b + \ldots + mx^{m-1}c + \ldots + mx^{m-1}d + \ldots$$

onde ainda se verifica que o 1º termo é a potencia m do 1º termo da raiz, e que o 2º termo $mx^{m-1}b$ é igual a m vezes a potencia $m-1$ do 1º termo x da raiz pelo segundo b.

Ora, si o 1º termo da potencia m de um polynomio, ordenado em relação ás potencias decrescentes de uma letra, é, como acabamos de ver, a potencia m do 1º termo de sua raiz, é claro que para ter o 1º termo desta bastará extrahir a raiz de gráo m daquelle 1º termo.

Do mesmo modo, si acabamos de ver que o 2º termo do desenvolvimento é igual a m vezes a potencia $m-1$ do 1º termo de sua raiz pelo segundo, é claro que, tendo subtrahido a potencia m do 1º termo da raiz, facilmente obteremos o segundo — dividindo o 1º termo do resto por m vezes a potencia $m-1$ do 1º termo da raiz.

Subtrahindo do desenvolvimento a potencia m da somma $(x + b)$ dos dois primeiros termos da raiz, é facil mostrar, como precedentemente, que o 1º termo do resto será $mx^{m-1}c$, isto é, é igual a m vezes a potencia $m-1$ do 1º termo da raiz pelo terceiro.

Dividindo este 1º termo do resto por mx^{m-1}, teremos, pois, o 3º termo da raiz; e assim por diante.

166 — REGRA A SEGUIR NA OPERAÇÃO — Dahi resulta o processo seguinte para extrahir a raiz m de um polynomio P.

Ordena-se o polynomio em relação ás potencias de uma letra; extrahe-se a raiz m *do seu 1º termo e obte-*

remos assim o 1º termo da raiz; subtrahe-se de P *a potencia* m *desse 1º termo:*

Dividindo o 1º termo do resto por m *vezes a potencia* m — 1 *do 1º termo da raiz, teremos o 2º termo desta.*

Forma-se a potencia m *da somma dos dois termos já obtidos, e subtrahe-se o resultado de* P.

Dividindo o 1º termo do novo resto por m *vezes a potencia* m — 1 *do 1º termo da raiz, teremos o 3º termo desta e assim por diante.*

Si o polymonio proposto for uma potencia exacta, a applicação da regra precedente nos conduzirá a um resto nullo.

Si, porém, não for uma potencia exacta, por mais que prolonguemos a operação, nunca obteremos um resto naquellas condições, e a raiz terá uma série infinita de termos.

Dividindo então o 1º termo do resto por *m* vezes a potencia *m — 1* do 1º termo da raiz, chegar-se-á a obter um termo para raiz no qual o expoente da letra ordenadora é menor ou maior que a m^a parte daquelle que tem esta letra, no ultimo termo do polynomio *P*, segundo o tivermos ordenado em relação ás potencias decrescentes ou crescentes da mesma letra.

Poder-se-á então ficar certo de que o polymonio proposto não tem uma potencia m^a perfeita.

Em vista dessa regra pode-se affirmar immediatamente que um polymonio ordenado não é uma potencia perfeita do gráo *m*, quando seu 1º termo, sendo uma potencia exacta deste gráo, o ultimo não o é.

Depois da extracção da raiz do 1º termo, suppondo ordenado o polynomio, a operação reduz-se, como acabamos de ver, a uma série de divisões.

Nestas condições, si o polynomio é inteiro, claro está que, embora satisfaça á condição acima, não poderá ser inteira a raiz quando o 1º termo do resto não for exacta-

mente divisivel por m vezes a potencia $m-1$ do 1º termo da raiz.

Si esta condição de divisibilidade não tem logar, a raiz é forçosamente fraccionaria; mas então o polynomio dado não será uma potencia perfeita do gráo m, visto como suppomol-o inteiro, o que importa em ter supposto inteira a sua raiz.

167 — APPLICAÇÃO AO CASO DA RAIZ QUADRADA — Embora o que acabamos de dizer applique-se a uma raiz qualquer, vamos comtudo, com o fim de esclarecer as idéas, applical-o á extracção das raizes quadradas e cubicas.

Representemos por P o polynomio dado e por

$$(a+b+c+\ldots.)$$

a raiz procurada, que suppomos ordenada em relação ás potencias de uma letra.

Suppondo conhecida esta raiz e elevando-a ao quadrado, é claro que teremos o polynomio P.

Representando por s a somma dos termos que succedem ao primeiro, teremos, em virtude da lei binominal,

$$P = (a+s)^2 = a^2 + 2as + s^2 \qquad (I)$$

Esta expressão nos mostra que o primeiro termo do polynomio P é sem reducção a segunda potencia ou o quadrado do primeiro termo da raiz: donde por conseguinte, extrahindo a raiz quadrada deste primeiro termo a^2, teremos a para primeiro termo da raiz.

Elevando este primeiro termo ao quadrado e subtrahindo-o do polynomio P, teremos representando por R o resto:

$$R = P - a^2 = 2as + s^2 = 2a\,(b+c+\ldots) + (b+c..)^2 \quad (II)$$

Como s é um polynomio ordenado do mesmo modo que a raiz,

$$a+b+c+\ldots,$$

podemos concluir que o primeiro termo $2ab$ deste resto R é, sem reducção, igual ao dobro do primeiro termo da raiz pelo segundo; donde, por conseguinte, dividindo o primeiro termo deste resto pelo dobro do primeiro termo da raiz, teremos o segundo termo desta.

Si subtrahirmos de P o quadrado da somma dos dois primeiros termos obtidos para raiz, isto é $(a+b)^2$, teremos (I) representando por s' a somma dos restantes:

$$R' = P-(a+b+s')^2 = 2as' + 2bs' + s'^2 = 2a(c+d+..) + \\ + 2b(c+d+...) + (c+d+...)^2 = 2ac + 2ad + ... + \\ + c^2 + d^2 + ... \qquad (III)$$

por isso que

$$P = (a+b+s')^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2as' + 2bs' + s'^2$$

Como s' está ordenado do mesmo modo que a raiz, podemos concluir que o primeiro termo $2ac$ do resto R', é sem reducção o dobro do producto do primeiro termo da raiz pelo seu terceiro termo; por conseguinte, dividindo o primeiro termo deste resto (III) pelo dobro do primeiro termo da raiz, obteremos o terceiro termo desta.

Raciocinando deste modo, chegaremos a obter todos os termos da raiz.

Podemos, pois, concluir a regra seguinte para extrahir a raiz quadrada de um polynomio.

Ordena-se o polynomio em relação ás potencias de uma mesma letra; extrahe-se a raiz quadrada do seu primeiro termo e ter-se-á o primeiro termo da raiz procurada.

Subtrahe-se em seguida do polynomio o quadrado deste primeiro termo, e dividindo o primeiro termo do resto, isto é, o segundo termo do polynomio, pelo dobro da raiz achada, ter-se-á o segundo termo da raiz.

Subtrahe-se em seguida do polynomio o quadrado da somma dos dois primeiros termos da raiz, ou o que é mais

breve, subtrahe-se do primeiro resto o dobro do producto do primeiro termo da raiz pelo segundo e mais o quadrado do segundo; divide-se o primeiro termo do resto pelo dobro do primeiro termo da raiz e ter-se-á o terceiro termo desta.

Continúa-se deste modo, até que se chegue a um resto nullo, caso em que o polynomio achado é exactamente a raiz quadrada que se procura; ou então até chegar a um resto tal, que, dividindo seu primeiro termo pelo dobro do primeiro termo da raiz achada, se seja levado a escrever nesta raiz um termo no qual o expoente da letra ordenadora seja menor ou maior que a metade daquelle que tem esta letra no ultimo termo do polynomio, conforme fôr elle ordenado em relação ás potencias decrescentes ou crescentes de uma mesma letra. Neste caso o polynomio proposto não será uma potencia exacta da raiz obtida.

Por esta regra vê-se a possibilidade de reconhecer immediatamente que um polynomio não é um quadrado perfeito quando, estando elle ordenado, é o seu primeiro termo um quadrado perfeito, sem que o ultimo o seja.

Si, além disso, o polynomio é inteiro, como sua raiz não pode ser fraccionaria succede que si o primeiro termo de cada resto não fôr exactamente divisivel pelo dobro do primeiro termo da raiz, esta será fraccionaria, o que importa em não ser o mesmo polynomio um quadrado perfeito.

Vamos fazer alguns exercicios.

Seja

$$4x^{-4} - 12ax^{-3} + 25a^2x^{-2} - 24a^3x^{-1} + 16a^4.$$

Teremos para primeiro termo da raiz $2x^{-2}$ que é a raiz quadrada de $4x^{-4}$.

Subtrahindo o quadrado de $2x^{-2}$ do polynomio e dividindo-se $-12ax^{-3}$, primeiro termo do resto, por $4x^{-2}$

dobro do primeiro termo da raiz, acha-se — $3ax^{-1}$ para segundo termo.

Somma-se este termo a $4x^{-2}$ e multiplica-se o binomio assim formado,

$$4x^{-2} - 3ax^{-1} \text{ por } -3ax^{-1}$$

Subtrahindo o producto do primeiro resto e dividindo o primeiro termo

$$+ 16a^2x^{-2}$$

do segundo resto por

$$4x^{-2}$$

teremos $4a^2$ para terceiro termo da raiz.

Sommando

$$4a^2 \text{ a } 4x^{-2} - 6ax^{-1}$$

dobro da somma dos dois primeiros termos da raiz, e subtrahindo do segundo resto o producto do trinomio

$$4x^{-2} - 6ax^{-1} + 4a^2 \text{ por } 4a^2,$$

teremos um resto nullo, o que mostra ser o polynomio dado um quadrado perfeito.

A raiz é

$$\pm (2x^{-2} - 3ax^{-1} + 4a^2)$$

Devemos affectal-a do duplo signal, porque o seu quadrado deve dar o polynomio proposto, e nós sabemos que tomando-a com o signal +, ou com o signal —, o seu producto reproduz aquelle polynomio, pois vimos na *transformação das fórmulas* que o producto de duas quantidades do mesmo signal é sempre affecto do signal positivo.

Costuma-se dispôr o calculo á semelhança do que se faz em arithmetica:

1.° $4x^{-4} - 12ax^{-3} + 25a^2x^{-2} -$	
$- 24a^3x^{-1} + 16a^4$	$2x^{-2} - 3ax^{-1} + 4a^2$
$- 4x^{-4}$	$4x^{-2} - 3ax^{-1}$
$- 12ax^{-3} + 25a^2x^{-2}$	$- 3ax^{-1}$
$+ 12ax^{-3} - 9a^2x^{-2}$	$4x^{-2} - 6ax^{-1} + 4a^2$
$16a^2x^{-2} - 24a^3x^{-1} + 16a^4$	$4a^2$
$- 16a^2x^{-2} + 24a^3x^{-1} - 16a^4$	
0	

2.° Seja ainda

$$9x^6 - 24x^5 + 46x^4 - 52x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

para extrahir a raiz quadrada.

Teremos:

$9x^6 - 24x^5 + 46x^4 - 52x^3 - 3x^2 +$	
$+ 4x - 2$	
$- 9x^6$	$3x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
$- 24x^5 + 46x^4$	$6x^3 - 4x^2$
$+ 24x^5 - 16x^4$	$- 4x^2$
$30x^4 - 52x^3 - 3x^2$	$6x^3 - 8x^2 + 5x$
$- 30x^4 + 40x^3 - 25x^2$	$5x$
$- 12x^3 - 28x^2 + 4x - 2$	$6x^3 - 8x^2 + 10x - 2$
$+ 12x^3 - 16x^2 + 20x - 4$	$- 2$
$- 44x^2 + 24x - 6$	$- 12x^3 + 16x^2 - 20x + 4$

E' evidente que o polynomio proposto não é um quadrado perfeito; elle pode ser posto sob a forma.

$$9x^6 - 24x^5 + 46x^4 - 52x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (3x^3 - 4x^2 + 5x - 2)^2 + (- 44x^2 + 24x - 6);$$

donde

$$(9x^6 - 24x^5 + 46x^4 - 52x^3 - 3x^2 + 4x - 2) - (-44x^2 + 24x - 6) = (3x^3 - 4x^2 + 5x - 2)^2$$

O resto é, não só aqui, como em todos os casos a expressão que deve ser subtrahida do polynomio dado para que elle seja uma potencia perfeita.

Com este modo de dependencia elle não pode impedir a duplicidade do signal da raiz, que é, como dissemos, uma consequencia immediata da lei dos signaes da multiplicação.

3.° Seja ainda

$$\frac{25}{4} a^2 b^2 - \frac{5}{3} abc^2 + \frac{1}{9} c^4$$

Achar-se-á

$$\frac{5}{2} ab - \frac{1}{3} c^2$$

para a raiz quadrada.

4.° Seja emfim,

$$9a^2 - 6ab + 30ac + 6ad + b^2 - 10bc - 2bd + 25c^2 + 10cd + d^2.$$

Achar-se-á:

$$3a - b + 5c + d.$$

168 — REALISAÇÃO DA OPERAÇÃO NO CASO DA RAIZ CUBICA. EXEMPLOS DIVERSOS — Estudado o processo para obter a raiz quadrada, passemos ao caso da raiz cubica.

Representemos por P o polynomio dado e por $a + b + c + \ldots$ a raiz cubica procurada, que supporemos ordenada em relação ás potencias de uma letra.

Suppondo conhecida esta raiz e elevando-a ao cubo, é claro que teremos o polynomio P.

Representando por s a somma dos termos que succedem ao 1°, teremos em virtude da fórmula (3):

$$P = (a + s)^3 = a^3 + 3a^2s + 3as^2 + s^3 \qquad (I)$$

Esta expressão nos mostra que o 1° termo do polynomio P é sem reducção a 3ª potencia ou o cubo do 1° termo da raiz; donde por conseguinte extrahindo a raiz cubica deste 1° termo a^3, obteremos a para 1° termo da raiz.

Elevando este 1° termo ao cubo e subtrahindo do polynomio P, teremos, chamando R a este 1° resto:

$$R = P - a^3 = 3a^2s + 3as^2 + s^3 = 3a^2(b + c + d + \ldots) + \\ + 3a(b + c + \ldots)^2 + (b + c + d + \ldots)^3 \qquad (II)$$

Como s ou $b + c + \ldots$ é um polynomio ordenado do mesmo modo que a raiz $a + b + c + \ldots$ podemos concluir que o 1° termo, $3a^2b$, deste resto, R, é, sem reducção igual a tres vezes a segunda potencia do 1° termo da raiz pelo termo immediato; donde por conseguinte, dividindo o 1° termo deste resto pelo triplo do quadrado do 1° termo da raiz, teremos o segundo termo desta.

Si subtrahirmos de P o cubo da somma dos dois primeiros termos da raiz, isto é $(a + b)^3$, teremos, representando por s' a somma dos termos restantes:

$$R' = P - (a + b + s')^3 = 3a^2s' + 3as'^2 + s'^3 = 3a^2 \times (c + d + \ldots) + \\ + 3a(c + d + \ldots)^2 + (c + d + \ldots)^3 = 3a^2c + \ldots + \\ + 3ac^2 + \ldots + c^3 + \ldots \qquad (III)$$

por isso que sendo

$$s' = c + d + e + \ldots$$

será

$$P = (a + b + s')^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2s' + 3as'^2 + \\ + 3b^2s' + 3bs'^2 + s'^3$$

E como s' está ordenado do mesmo modo que

$$a + b + c + \ldots,$$

podemos concluir que o 1° termo, $3a^2c$ do resto R' é, sem reducção, o triplo do quadrado do 1° termo da raiz pelo seu 3° termo.

Para obter este terceiro termo basta, portanto, dividir o 1° termo de R', isto é, $3a^2c$ por $3a^2$, triplo do quadrado do 1° termo da raiz, o que dá c para 3° termo desta.

Raciocinando deste modo chegaremos a obter todos os demais termos.

Podemos concluir a seguinte regra para extrahir a raiz cubica de um polynomio :

Ordena-se o polynomio em relação ás potencias de uma mesma letra; extrahe-se a raiz cubica do seu 1° termo e ter-se-á o 1° termo da raiz e subtrahe-se delle o cubo deste primeiro termo.

Divide-se o 1° termo do resto pelo triplo do quadrado do 1° termo da raiz e ter-se-á o 2° termo desta.

Subtrae-se em seguida do polynomio proposto o cubo da somma dos dois primeiros termos da raiz, ou, o que é o mais breve, subtrae-se do primeiro resto o triplo do quadrado do primeiro termo da raiz pelo segundo, mais o triplo deste primeiro termo pelo quadrado do segundo e mais o cubo do segundo, divide-se o 1° termo do novo resto pelo triplo do quadrado do 1° termo da raiz e ter-se-á o 3° termo desta.

Continúa-se deste modo até que se chegue a um resto nullo, caso em que o polynomio achado é exactamente a raiz cubica que se procura; ou então até que se chegue a um resto tal que, dividindo o seu 1° termo pelo triplo do quadrado da raiz achada, se seja levado a escrever nesta raiz um termo no qual o expoente da letra ordenadora seja menor, ou maior que um terço daquelle que tem esta letra no ultimo termo do polynomio, conforme for elle

ordenado em relação ás potencias decrescentes ou crescentes de uma mesma letra. Neste caso o polynomio não será uma potencia exacta da raiz obtida.

Desta regra se deprehende a possibilidade de reconhecer immediatamente que um polynomio não é cubo perfeito, quando, estando elle ordenado, é o seu 1° termo um cubo perfeito, sem que o seja o ultimo.

Si o polynomio é inteiro como sua raiz não póde ser fraccionaria, succede que, si o 1° termo de cada resto não fôr exactamente divisivel pelo triplo do quadrado do 1° termo da raiz, esta será fraccionaria o que importa não ser o polynomio, dado um cubo perfeito.

Vamos fazer uma applicação da regra acima.

Seja proposto extrair a raiz cubica de

$$8x^6 - 36ax^5 + 102a^2x^4 - 171a^3x^3 + 204a^4x^2 - 144a^5x + 64a^6$$

Como este polynomio está ordenado, a sua raiz tambem se achará ordenada.

O termo do mais alto grau se obterá extraindo a raiz cubica de $8x^6$, o que dá $2x^2$.

Elevando esta raiz ao cubo e subtraindo-a do polynomio dado, obteremos um resto cujo 1° termo é o triplo do quadrado do 1° termo da raiz, $2x^2$ pelo 2°; o triplo do quadrado deste 1° termo sendo $12x^4$, dividindo o 1° termo do resto por $12x^4$, teremos:

$$-\frac{36ax^5}{12x^4} = -3ax$$

para 2° termo da raiz.

Em lugar de elevar a somma dos dois primeiros termos da raiz ao cubo e subtrail-o do polynomio, temos um meio de abreviar isso, attendendo que já temos subtraido o cubo do 1° termo da raiz e que por conseguinte, só nos resta subtrair o triplo do quadrado do 1° termo

pelo 2º; mas o triplo do primeiro pelo quadrado do 2º e mais o cubo do 2º.

Isto é, si o 1º termo fosse representado por a e o 2º por b, é evidente que, tendo já subtrahido a^3 do polynomio proposto, bastaria subtrahir

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

do 1º resto.

Ora esta quantidade equivale a

$$(3a^2 + 3ab + b^2)\ b$$

ou a

$$[3a^2 + (3a + b)\ b]\ b\ ;$$

de sorte que para a formar bastar ajuntar b ao triplo de a, multiplicar a somma por b e juntar o producto a $3a^2$ e multiplicar de novo a somma por b.

Nestas condições devemos no nosso exemplo, formar a principio a somma do triplo do 1º termo da raiz com o segundo, o que dá:

$$6x^2 - 3ax\ ;$$

depois multiplicarmos este resultado pelo segundo, o que dá

$$-18ax^3 + 9a^2x^2\ ;$$

ajuntamos a este producto $12x^4$, triplo do quadrado do primeiro; multiplicando a somma obtida, isto é,

$$12x^4 - 18ax^3 + 9a^2x^2$$

pelo segundo,— $3ax$, e, subtrahindo o resultado do 1º resto, teremos um 2º resto, cujo 1º termo é $48a^2x^4$.

Dividindo este por $12x^4$, triplo do quadrado do 1º termo da raiz, teremos $4a^2$ para 3º termo desta

Em lugar de elevar estes tres termos ao cubo para subtrair do polynomio dado, podemos abreviar o calculo da seguinte maneira.

Universidade de S. Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

Si

$$(a + b + c)^3$$

representa o cubo da somma destes primeiros termos, é obvio que teremos :

$$[\,(a + b) + c\,]^3 = (a + b)^3 + 3\,(a + b)^2\,c + 3\,(a + b)\,c^2 + c^3;$$

e como já subtrahimos $(a + b)^3$ do polynomio, bastará subtrahir do resto correspondente

$$3\,(a + b)^2\,c + 3\,(a + b)\,c^2 + c^3.$$

Ora, esta quantidade é igual a

$$[\,3\,(a + b)^2 + 3\,(a + b)\,c + c^2\,]\,c = \{3\,(a + b)^2 + \\ + [\,3\,(a + b) + c\,]\,c\}\,c.$$

Portanto, para obtel-a, formaremos a principio $3\,(a + b)^2$, e como já temos calculado de um lado

$$3\,(a + b)\,b = 3\,ab + b^2,$$

e de outro lado

$$3\,a^2 + (3\,a + b)\,b = 3\,a^2 + 3\,ab + b^2,$$

vê-se que ajuntando b^2 a estas duas quantidades, teremos

$$3\,a^2 + 6\,ab + 3\,b^2 = 3\,(a + b)^2.$$

Isso posto ajuntaremos c ao triplo de $(a + b)$, multiplicaremos a somma por c, ajuntaremos o producto a $3\,(a + b)^2$, o que dará

$$3\,(a + b)^2 + 3\,(a + b)\,c + c^2,$$

multiplicaremos esta somma por c, o que dará:

$$3\,(a+b)^2\,c+3\,(a+b)\,c^2+c^3.$$

No nosso exemplo, applicando o que fica dito, temos formado o triplo do quadrado da somma dos dois primeiros termos da raiz ajuntando $9\,a^2x^2$ com os polynomios

$$-18\,ax^3+9\,a^2x^2$$

e

$$12\,x^4-18\,ax^3+9\,a^2x^2;$$

depois ajuntamos a este triplo quadrado o producto de

$$6\,x^2-9\,ax+4\,a^2,$$

triplo da somma dos dois primeiros termos da raiz e do terceiro por este terceiro, e emfim subtrahimos do segundo resto o producto da somma assim obtida, isto é,

$$12\,x^4-36\,ax^3+51\,a^2x^2-36\,a^3x+16\,a^4$$

pelo terceiro termo da raiz. Achamos zero para resto, o que nos faz concluir que $2\,x^2-3\,ax+4\,a^2$ é uma raiz cubica do polynomio dado.

1°. $8x^6 - 36ax^5 + 102a^2x^4 - 171a^3x^3 + 204a^4x^2 - 144a^5x + 64a^6 \mid 2x^2 - 3ax + 4a^2$

$-8x^6$

$12x^4 \quad 6x^2 - 3ax$

$0 + 36ax^5 - 54a^2x^4 + 27a^3x^3$

$-18ax^3 + 9a^2x^2$

$+48a^2x^4 - 144a^3x^3$

$12x^4 - 18ax^3 + 9a^2x^2 \mid 6x^2 - 9ax + 4a^2$

$-3ax$

$-48a^2x^4 + 144a^3x^3 - 204a^4x^2 + 144a^5x - 64a^6$

$12x^4 - 36ax^3 + 27a^2x^2$

0

$+24a^2x^2 - 36a^3x + 16a^4$

$12x^4 - 36ax^3 + 51a^2x^2 - 36a^3x + 16a^4$

2.° Seja ainda proposto extrahir a raiz cubica de

$$\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{4}ax^5-\frac{7}{12}a^2x^4-\frac{26}{27}a^3x^3+\frac{7}{6}a^4x^2+a^5x-a^6$$

Achar-se-á

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}ax-a^2.$$

3.° Seja ainda proposto obter a raiz cubica de

$$8a^3-84a^2x+294ax^2-343x^3.$$

Achar-se-á $2a-7x$.

4.° Seja emfim,

$$27z^6-54az^5+63a^2z^4-44a^3z^3+21a^4z^2-6a^5z+a^6.$$

Achar-se-á

$$3z^2-2az+a^2.$$

Não precisamos tratar especialmente da extracção da raiz quarta, quinta e etc.

A regra que temos dado tem inteira generalidade.

Como exemplo seja proposto extrahir a raiz quarta de

$$256x^4-1280x^3+2400x^2-2000x+625.$$

Achar-se-á $4x-5$.

Para a raiz quinta de

$$243a^5c^5-810a^4c^4bd+1080a^3c^3b^2d^2-720a^2c^2b^3d^3+240acb^4d^4-$$
$$-32b^5d^5,$$

virá

$$3ac-2bd.$$

169 — ANALOGIA DA EXTRACÇÃO DA RAIZ COM A DIVISÃO — CONCLUSÃO — O estudo que deixamos feito nos mostra que a extracção de uma raiz qualquer, m, de um polynomio consiste, depois da extracção da raiz do seu primeiro termo, em uma serie de divisões. Si se chegar a obter um resto nullo, a expressão dada será uma potencia perfeita e a raiz terá um numero limitado de termos; si

isto não acontecer ella será constituida por uma serie infinita de termos.

Então o resto, que na divisão é a differença entre o dividendo e o producto do divisor pelo quociente, torna-se-á aqui a differença entre o polynomio dado e a m^a potencia de sua raiz.

Semelhante analogia entre a divisão e a phase principal da extracção da raiz, é tão intima que esta transformação comporta, como aquella, uma completa elaboração quando mesmo fiquem indeterminados os coefficientes do polynomio dado.

Como na divisão, é possivel, com effeito, determinar aqui os valores que devem ter estes coefficientes afim de que a transformação se realise exactamente.

Para apreciar isto, vamos tomar um exemplo relativo ao caso verdadeiramente usual da raiz quadrada.

Seja

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E,$$

o polynomio cuja raiz quadrada se procura.

Si os coefficientes deste polynomio fossem determinados, é claro que, para ser elle uma segunda potencia exacta, bastaria que, extrahindo sua raiz quadrada pelo processo indicado, se chegasse a um resto nullo, á semelhança do que se dá numa divisão que se effectua exactamente. Si porém o polynomio não for um quadrado perfeito, haverá um resto. E como o polynomio é do quarto grau, sua raiz será do segundo e esse resto do primeiro grau (24 a) e por conseguinte da forma $A_1x + A_2$.

(24 a) E' facil mostrar que, considerando-se um polynomio P do grau $2m$, cuja raiz D tenha o ultimo termo do grau n, o maximo grau do resto R será $m + n - 1$. Com effeito, suppondo o polynomio P ordenado segundo as potencias decrescentes de uma letra, é claro que os graus dos restos successivos da operação vão decrescendo. Ora, o ultimo termo de D foi evidentemente obtido dividindo o primeiro termo do resto que precede R pelo dobro do pri-

Como A_1 e A_2 são grandezas indeterminadas, podemos attribuir-lhes valores taes, que annullem o resto A_1x+A_2.

Isso importa evidentemente em determinar as condições necessarias afim de que o polynomio dado seja um quadrado perfeito.

Estas condições são dadas pela equação $A_1x+A_2=0$.

Ora, os termos desta equação sendo dissemelhantes, elles não poderão de modo algum se destruir e nestas condições $A_1x + A_2$ só poderá ser nullo quando $A_1 = 0$ e $A_2 = 0$.

Como este raciocinio se applicaria do mesmo modo a um polynomio composto de um maior numero de termos, podemos estabelecer o seguinte:

Para que um polynomio ordenado segundo as potencias de uma certa letra x seja nullo, para qualquer valor que se possa assignalar a esta letra, é necessario e bastante que os coefficientes das diversas potencias de x sejam separadamente iguaes a zero.

Mas A_1 e A_2 sendo formações dos cinco coefficientes

$$A,\ B,\ C,\ D \text{ e } E$$

ficaremos com as duas equações

$$f_1(A,\ B,\ C,\ D,E) = 0,\ f_2(A,\ B,\ C,\ D,E) = 0,$$

para determinal-os.

Este resultado nos mostra ser a questão indeterminada, porque com as duas equações poderiamos determinar apenas dois daquelles coefficientes.

Como porém são elles em numero de cinco, é claro que podemos dispôr arbitrariamente dos tres outros, o que dá lugar a uma infinidade de soluções.

---

meiro termo de D; mas o ultimo termo de D sendo por hypothese do grau n, será preciso que o primeiro termo deste resto seja do grau $m + n$, e por conseguinte que o grau de R seja no maximo $m + n - 1$, visto termos supposto P ordenado segundo as potencias decrescentes da letra ordenadora.

Correspondendo cada solução a uma raiz exacta para o polynomio dado, concluimos que elle comporta uma infinidade de raizes desta natureza.

Para fixar as ideas sobre o que fica dito, vamos effectuar a operação:

Teremos

$$\frac{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}{Ax^4}\;\left|\begin{array}{l} A^{\frac{1}{2}}x^2+\dfrac{Bx}{2A^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{4AC-B^2}{8A^{\frac{3}{2}}} \\ \hline 2\times A^{\frac{1}{2}}x^2+\dfrac{Bx}{2A^{\frac{1}{2}}} \\ \left(2A^{\frac{1}{2}}x^2+\dfrac{1}{2}\dfrac{Bx}{A^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\dfrac{Bx}{A^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{4AC-B^2}{A^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{4AC-B^2}{8A^{\frac{3}{2}}} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} 0\quad Bx^3+Cx^2+Dx+E \\ \quad -Bx^3-\dfrac{1}{4}\dfrac{B^2}{A}x^2 \\ \hline \left(C-\dfrac{B^2}{4A}\right)x^2+Dx+E \\ \left[D-\dfrac{B(4AC-B^2)}{-8A^3}\right]x-\dfrac{(4AC-B^2)^2}{64A^3}+E \end{array}$$

O resto igualado a zero nos dá:

$$\left[D - \frac{B\,(4\,AC - B^2)}{8\,A^2}\right] x + \left[E - \frac{(AC - B^2)^2}{64\,A^3}\right] = 0$$

donde as duas equações a quatro incognitas do primeiro grau:

$$D - \frac{B\,(4\,AC - B^2)}{8\,A^2} = 0,\ E - \frac{(4\,AC - B^2)^2}{64\,A^3} = 0$$

ou expellindo os denominadores:

$$B^3 - 4\,ABC + 8\,A^2\,D = 0$$
$$(B^2 - 4\,AC)^2 - 64\,A^3\,E = 0$$

No paragrapho seguinte nos occuparemos da resolução de taes equações.

Temos terminado o estudo da lei binominal e das suas applicações mais importantes.

E' a Newton, tendo como precursores Viète e Stevin que devemos esta immortal descoberta.

Mas é principalmente a Newton (24 b) que cabe a maior parte da gloria porque foi elle quem teve a feliz inspiração de tornar differentes os segundos termos dos binomios multiplicadores, cuja lei poude então obter.

Conhecida ella com esta ligeira modificação, só restava passar ao facto primitivo tornando communs os segundos termos dos mesmos binomios, e foi o que fez o illustre geometra inglez.

(24 b) Isaac Newton nasceu em 1642 em Woolsthorp (Inglaterra) anno da morte de Gallileu, e veio a fallecer em 1727.

Discipulo de Barrow em Cambridge, elle se familiarisou bem cedo com a Geometria de Descartes e com a Arithmetica dos infinitos de Wallis.

Foi por esse tempo que elle descobriu a fórmula dos coefficientes do binomio que tem o seu nome e os primeiros elementos do *Methodo das fluxões* a que naturalmente o conduziram os bellos trabalhos de seus grandes mestres Barrow e Wallis.

Succedendo a Barrow como professor, elle expoz a theoria da composição da luz branca, atravez de um prisma, dando lugar as

Sem a lembrança feliz de Newton talvez não conhecessemos ainda hoje a lei binominal.

Ella nos mostra ao mesmo tempo o verdadeiro methodo que se deve seguir na descoberta das verdades.

Quando a indagação de um facto, tal como elle é obtido ou se manifesta, não nos pode desvendar facilmente a lei que o rege, deve-se introduzir-lhe uma modificação, afim de ver si sob o novo aspecto a lei se torna patente.

Embora as leis geraes se manifestem em todos os casos particulares, ellas se acham comtudo complicadas com circumstancias estranhas, que é preciso afastar, ainda que para isso seja preciso escolher ou produzir os phenomenos mais proprios para este fim.

CAPITULO IX

RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 1º GRÁO QUANDO O CALCULO É INDETERMINADO

§ 25

Caso do 1º gráo de indeterminação: methodo ordinario para resolvel-o, duplo modo de effectual-o.

170—Devemos completar agora o estudo das equações do 1º gráo, resolvendo-as especialmente quando se considera uma ou mais equações em numero inferior ao das incognitas distinctas que contêm.

---

sete cores do arco-ires, completando depois sobre este assumpto as idéas de Descartes.

Em 1671 elle mesmo executou o seu telescopio de reflexão, utilisando em parte as idéas de Gregory e de Mersenna.

Sua primeira obra foi a *Arithmetica Universal* que despertou pouco interesse.

Mas a que publicou mais tarde sob o titulo de *Principios* deu-lhe uma gloria immortal: no primeiro livro desta obra elle expoz *a theoria das marés* e no terceiro a lei de *gravitação universal* mostrando que a terceira lei de Kepler é apenas uma consequencia da sua.

Já vimos que o calculo é indeterminado neste caso, visto como conduz sempre a uma infinidade de soluções.

Todavia, si impuzer-se a condição de obter sómente as soluções inteiras, ou ainda as inteiras e positivas, o problema póde tornar-se determinado, e é com estas restricções que a algebra o considera.

Na resolução destas equações o ponto de vista arithmetico combina-se, pois, com o ponto de vista algebrico, em virtude da necessidade de escolher-se entre a infinidade de soluções que ellas comportam as que são inteiras e positivas.

Uma tal combinação caracterisa estas pesquizas e explica ao mesmo tempo o facto historico de haverem sido incluidas no dominio da arithmetica muito antes da algebra se separar dessa sciencia.

Com effeito, tratando da parte de sua *arithmetica*, que depois constituiu a algebra, Diophante consagrou-a quasi inteiramente a questões *indeterminadas*, nas quaes procurava sempre as soluções em numeros inteiros e positivos. Dahi o nome de *questões de Diophante*, que foi dado a esta sorte de pesquizas.

Para aprecial-as com toda a generalidade, consideremos a principio o caso mais simples do 1º gráo de indeterminação, isto é, o relativo a uma equação a duas incognitas, a que se póde reduzir successivamente todos os outros.

O nosso primeiro objectivo deve, pois, consistir em determinar as soluções inteiras e positivas de taes equações. Qualquer que seja ella, já vimos que convenientemente transformada póde sempre tomar a forma

$$ax \pm by = c \qquad (1)$$

na qual se póde suppor que a, b e c são numeros inteiros e primos entre si, sendo a positivo.

Além disto, é preciso admittir que o coefficiente a seja primo com b: sem esta condição a equação não poderia

ser satisfeita por nenhum valor inteiro de x e y, quer positivo, quer negativo. Porque si a e b admittem um factor commum, que não entre em c, dividindo por elle ambos os membros da equação, o segundo destes será uma fracção irreductivel, que jámais poderá equivaler á somma ou differença dos numeros inteiros produzidos no primeiro membro.

Emfim, querendo sómente as soluções positivas, deve-se excluir a hypothese em que o segundo membro da equação (1) é negativo, sendo a e b positivos, visto como é evidente que neste caso não admitte ella soluções positivas.

171 — INSTITUIÇÃO DO PROCESSO ESPONTANEO; APERFEIÇOAMENTO QUE COMPORTA — Estabelecidos estes preliminares, vejamos agora qual o processo que espontaneamente se apresenta para resolver a equação

$$ax + by = c$$

em numeros inteiros e positivos.

Suppondo os coefficientes a, b e c, numericamente particularisados, os antigos resolveram esta equação, assimilando-a naturalmente ao caso de uma incognita.

Assim, admittindo conhecida a incognita y, elles resolviam a equação em relação a x, procurando em seguida determinar os valores inteiros e positivos, attribuidos á outra.

Procedendo deste modo, teremos immediatamente

$$x = \frac{c - by}{a} \text{ ou } x = \frac{c}{a} - \frac{by}{a}$$

Fazendo successivamente $y = 0, 1, 2, 3\ldots$ chega-se afinal a conhecer quaes destes valores podem tornar

$$\frac{c - by}{a}$$

um numero inteiro, e deste modo ficarão conhecidos os valores inteiros de x.

Comprehende-se, porém, que semelhante processo offerece o inconveniente de exigir diversas tentativas, que poderão ser mui multiplicadas quando forem numerosas as soluções inteiras da equação proposta.

Entretanto, cumpre observar que é susceptivel de ser aperfeiçoado muito mais do que se imagina ordinariamente, de modo a fornecer as soluções procuradas após alguns ensaios bem dirigidos.

Para mostral-o, notemos a principio: 1º, *que si o termo independente for um multiplo do coefficiente da incognita procurada, o valor desta será obtido attribuindo á outra valores iguaes a um multiplo do mesmo coefficiente;* 2º, *que si o termo independente não for um multiplo do coefficiente da incognita que se procura, o valor da incognita é sempre igual á differença entre um multiplo deste coefficiente e um certo multiplo do outro, de sorte que bastará addicionar-lhe este numero para tornal-o multiplo do primeiro.*

Na primeira hypothese a fórmula acima terá por expressão

$$x = q - nb \tag{2}$$

porque $\frac{c}{a}$ é um quociente inteiro q, e fazendo

$$y = a, 2a, 3a \ldots . na,$$

será

$$\frac{by}{a} = b, 2b, 3b, \ldots . nb.$$

Nestas condições, $q - nb$ ou x será um numero inteiro e positivo desde que se supponha

$$nb < q \text{ ou } n < \frac{q}{b}$$

Na segunda hypothese a expressão da incognita póde ser escripta sob a forma

$$x = \frac{Ma - mb}{a} - nb ; \tag{3}$$

de sorte que addicionando successivamente ao numerador, as quantidades b, $2b$, $3b$.... mb tornar-se-á emfim o primeiro termo um multiplo de a, visto como,

$$Ma - mb + mb = Ma$$

Nestas condições vê-se que basta neste caso addicionar por tentativas ao termo independente os multiplos successivos do coefficiente da outra incognita, até chegar-se a um que o torne divisivel pelo coefficiente da que se procura.

Obtidos assim os valores inteiros de uma das incognitas, poder-se-á proceder de modo analogo para obter os da outra. Mas, para evitar novas tentativas, bastará substituil-os na equação proposta, porque esta se tornará determinada.

Para comprehender o que fica dito supponhamos que se trata de resolver a equação

$$5x + 7y = 300$$

Applicando a fórmula acima (2) teremos

$$x = \frac{300}{5} - n.\ 7 \text{ ou } x = 60 - n.\ 7;$$

de sorte que fazendo successivamente

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots \frac{60}{7}$$

ter-se-á todos os valores inteiros de x, a saber:

$$x = 60,\ 53,\ 46 \ldots\ 11,\ 4,\ 0.$$

Substituindo estes valores na equação proposta e resolvendo-a em seguida, virá successivamente

$$y = 0,\ 5,\ 10, \ldots\ 35,\ 40.$$

E' facil de ver que se fosse 30, em vez de 300, o segundo membro da equação proposta, não teria esta nenhuma solução inteira e positiva, visto como

$$\frac{30}{5} - n.\ 7$$

seria negativo para qualquer valor inteiro de n.

Supponhamos ainda a equação

$$5x + 7y = 101.$$

Applicando a fórmula (3) teremos

$$x = \frac{M.\ 5 - m.\ 7}{5} - n.\ 7 = \frac{101}{5} - n.\ 7$$

Addicionando a 101 $7 + 14$ ou 2×7, vê-se immediatamente que aquelle numero se torna um multiplo de 5 e assim temos

$$x = \frac{101 + 14}{5} - n.\ 7 \text{ ou } x = 23 - n.\ 7$$

Fazendo successivamente $n = 1, 2, 3$, teremos os valores inteiros e positivos $x = 16, 9, 2$; substituindo estes valores na equação proposta e resolvendo-a em seguida, virá para a outra incognita $y = 3, 8, 13$.

Para $n = o$, seria x positivo e y negativo.

Applíquemos o mesmo processo ás equações da forma $a\,x - by = c$.

Seja a equação

$$5x - 7y = 101$$

A fórmula acima tornar-se-á

$$x = \frac{101}{5} + n.\ 7,$$

onde se vê que o numero de suas soluções inteiras e positivas é illimitado.

Com effeito a fórmula precedente transforma-se em $x = 23 + n.7$, e nos mostra que para todos os valores in-

teiros e positivos de n, que são em numero infinito, correspondem outros tantos valores inteiros e positivos de x, e portanto de y.

O mesmo acontecerá evidentemente com todas as equações como esta, em que o termo intermediario é negativo e os outros positivos.

Si as equações consideradas forem do typo

$$ax - by = -c,$$

a questão reduz-se ao primeiro caso desde que se multiplique ambos os membros por -1.

Tal é o aperfeiçoamento maximo a que póde attingir o processo espontaneo.

Assim concebido, é facil de vêr que se torna elle praticavel na maioria dos casos.

Todavia, offerece a desvantagem de exigir tentativas, e por isso foram instituidos os processos hoje conhecidos em que não existe similhante inconveniente logico.

Dois são estes methodos, um mais algebrico e outro mais arithmetico.

O primeiro que é o mais antigo funda-se na reducção successiva do menor dos coefficientes das incoguitas; o outro, mais moderno, baseia-se especialmente num engenhoso emprego das *fracções continuas*.

Aquelle, embora mais racional do que este, offerece comtudo menos facilidade de execução, e por isto não é empregado ordinariamente.

Um e outro exigem sempre que os coefficientes da equação sejam numericamente particularisados, e não comportam por isto verdadeiras fórmulas algebricas.

172 — Occupemo-nos por em quanto do methodo mais racional.

Procuremos por meio delle resolver a equação

$$ax + bx = c \qquad (1)$$

em numeros inteiros e positivos, suppondo que a, b e c são primos entre si, sendo além disso a primo com b.

Si um dos coefficientes das incognitas, a por exemplo, fosse igual á unidade, a resolução desta equação seria facilima, porque se deduziria immediatamente

$$x = c - by.$$

onde se vê que a cada valor inteiro dado a y corresponde um outro para x.

Tendo em vista esta simplicidade, procurou-se fazer depender a resolução da equação (1) da de uma outra na qual o coefficiente de uma das incognitas seja igual á unidade.

Nisto consiste essencialmente o methodo de que ora tratamos.

Para instituil-o, notemos que a e b sendo por hypothese primos entre si, são necessariamente desiguaes: supponhamos $a < b$

Resolvendo a equação (1) em relação a incognita que tem o menor coefficiente, teremos.

$$x = \frac{c - by}{a}$$

Suppondo que se effectue a divisão de b por a, e chamando q o quociente e r o resto, virá

$$b = aq + r;$$

substituindo na fórmula precedente b por seu valor virá

$$x = \frac{c - aqy - ry}{a} = -qy + \frac{c - ry.}{a}$$

Para que este valor de x seja inteiro, é bastante que os valores inteiros, que se podem attribuir a y tornem

$$\frac{c - ry}{a}$$

igual a um numero inteiro qualquer t, de sorte que se terá então

$$\frac{c - ry}{a} = t, \text{ e } x = -qy + t$$

A resolução da equação (1) acha-se, pois, reduzida á da equação

$$\frac{c - ry}{a} = t,$$

que se transforma em

$$ry + at = c; \qquad (2)$$

e assim estamos approximando do fim que temos em vista porquanto os coefficientes r e a das incognitas y e t são respectivamente menores do que a e b, isto é, dos que affectam as incognitas x e y na equação proposta. (25 a).

(25 a) E' evidente que nos approximaremos tanto mais do nosso objectivo quanto menor for r.

Por consegninte si ao fazer a divisão de b por a, encontramos um resto

$$r > \frac{1}{2} a,$$

será vantatajoso tomar o quociente por excesso, visto como o resto será então menor do que

$$\frac{1}{2} a.$$

Com effeito a igualdade $b = aq + r$ transforma-se em $b = a(q + 1) - a + r$ ou $b = a(q + 1) - (a - r)$, onde se vê que

$$a - r < \frac{1}{2} a.$$

Deve-se portanto effectuar as divisões de maneira a obter um resto menor do que a metade do divisor, tomando para isto os quocientes por falta, ou por excesso, conforme fôr necessario. No-

Operando sobre a equação (2) como fizemos sobre a proposta, achar-se-á

$$y = \frac{c - at}{r} = -q't + \frac{c - r't}{r},$$

por isso que $a = rq' + r'$

Para que este valor de y seja inteiro, é necessario e bastante que os valores inteiros que attribuimos a t tornem

$$\frac{c - r' t}{r}$$

---

temos ainda que si c e r admittissem um factor commum k, a fracção

$$\frac{c - ry}{a}$$

podendo ser posta sob a forma

$$\frac{k\,(c' - r'y),}{a}$$

e sendo k um numero primo com a, sem o que b e a teriam factor commum, para que

$$\frac{c - ry}{a}$$

seja um numero inteiro é bastante que

$$\frac{c' - r'y}{a}$$

seja tambem um numero inteiro. o que dará

$$\frac{c' - r'y}{a} = \text{t},$$

donde $ry + at = c'$; e aqui o coefficiente de y é menor que na equação (2).

Não se deve pois desprezar esta simplificação quando ella fôr possivel.

Observemos emfim, que se poderia effectuar tambem a divisão de c por a, como se faz ordinariamente, e que conduziria a uma equação mais simples, convindo obter o quociente por falta, ou por excesso, conforme fôr necessario para obter um factor commum ao resto desta divisão e ao de b por a si fôr possivel.

igual a um numero inteiro e qualquer t' de sorte que se terá

$$\frac{c - r' t}{r} = t',$$

e portanto $y = -q't + t'$.

A resolução da equação (2) fica assim dependente da equação mais simples

$$\frac{c - r' t}{r} = t' \text{ ou } r' t + rt' = c \qquad (3)$$

Resolvendo-a, obtem-se

$$t = \frac{c - rt'}{r'} = -q'' t' + \frac{c - r'' t'}{r'},$$

por isso que $r = r' q'' + r''$.

Para que t seja um numero inteiro, é necessario e bastante que se attribua a t' valores inteiros que tornem

$$\frac{c - r'' t'}{r'}$$

igual a um numero inteiro qualquer t'' de sorte que se terá

$$\frac{c - r'' t'}{r'} = t'',$$

e portanto

$$t = -q'' t' + t''$$

A resolução da equação (3) está pois dependendo agora de outra equação mais simples, isto é

$$\frac{c - r'' t'}{r'} = t'' \text{ ou } r'' t' + r' t'' = c \qquad (4)$$

Porém, sem ir mais longe, notemos que os coefficientes das diversas incognitas, nas transformadas successivas (2), (3) e (4) são os proprios restos que nós achariamos procurando o maior divisor commum entre b e a;

porque dividimos a principio b por a, depois a pelo primeiro resto r desta primeira divisão, depois este resto pelo seguinte r' da segunda divisão e assim por diante.

Ora, a e b sendo por hypothese primos entre si é evidente que proseguindo em taes divisões, chegar-se-á por fim a um resto igual á unidade, o qual será o coefficiente da penultima das incognitas indeterminadas, introduzidas no curso do calculo.

Suppondo que r'' seja este resto igual a unidade, tirar-se-a então da ultima transformada

$$t' = c - r' t''$$

Substituindo este valor de t' no de t (3) e depois remontando successivamente aos valores das diversas incognitas auxiliares, chegar-se-á por uma marcha retrograda a obter para x e y valores que serão formações inteiras da indeterminada t''.

Estes valores conterão em geral um termo em t'' e um outro independente desta variavel, e serão portanto da forma

$$y = \beta - at'' \text{ e } x = \alpha + bt''$$

A questão ficará então completamente resolvida, por isso que para todos os valores inteiros que se puderem attribuir a t'', obter-se-ão os correspondentes para x e para y.

173 — Façamos algumas applicações do methodo precedente afim de melhor comprehendel-o.

Seja a equação

$$5x + 33y = 439$$

Resolvendo-a em relação á incognita que tem menor coefficiente, e suppondo constante a outra, teremos.

$$x = \frac{439 - 33y}{5} = -6y + \frac{439 - 3y}{5}$$

Fazendo

$$\frac{439 - 3y}{5} = t$$

e portanto

$$x = -6y + t, \qquad (1)$$

a resolução da equação proposta ficará dependente da de outra mais simples, isto é,

$$5t + 3y = 439$$

Desta equação tira-se

$$y = \frac{439 - 5t}{3} = -t + \frac{439 - 2t}{3}$$

Fazendo ainda

$$\frac{439 - 2t}{3} = t' \text{ ou } 439 - 2t = 3t';$$

e portanto

$$y = -t + t', \qquad (2)$$

a resolução da equação proposta fica dependente da transformada

$$3t' + 2t = 439$$

Resolvendo esta equação relativamente á incognita de menor coefficiente, virá

$$t = \frac{439 - 3t'}{2} = -t' + \frac{439 - t'}{2}.$$

Fazendo

$$\frac{439 - t'}{2} = t'' \text{ ou } 439 - t' = 2t'',$$

e portanto

$$t = -t' + t'' \qquad (3)$$

a questão ficará reduzida a resolver em numeros inteiros a equação

$$2t'' + t' = 439.$$

Ora, o coefficiente de t' sendo igual a unidade, esta equação é immediatamente resolvida em numeros inteiros e por conseguinte o mesmo acontecerá com as transformadas, e portanto com a proposta que dellas depende finalmente.

Teremos, com effeito

$$t' = 439 - 2\,t'' \qquad (4)$$

Attribuindo a t'' os valores $0, 1, 2, 3, 4 \ldots . 219$, temos todos os valores inteiros de t'; substituindo estes valores, na expressão (3) obteremos todos os valores anteriores de t, os quaes substituidos por sua vez na fórmula (2) dar-nos-ão os valores inteiros de y.

Emfim, substituindo estes valores de y na expressão (1), teremos tambem os de x, e a questão ficará completamente resolvida.

Mas, pode evitar-se esta serie de substituições successivas, eliminando de uma vez, entre as expressões obtidas as incognitas auxiliares t e t', de modo a chegar logo ás fórmulas de x e y em formação inteira da indeterminada restante t''.

Para isto, substituiremos o valor de t' (4), na expressão (3), o que dará

$$t = -(439 - 2\,t'') + t''$$

ou

$$t = 3\,t'' - 439$$

Substituido este valor na expressão (2), eliminaremos t, e virá então

$$y = -(3\,t'' - 439) + 439 - 2\,t''$$

ou

$$y = 878 - 5\,t'',$$

substituindo este valor de y na expressão de x (1), virá finalmente

$$x = -5.707 + 33\,t''$$

Attribuindo a t'' os valores inteiros *173*, *174* e *175*, unicos susceptiveis de fazerem com que x e y sejam tambem inteiros e positivos, obteremos evidentemente todas as soluções da equação proposta, a saber:

$$x = 2 \text{ e } y = 13,$$
$$x = 35 \text{ e } y = 8,$$
$$x = 68 \text{ e } y = 3.$$

Notemos que, no curso do calculo, o termo independente da incognita ficou intacto nas transformadas successivas.

Theoricamente, esta marcha tem a vantagem de facilitar a instituição deste methodo, mas na pratica nenhum incoveniente ha em empregar o termo constante nas divisões successivas, por este modo, elle é finalmente substituido por um numero mais simples, o que simplifica a determinação dos valores de x e de y por meio da ultima indeterminada.

Esta marcha foi seguida por Euler e póde ser verificada no exemplo seguinte.

Com effeito, seja a mesma equação

$$5x + 33y = 439;$$

resolvendo-a em relação a x que é a incognita que tem menor coefficiente, temos:

$$x = \frac{439 - 33y}{5} = 87 - 6y + \frac{4 - 3y}{5}.$$

Fazendo

$$\frac{4 - 3y}{5}$$

igual a uma indeterminada t, a expressão de x se transformará em

$$x = 87 - 6y + t$$

e teremos

$$\frac{4-3y}{5}=t$$

ou

$$5t+3y=4$$

donde se tira

$$y=\frac{4-5t}{3}=1-t+\frac{1-2t}{3}$$

Fazendo

$$\frac{1-2t}{3}$$

igual a uma nova indeterminada t', a expressão de y se transformará em

$$y=1-t+t'$$

e teremos

$$\frac{1-2t}{3}=t'$$

ou

$$3t'+2t=1$$

donde

$$t=\frac{1-3t'}{2}=-t'+\frac{1-t'}{2}$$

Fazendo ainda

$$\frac{1-t'}{2}$$

igual a uma outra indeterminada t'', a expressão de t ficará

$$t=-t'+t''$$

e teremos

$$\frac{1-t'}{2}=t''$$

ou

$$2t''+t'=1$$

e a resolução da equação dada ficará dependendo da resolução desta ultima equação, onde o coefficiente de uma das incognitas t' é a unidade e de onde se tira

$$t'=1-2t''$$

Fazendo agora nesta expressão t'' igual a $0, 1, 2, 3$, etc., $-1, -2, -3$, etc., teremos os valores de t', que substituidos successivamente nas expressões de t, y e x, nos farão conhecer os valores inteiros de x e y que satisfazem a equação proposta.

Póde-se, porém, evitar esta serie de substituições successivas, desde que se exprima x e y em formação immediata da ultima indetermidada t'', eliminando-se para isto t e t' entre

$$x = 87 - 6y + t$$

$$y = 1 - t + t'$$

$$t = -t' + t''$$

$$t' = 1 - 2t''$$

Para isto substituiremos a expressão de t' na de t e virá

$$t = -(1 - 2t'') + t'' = -1 + 2t'' + t'' = 3t'' - 1$$

Substituindo em seguida as expressões de t e t' na de y, vem

$$y = 1 - (3t'' - 1) + 1 - 2t'' = 1 - 3t'' + 1 + 1 - 2t'' = 3 - 5t''$$

Substituindo finalmente as expressões de y e t na de x, teremos:

$$x = 87 - 6(3 - 5t'') + 3t'' - 1 = 87 - 18 + 30t'' + 3t'' - 1 = 68 + 33t''$$

As expressões de x e y em formação immediata de t'' serão então:

$$x = 68 + 33t'' \quad y = 3 - 5t''$$

e nos darão immediatamente todas as soluções inteiras da equação proposta, desde que se substitua ahi t'' por $0, -1, -2$.

174 — A inspecção das fórmulas de x e y, precedentemente obtidas nos deixa ver que os coefficientes destas incognitas se acham ahi applicados de modo inverso ao que figuram na equação.

Com effeito, comparando a equação

$$5x + 33y = 439$$

com as fórmulas obtidas

$$x = 68 + 33t''$$

e

$$y = 3 - 5t''$$

nota-se:

1°, que o coefficiente de y faz parte da expressão x e que o coefficiente de x faz parte da expressão de y, estando um com o mesmo signal e o outro com signal contrario;

2°, cada um delles se acha multiplicado pela indeterminada e addicionado algebricamente ao valor obtido.

Esta circumstancia verifica-se sempre, qualquer que seja a equação proposta.

Para mostral-o consideremos ainda a equação

$$17x - 49y = -8$$

Applicando o processo precedente e tomando para abreviar o primeiro quociente por excesso, teremos

$$x = \frac{49y - 8}{17} = 3y - \frac{(2y + 8)}{17};$$

fazendo

$$\frac{2y + 8}{17} = t$$

será

$$x = 3y - t;$$

e de

$$2y + 8 = 17t$$

deduz-se

$$y = \frac{17\,t - 8}{2} = 8\,t - 4 + \frac{t}{2};$$

suppondo ainda

$$\frac{t}{2} = t',$$

teremos

$$t = 2\,t':$$

Substituindo este valor nos de y e de x, virá finalmente

$$y = 8\,t - 4 + t' = 16\,t' - 4 + t'$$

ou

$$y = 17\,t' - 4;$$

e

$$x = 3\,y - t = 3\,(17\,t' - 4) - 2\,t' = 51\,t' - 12 - 2\,t'$$

ou

$$x = -12 + 49\,t',$$

onde se vê que *17*, coefficiente de x, figura na expressão de y com o mesmo signal, e que *49*, coefficiente de y, se acha na expressão de x com signal contrario, estando cada um delles multiplicado pela indeterminada t' e addicionado algebricamente ao valor obtido para a incognita. (25 b).

(25 b) Além da simplificação resultante do emprego de um quociente por excesso, este exemplo permitte uma outra que, conforme dissemos, deve ser empregada sempre que for possivel.

Porque, sendo

$$x = 3y - \frac{(2\,y + 8)}{17}$$

pode-se fazer

$$\frac{2\,y + 8}{17} = \frac{2\,(y + 4)}{17},$$

e como *17* e *2* são primos entre si, para que esta expressão repre-

Applicando ainda o mesmo processo á resolução da equação

$$39\,x - 56\,y = 11,$$

achar-se-á

$$x = 56\,t' - 27$$

e

$$y = 39\,t' - 19$$

onde se observa que as fórmulas de x e y ainda gosam da mesma propriedade.

Tomando outros exemplos, seria facil induzir essa lei, de sorte que suppondo β e α representem uma primeira solução da equação proposta, teremos sempre

$$x = \alpha + bt$$

e

$$y = \beta - at,$$

ou

$$x = \alpha - bt$$

e

$$y = \beta + at$$

conforme os signaes dos coefficientes.

---

sente um numero inteiro, bastará que *17* divida exactamente $y + 4$.

Fazendo pois,

$$\frac{y+4}{17} = t,$$

virá

$$y = 17\,t - 4,$$

e por conseguinte,

$$x = 3\,y - 2\,t,$$

ou

$$x = 49\,t - 12.$$

Sente-se a importancia desta simplificação observando que por meio desta introduzimos apenas uma indeterminada, em vez de duas.

Mas esta lei pode ser tambem instituida deductivamente, substituindo as incognitas por qualquer destas soluções hypotheticas da equação geral

$$a\alpha + by = c$$

Com effeito, suppondo que

$$x = \alpha$$

e

$$y = \beta$$

representam uma solução inteira desta equação teremos a igualdade

$$a\alpha + b\beta = c;$$

e portanto, substituindo este valor de c na equação proposta, virá

$$ax + by = a\alpha + b\beta$$

ou

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0$$

donde se deduz

$$x - \alpha = \frac{-b(y - \beta)}{a}.$$

Esta igualdade nos mostra que a um valor inteiro de x só poderá corresponder um outro de y tambem inteiro quando $b(y - \beta)$ for divisivel por a; como porém a é supposto primo com b, será preciso que $y - \beta$ seja multiplo de a.

Fazendo, pois $y - \beta = at$, sendo t um numero inteiro qualquer dahi resulta que $x - \alpha = -bt$; e destas duas igualdades deduz-se evidentemente

$$x = \alpha - bt$$

e

$$y = \beta + at$$

Como t póde ser um numero inteiro positivo ou negativo, nos é facultado mudar t em $-t$ nestas fórmulas, e virá ainda

$$x = \alpha + bt$$

e

$$y = \beta - at.$$

Reciprocamente, se qual for o valor inteiro de t, os os numeros expressos por

$$x = \alpha \pm bt$$

e

$$y = \beta \mp at$$

satisfazem a equação proposta:

Porque, substituindo-os nesta equação, virá

$$a(\alpha + bt) + b(\beta - at) = c$$

ou reduzindo

$$a\alpha + b\beta = c,$$

igualdade verdadeira, visto como α e β formam por hypothese uma solução da proposta.

175 — No emprego das fórmulas precedentes ha um melo facil de constatar a veracidade das soluções obtidas.

Consiste este em verificar si os valores de x e de y formam duas progressões arithmeticas, cuja razão deve ser, para os valores de x, o coefficiente de y, e para os valores de y, o coefficiente de x tomado com signal contrario na equação proposta.

Assim deve acontecer, porquanto, si nas fórmulas

$$x = \alpha - bt$$

e

$$y = \beta + at$$

se faz successivamente

$$t = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

ou

$$t = -1, -2, -3, \ldots.$$

ellas nos darão

$$\begin{cases} x = \alpha, \alpha - b, \alpha - 2b, \alpha - 3b \ldots \\ y = \beta, \beta + a, \beta + 2a, \beta + 3a \ldots \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = \alpha, \alpha + b, \alpha + 2b, \alpha + 3b \ldots \\ y = \beta, \beta - a, \beta - 2a, \beta - 3a \ldots \end{cases}$$

onde se vê que as duas series de valores de x e de y se acham em progressão por differença, em que as razões são respectivamente os coefficientes de y e de x tomados com signal contrario na equação proposta.

Estas progressões serão ambas crescentes si a e b tiverem signaes contrarios, e uma crescente e a outra decrescente, si a e b tiverem o mesmo signal.

Quanto ao numero de soluções inteiras e positivas, assim obtidas, é sempre facil verifical-o.

Suppondo que o termo independente se acha no segundo membro da equação e que a é positivo, já vimos que se b e c forem negativos, ou b negativo e c positivo, o numero daquellas soluções é illimitado; ao contrario, si b e c forem positivos, será sempre limitado e no maximo igual á parte inteira de

$$\frac{c}{ab} + 1,$$

isto é ao maior numero inteiro contido neste quociente, augmentado de uma unidade.

Com effeito, considerando as fórmulas

$$x = \alpha - bt$$

e

$$y = \beta + at,$$

vê-se, na primeira, que x só póde ser positivo quando

$$\alpha > bt$$

ou

$$bt < \alpha,$$

isto é, quando

$$t < \frac{\alpha}{b},$$

sendo t positivo.

Suppondo t negativo, a segunda fórmula nos mostra que y só póde ser positivo quando for

$$\beta > at$$

ou

$$at < \beta,$$

isto é, quando

$$t < \frac{\beta}{a}.$$

Nestas condições a indeterminada t póde variar positivamente de m até 0, chamando m a parte inteira do quociente de

$$\frac{\alpha}{b},$$

e somente póde variar negativamente de 1 até n, chamando n a parte inteira do quociente

$$\frac{\beta}{a}:$$

$$t = m, m-1, m-2 \ldots. 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3 \ldots -$$
$$-(n-1), -n.$$

A totalidade dos valores de t é, pois, $m + n + 1$, que representa por conseguinte, o maior numero de soluções inteiras e positivas da equação

$$ax + by = c$$

Para exprimir este numero por meio de a, b e c, notemos que m representa a parte inteira de

$$\frac{\alpha}{b},$$

e n a parte inteira de

$$\frac{\beta}{a},$$

de sorte que representando por d' a differença

$$\frac{\beta}{a} - n,$$

e por d a differença

$$\frac{\alpha}{b} - m,$$

ter-se-á

$$\frac{\beta}{a} - n = d'$$

e

$$\frac{\alpha}{b} - m = d$$

ou

$$n = \frac{\beta}{a} - d'$$

e

$$m = \frac{\alpha}{b} - d$$

e portanto

$$m + n = \left(\frac{\alpha}{b} + \frac{\beta}{a}\right) - (d + d')$$

ou

$$m + n = \frac{a\alpha + b\beta}{ab} - (d + d')$$

Sendo, porém, por hypothese α e β uma solução da equação, é evidente que

$$a\alpha + bB = c,$$

de sorte que

$$m + n = \frac{c}{ab} - (d + d')$$

Si as relações

$$\frac{\alpha}{b} \text{ e } \frac{\beta}{a}$$

forem equivalentes a dois numeros inteiros, a somma $d + d'$ é nulla; e então

$$m + n = \frac{c}{ab} \text{ e } m + n + 1 = \frac{c}{ab} + 1; \text{ si } \frac{\alpha}{b} \text{ e } \frac{\beta}{a}$$

forem fraccionarias, a somma $d + d'$ sempre positiva, é differente de zero, e, nesta hypothese

$$m + n < \frac{c}{ab} \text{ e } m + n + 1 < \frac{c}{ab} + 1.$$

Ter-se-á, portanto, em todos os casos

$$m + n + 1 \leqq \frac{c}{ab} + 1,$$

o que mostra que *o maior numero inteiro contido em*

$$\frac{c}{ab} + 1$$

é o limite maximo das soluções inteiras e positivas da equação

$$ax + by = c.$$

O numero de soluções inteiras e positivas desta equação, é, pois, limitado, e ellas deixarão mesmo de existir quando os limites de t, isto é

$$\frac{\alpha}{b} \text{ e } \frac{\beta}{a}$$

estiverem comprehendidos entre dois numeros inteiros consecutivos.

Universidade de S. Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

Por exempio, a equação

$$3x + 5y = 7$$

não admitte nenhuma solução inteira e positiva; ao contrario, a equação

$$4x + 7y = 140$$

admitte seis soluções, e a equação

$$7x + 13y = 400$$

offerece 5.

176 — Todas as vezes que os coefficientes da equação proposta permittirem por tentativas o conhecimento de uma primeira solução, é sempre possivel deduzir todas as outras sem ser necessario o emprego das operações normaes exigidas pelo methodo exposto. Basta para isto substituil-a nas fórmulas conhecidas

$$x = \alpha - bt \text{ e } y = \beta + at,$$

ou nas suas congeneres

$$x = \alpha + bt \text{ e } y = \beta - at,$$

o que importa em formar as duas progressões correspontes.

E' sobretudo nos casos seguintes que se póde obter immediatamente uma primeira solução:

1.° Quando o termo independente da incognita é nullo: Neste caso a equação toma a forma

$$ax + by = 0$$

e é claro que fazendo

$$x = o \text{ e } y = 0,$$

ter-se-á uma primeira solução.

Por exemplo, tomando a equação

$$7x - 5y = 0,$$

será um primeiro par de valores das incognitas

$$x = 0 \text{ e } y = 0,$$

sendo os demais fornecidos pelas fórmulas

$$x = + 5t \text{ e } y = + 7t$$

2.º Quando o termo independente é multiplo de qualquer dos coefficientes das incognitas: Neste caso basta suppôr uma destas igual a zero, e igualar a outra ao quociente da divisão do termo constante pelo respectivo coefficiente, para obter um primeiro par de soluções.

Com effeito, a equação

$$ax + by = na$$

deixa vêr immediatamente que

$$x = \frac{an}{a} = n \text{ e } y = 0,$$

visto como a substituição destes valores produz a identidade $an = na$.

Por exemplo, a equação

$$5x - 7y = 20,$$

nos dá immediatamente

$$x = \frac{20}{5} = 4 \text{ e } y = 0,$$

sendo as demais soluções fornecidas pelas fórmulas

$$x = 4 + 7t,\ y = + 5t.$$

3.º Quando se consegue descobrir que o termo independente é divisivel pela somma de dois multiplos dos coefficientes: Neste caso, suppondo que $am + bn$ é um divisor de c na equação

$$ax + by = c,$$

é evidente que representando por q o quociente da divisão de c por $am + bn$, ter-se-á

$$\frac{c}{am + bn} = q \text{ ou } c = amq + bnq;$$

de sorte que a equação pode ser escripta sob a forma

$$ax + by = amq + bnq.$$

Ora, fazendo

$$x = + mq \text{ e } y = + nq,$$

esta equação tornar-se-á identica, e portanto estes valores representam uma de suas soluções. As outras serão dadas pelas fórmulas

$$x = mq - bt \text{ e } y = nq + at$$

Seja, por exemplo, a equação

$$5x + 7y = 31.$$

Comparando o termo constante com os coefficientes das incognitas, vê-se que

$$31 = 5 \times 2 + 7 \times 3,$$

de sorte que $x = 2$ e $y = 3$ representam uma das soluções desta equação. As outras serão dadas pelas fórmulas

$$x = 2 - 7t \text{ e } y = 3 + 5t.$$

Seja ainda a equação

$$11x + 5y = 53$$

Comparando attentamente os coefficientes com o termo constante, vê-se que este equivale á somma de dois multiplos daquelles, visto como

$$53 = 11 \times 3 + 5 \times 4$$

de sorte que $x = 3$ e $y = 4$ representam uma das soluções da proposta.

As outras serão dadas pelas fórmulas

$$x = 3 - 5t \text{ e } y = 4 + 11t$$

4.° Quando se descobre que o termo independente é exactamente divisivel pela differença de dois multiplos dos coefficientes das incognitas: Neste caso, como no precedente, representando por q o quociente da divisão daquelle numero por este, ter-se-á:

$$c = amq - bnq,$$

de sorte que a equação será da forma

$$ax + by = amq - bnq,$$

onde se vê que

$$x = mq \text{ e } y = -nq$$

representam uma de suas soluções.

Seja, por exemplo, a equação

$$11x + 5y = 13$$

Comparando os coefficientes com o termo constante, vê-se que

$$13 = 11 \times 3 + 5 \times (-4),$$

de sorte que

$$x = 3 \text{ e } y = -4$$

representam uma das soluções desta equação.

As outras serão dadas pelas fórmulas.

$$x = 3 - 5t \text{ e } y = -4 + 11t$$

Seja ainda a equação

$$13x - 7y = 50$$

Comparando attentamente o termo constante com os coefficientes, conclue-se que

$$50 = 5 \times 10 = (13 \times 2 - 7 \times 3) \times 10 = 13.2 \times 10 - 7.3 \times 10;$$

de sorte que se obtem uma das soluções desta equação, fazendo

$$x = 2 \times 10 = 20 \text{ e } y = 3 \times 10 = 30.$$

As outras soluções serão dadas pelas fórmulas

$$x = 20 + 7t \text{ e } y = 30 - 13t.$$

5.° Quando o termo constante é igual a ± 1, sendo os coefficientes dois numeros inteiros consecutivos:

Este caso pode ser considerado como resultante do precedente, porque suppondo cada uma das incognitas igual a unidade, positiva ou negativa, o termo constante equivale á differença de dois numeros inteiros consecutivos.

Por exemplo, para a equação

$$7x - 6y = 1,$$

será

$$x = 1 \text{ e } y = 1;$$

para

$$6x - 7y = 1,$$

será

$$x = -1 \text{ e } y = -1$$

Pela mesma razão para

$$7x - 6y = -1,$$

será

$$x = -1 \text{ e } y = +1;$$

para

$$6x - 7y = -1,$$

virá

$$x = +1 \text{ e } y = +1;$$

e porque estas equações se transformam respectivamente em

$$6y - 7x = 1 \text{ e } 7y - 6x = 1,$$

desde que se multiplique ambos os membros por -1, segue-se que estas ultimas comportam as mesmas soluções que as primeiras.

Em condições analogas, poder-se-ão instituir muitos outros casos desta natureza.

Comprehende-se, porém, que nenhuma importancia devem ter por falta de generalidade, sendo além disto de applicação incerta.

Demais o *processo das fracções continuas* de que nos vamos occupar, no paragrapho seguinte, nos fornecerá em todos os casos um meio seguro de obter uma primeira solução desta especie de equações.

§ 26

Continuação do calculo indeterminado do primeiro grau. Methodo baseado no emprego das fracções continuas; instituição desta especie de fracções.

177 — Em vista do que foi dito no paragrapho precedente, é sempre possivel determinar os numeros inteiros que satisfazem a equação $ax + by = c$, desde que se consiga descobrir uma primeira solução desta especie.

As tentativas necessarias a esta descoberta inicial, sendo, porém, incertas na maioria dos casos, procurou-se evital-as pela instituição de um processo geral, que permitta obter sempre uma primeira solução.

Tal é o methodo que vamos estudar, o qual é devido a Lagrange, e se baseia essencialmente na principal propriedade das *fracções continuas*.

Precisamos, pois, apreciar primeiramente esta sorte de fracções, felizmente introduzidas no seculo XVII para aperfeiçoar as transformações numericas.

Parece ter sido lord Brouncker, amigo e compatriota de Wallis, quem primeiro imaginou estas fracções, mas ignora-se como as obteve.

Wallis, na sua *Arithmetica infinitorum*, occupa-se mui ligeiramente deste assumpto, indicando apenas o methodo de reduzir em geral a fracções ordinarias toda sorte de fracções continuas.

Foi Huyghens quem as estudou convenientemente, dando a maneira de formal-as por meio de divisões continuas e demonstrando as suas principaes propriedades e vantagens. Por isto attribue-se-lhe com razão a gloria do invento.

Crê-se ter sido a construcção do seu celebre *planetario automatico* (26 a) que o levou ao estudo especial destas fracções, com as quaes exprimiu sob a fórma mais simples a relação approximada entre a *circumferencia* e o *diametro*.

Outros grandes geometras completaram depois o estudo das *fracções continuas*, destacando-se entre elles Euler nos *Commentarios de S. Petersburgo*, e sobretudo Lagrange nas suas notas e addições á *Algebra de Euler*.

(26 a) Ver nas *Obras posthumas*, de Huyghens, o tratado intitulado *Descriptio automato planetarii*. Este engenhoso apparelho, era destinado a representar os movimentos e os periodos dos nossos planetas. Era preciso empregar rodas (engrenagens), cujo numero de dentes estivesse precisamente na mesma relação que os periodos a representar. Mas como não era possivel augmentar o numero de dentes além de um certo limite dependente da grandeza da roda, e por serem incommensuraveis os periodos dos planetas, não podendo, por conseguinte, serem expressos com certo rigor sinão por numeros muito grandes, foi necessario exprimir taes relações pelos menores numeros possiveis que mais se approximassem da verdade. Huyghens resolveu esta questão por meio das fracções continuas. (LAGRANGE — *Notas a Algebra de Euler*, 2º vol.)

178 — Tem-se uma idéa das fracções continuas apreciando as expressões da fórma:

$$n + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \text{etc.}$$

que é composta de uma série de fracções cujo numerador é a unidade e cujos denominadores são numeros inteiros quaesquer.

A primeira fracção continua conhecida tinha a fórma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{2} + \text{etc.}$$

E foi dada por Brouncker para exprimir a relação approximada entre o quadrado circumscripto e a area do circulo correspondente.

De conformidade com a sua origem, as fracções continuas apresentam-se naturalmente todas as vezes que se trata de exprimir uma grandeza incommensuravel, geometrica ou arithmetica por meio de uma série numerica indefinida.

Com effeito, supponhamos, a principio, que a grandeza é geometrica, uma linha, por exemplo, que se trata de referir a uma outra tomada para *medida*.

Já indicámos na *arithmetica* o engenhoso processo que nos vem de Euclydes para este fim.

Este methodo é muito simples e conduz facilmente ao resultado numerico, mas se póde tornal-o ainda mais sensivel pelas considerações seguintes.

Admittamos neste exemplo que se tenha um certo comprimento, e que se quer medil-o, isto é, saber quantas *medidas* são nelle contidas.

Applicando a *medida* tantas vezes quanto possivel no comprimento dado, obter-se-á um numero, e a operação estará terminada si não houver resto.

Mas suppondo que este existe, é preciso tambem avalial-o:

Si a medida é decomposta em partes iguaes, em dez, por exemplo, é natural que se applique este resto sobre as differe-tes partes da medida, afim de ver quantas destas partes nelle se contem; e assim ter-se-á uma fracção cujo numerador é o numero de partes contidas e cujo denominador é a totalidade das partes em que a *medida* foi dividida.

Mas, em logar de seguir esta marcha ordinaria, supponhamos que a medida ou modulo não se acha dividida, e que se procura entretanto a relação numerica do comprimento a medir ao que serve de medida.

Eis aqui a operação que se apresenta mais naturalmente.

Si após a applicação da *medida* sobre o comprimento dado houver um resto, e como este é menor que a *medida*, é natural que se procure quantas vezes é ahi contido.

Supponhamos duas vezes e que haja ainda um resto.

Referindo este resto ao precedente, é claro que sendo elle necessariamente menor, conter-se-á ahi um certo numero de vezes, como por exemplo, tres vezes, e haverá um resto ou não, e assim por diante.

Considerando todos estes restos, ter-se-á o que se chama uma *fracção continua*:

Assim, si a *medida* se conteve tres vezes no comprimento dado, tem-se a principio o numero 3; si depois se achou que o primeiro resto é contido duas vezes na mesma *medida*, com um outro resto, ter-se-a á fracção

$$\frac{1}{2},$$

isto é, *um* dividido por *dois*: todavia este denominador não está completo, porque para isso seria mister que não deixasse resto.

Mas como este existe, isto dará ainda uma outra fracção semelhante, addicionada a este denominador, que será

$$\frac{1}{3}$$

isto é, *um* dividido por *tres*, porquanto suppomos que este resto se continha tres vezes no precedente; e assim por diante.

Obter-se-á deste modo a fracção

$$3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \text{ e etc. (26 b}$$

Supponhamos agora que a grandeza incommensuravel que se trata de avaliar esteja expressa symbolicamente: seja

$$\sqrt[m]{A} = x$$

Chamemos n o numero inteiro que mais se approxima de x; a differença entre x e n será uma fracção que se póde representar por

$$\frac{1}{y}$$

(26 b) Pode-se ainda proceder de um outro modo.

Retomando o exemplo acima e depois de haver verificado que a *medida* se contém tres vezes no comprimento com um resto 2, em lugar de referir o segundo resto ao precedente, conforme fizemos, pode-se ainda referil-o a propria *medida*.

Assim supponhamos que elle ahi se contém sete vezes com um resto; referir-se-á ainda este resto a mesma medida e assim por diante até que se chegue, se for possivel, a um resto que seja uma parte aliquota da medida, o que terminará a operação; de outro modo, poderá ella prolongar-se indefinidamente, si o comprimento e a medida forem incommensuraveis, ter-se-ia então, para expressão do comprimento medido, a serie:

$$3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 7} + \text{etc.}$$

Teremos, portanto:

$$x - n = \frac{1}{y}$$

Si procurarmos do mesmo modo o numero inteiro a que mais se approxima de y, $y - a$ poderá ser representado por

$$\frac{1}{z}$$

e virá

$$y - a = \frac{1}{z}$$

Continuando do mesmo modo, teremos

$$z - b = \frac{1}{u}\ ,\ u - c = \frac{1}{v}\ ,\ \text{e etc.}$$

Das relações precedentes se deduz:

$$x = n + \frac{1}{y}\ ,\ y = a + \frac{1}{z}\ ,\ z = b + \frac{1}{u}$$

$$u = c + \frac{1}{v}\ ,\ \text{e etc.}$$

donde se chega por substituições successivas *á fracção continua*

$$x = \sqrt[m]{A} = n + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \text{etc}$$

179 — Havendo entre as quantidades $y, z, u, v\ldots$ uma qualquer que seja expressa por numero inteiro, é visivel que o desenvolvimento será limitado, e isto dar-se-á todas as vezes que x for um numero commensuravel.

Afim de mostral-o, seja dado um numero fraccionario

$$\frac{A}{B}$$

para transformar em fracção continua.

Chamando q o quociente de A por B e R o resto, teremos

$$\frac{A}{B} = q + \frac{R}{B};$$

mas dividindo ambos os termos de

$$\frac{R}{B}$$

pelo proprio numerador R, ter-se-á

$$\frac{A}{B} = q + \frac{1}{\left(\frac{B}{R}\right)}$$

Da mesma sorte achar-se-á

$$\frac{B}{R} = q' + \frac{R'}{R} = q' + \frac{1}{\left(\frac{R}{R'}\right)};$$

$$\frac{R'}{R} = q'' + \frac{R''}{R'} = q'' + \frac{1}{\left(\frac{R'}{R''}\right)}$$

e assim por diante.

De modo que

$$\frac{A}{B} = q + \frac{1}{q'} + \frac{1}{q''} + \frac{1}{q'''} + \frac{1}{q''''} + \ldots.$$

Vê-se, pois, que *para converter uma fracção ordinaria em fracção continua basta operar sobre os dois termos da fracção como si se tratasse de achar o seu maior divisor commum: aos quocientes q', q'', q''', q'''', etc, dá-se por numerador a unidade, e com as fracções assim formadas se compõe a fracção continua.*

Por isso que o processo da determinação do maior divisor commum conduz sempre ao resto zero, e portanto, á um quociente inteiro, conclue-se que toda a *quantidade commensuravel pode ser expressa por uma fracção continua limitada.*

Reciprocamente, *uma fracção continua limitada é a expressão de uma quantidade commensuravel*, visto que o seu valor pode ser exactamente expresso por uma fracção ordinaria, desde que se effectuem as operações indicadas.

Daqui se deduz que uma *quantidade incommensuravel dá origem a uma fracção continua que se prolonga indefinadamente*.

Supponhamos, por exemplo,

$$\sqrt{7}$$

a quantidade incommensuravel que se trata de transformar em fracção continua.

Po er

$$\sqrt{7} > 2 \text{ e } \sqrt{7} < 3,$$

segue-se que

$$\sqrt{7}$$

é igual a 2 e uma fracção que representaremos por

$$\frac{1}{x}$$

logo

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{x}$$

donde

$$\frac{1}{x} = \sqrt{7} - 2$$

e

$$x = \frac{1}{\sqrt{7} - 2}$$

Multiplicando ambos os termos desta fracção pela somma

$$\sqrt{7} + 2,$$

e reduzindo em seguida, virá

$$x = \frac{\sqrt{7}+2}{3} .$$

Portanto, fica x comprehendido entre

$$\frac{4}{3} \text{ e } \frac{5}{3} ,$$

ou entre *1* e *2*; podemos então escrever

$$x = 1 + \frac{1}{y} \text{ ou } \frac{\sqrt{7}+2}{3} = 1 + \frac{1}{y}$$

donde se tira

$$\frac{1}{y} = \frac{\sqrt{7}-1}{3} ,$$

e

$$y = \frac{3}{\sqrt{7}-1} .$$

Multiplicando ambos os termos desta fracção pela somma

$$\sqrt{7}+1$$

virá

$$y = \frac{3(\sqrt{7}+1)}{6} = \frac{\sqrt{7}+1}{2}$$

assim y se acha comprehendido entre

$$\frac{3}{2}$$

e *2*, ou entre *1* e *2*, de modo que teremos

$$y = 1 + \frac{1}{z} ,$$

ou

$$\frac{\sqrt{7}+1}{2} = 1 + \frac{1}{z}$$

donde

$$\frac{1}{z} = -1 + \frac{\sqrt{7}+1}{2}$$

e

$$z = \frac{2}{\sqrt{7}-1}$$

Multiplicando ambos os termos pela somma

$$\sqrt{7}+1 \ ,$$

virá

$$z = 2\left[\frac{\sqrt{7}+1}{6}\right] = \frac{\sqrt{7}+1}{3} \ ,$$

onde se vê que z acha-se comprehendido entre

$$\frac{3}{3} \text{ e } \frac{4}{3}$$

ou entre 1 e 2; logo

$$z = 1 + \frac{1}{u} \ ,$$

ou

$$\frac{\sqrt{7}+1}{3} = 1 + \frac{1}{u} \ ,$$

donde

$$\frac{1}{u} = \frac{\sqrt{7}-2}{3} \ ,$$

e

$$u = \frac{3}{\sqrt{7}-2}$$

Multiplicando ambos os termos desta fracção pela somma

$$\sqrt{7}+2,$$

virá

$$u = 3\left[\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right] = \sqrt{7}+2 \ ,$$

temos, pois,

$$u > 4 \text{ e } u < 5,$$

logo

$$u = 4 + \frac{1}{v} \ ,$$

ou

$$\sqrt{7}+2 = 4 + \frac{1}{v} \ .$$

Portanto,

$$\frac{1}{v} = \sqrt{7} - 2$$

e

$$v = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$$

Vê-se que o valor de v é igual ao já obtido para x, e por conseguinte *a fracção prolonga-se indefinidamente e é periodica*.

Por substituições successivas acharemos finalmente :

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{y} = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{z} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{u} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{v} + \text{etc.}$$

Para qualquer outra raiz quadrada incommensuravel, chegar-se-ia do mesmo modo a uma fracção continua periodica.

A periodicidade mais ou menos complexa, que neste caso adquirem afinal as fracções integrantes do desenvolvimento, passa geralmente despercebida.

Porque de ordinario, são os numeros incommensuraveis representados approximadamente por numeros commensuraveis fraccionarios, cujo desenvolvimento em fracção continua nem sempre deixa perceber a periodicidade.

Quando o numero incommensuravel é expresso approximadamente sob esta forma, e se quer obter com mais exactidão a fracção continua que lhe corresponde, basta proceder do modo seguinte:

Tomam-se duas fracções approximadas do numero incommensuravel, uma com erro para menos e outra com erro para mais, e transformam-se em fracções continuas.

Ficando o verdadeiro valor da fracção comprehendido entre os dois desenvolvimentos obtidos, as fracções integrantes communs lhe pertencem.

Tomemos, por exemplo, o numero incommensuravel π que exprime a relação entre uma circumferencia qualquer e o seu diametro.

Adoptando o valor approximado obtido por Viète, *3,1415926* e augmentando o ultimo algarismo de uma unidade, será

$$3,\ 1415926 < \pi > 3,\ 1415927.$$

O verdadeiro valor da relação acha-se, pois, comprehendido entre estas duas fracções decimaes.

Pondo-as sob a fórma de fracções ordinarias e applicando-lhes o processo do maior divisor commum para desenvolvel-as em fracções continuas, vê-se que os quocientes

$$3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 7,\ 1$$

são communs ás duas fracções continuas, e portanto fazem parte do desenvolvimento procurado; de sorte que

$$\pi = \frac{3}{1} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{7} + \frac{1}{1} + \text{etc.}$$

Tal foi a fracção continua obtida por Huyghens para exprimir o numero π.

180 — Afim de apreciar as vantagens do emprego das fracções continuas supponhamos que se tenha obtido o desenvolvimento de

$$\frac{A}{B},$$

isto é,

$$\frac{A}{B} = a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$$

onde os numeros inteiros a, b, c, d e e representam os quocientes obtidos pelo processo do maior divisor commum, sendo aqui chamados *quocientes incompletos*, porquanto cada um delles deve ser addicionado a todas as *fracções integrantes* seguintes, para tornar-se um *quociente completo* da divisão respectiva.

E' a principio evidente que a representa uma primeira approximação de

$$\frac{A}{B},$$

menor porém do que esta fracção.

Si em lugar de a, tomarmos

$$a + \frac{1}{b}$$

teremos um valor mais approximado de

$$\frac{A}{B}.$$

Universidade de S. Pau
Matemática

E, como se disprezaram neste caso as fracções integrantes seguintes, que fazem parte do denominador de

$$\frac{1}{b},$$

é claro que esta fracção augmenta e que por conseguinte

$$a + \frac{1}{b}$$

representa um valor maior do que a fracção proposta.

Si em lugar delle tomarmos

$$a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

é obvio que teremos um valor ainda mais approximado da fracção proposta.

Todavia é facil de ver-se que, ao contrario da precedente, esta approximação é menor do que

$$\frac{A}{B}$$

Porque tendo-se desprezado as outras integrantes que fazem parte do denominador de

$$\frac{1}{c},$$

diminue-se este denominador, e portanto augmenta-se o valor de

$$\frac{1}{c}$$

o que importa em diminuir o valor de

$$a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c};$$

por conseguinte esta approximação é menor do que a fracção dada.

Si tomarmos

$$a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{}{d}$$

para exprimir

$$\frac{A}{B},$$

teremos um valor mais approximado que os precedentes.

Mas esta approximação excede a

$$\frac{A}{B}$$

porque, tendo-se desprezado

$$\frac{1}{e}$$

que faz parte do denominador da integrante precedente, diminue-se este denominador, e por conseguinte se augmenta a fracção a que pertence.

Emfim, tomando-se

$$a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$$

ter-se-á evidentemente um valor igual á fracção proposta.

Vê-se, portanto, que é sempre possivel substituir um numero fraccionario, cujos termos são muito consideraveis, por uma serie de outras fracções mais simples, cujos valores se approximam successivamente da proposta, sendo ora menores, ora maiores do que ella.

As approximabões successivas

$$a,\ a + \frac{1}{b},\ a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},\ a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d},$$

$$a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$$

a que fica reduzida a fracção proposta quando se desprezam as integrantes seguintes, são chamadas *reduzidas* desta fracção.

Obtida a primeira reduzida, podem-se determinar todas as outras sem ser necessario effectuar directamenta as operações indicadas.

Para mostral-o calculemos os valores destas reduzi- successivas

1.ª reduzida $a = \frac{a}{1}$,

2.ª » $a + \frac{1}{b} = \frac{ab + 1}{b}$,

3.ª » $a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{c(ab + 1) + a}{bc + 1}$,

4.ª » $a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} =$

$$= \frac{d(abc + ca) + ab + 1}{d(bc + 1) + b}$$

Comparando estas tres reduzidas consecutivas conclue-se que *formada uma reduzida, obtem-se a seguinte multiplicando ambos os termos daquella pelo seguinte quociente incompleto, e ajuntando aos productos respectivamente os termos da reduzida precedente.*

Tomemos, por exemplo, a fracção

$$\frac{1.205}{343};$$

pelo processo do maior divisor commum achamos a serie de quocientes *3, 1, 1, 18, 1, 1, 4.*

Teremos, pois,

$$\frac{1.205}{343} = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{18} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}$$

Formando as reduzidas pela regra precedente, obteremos

$$\frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{130}{37},\ \frac{137}{39},\ \frac{267}{76},\ \frac{1.205}{343}$$

Tomemos ainda, para exemplo, a fracção

$$\frac{169}{472} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5}$$

As reduzidas serão

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{11},\ \frac{5}{14},\ \frac{24}{67},\ \frac{29}{8} \text{ e } \frac{169}{472}$$

181 — LEI DE SUCCESSÃO DAS REDUZIDAS.— Supponhamos a principio que na fracção

$$\frac{A}{B} \text{ é } A > B.$$

Desenvolvendo a em fracção continua, obteremos

$$\frac{A}{B} = a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \text{ etc.}$$

Formando as reduzidas consecutivas e comparando-as com a fracção proposta, é facil de vêr:

1.° *As reduzidas de ordem impar são menores que a fracção dada;*

2.° *As reduzidas de ordem par são maiores do que ella.*

1.° Com effeito, fazendo

$$k = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \text{ etc.}$$

temos para a fracção continua dada

$$\frac{A}{B} = a + k;$$

ora, sendo evidentemente

$$a < a + k,$$

segue-se que a primeira reduzida

$$\frac{a}{1} < \frac{A}{B}$$

Seja ainda

$$k' = \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \text{ etc.}$$

a fracção continua ficará

$$\frac{A}{B} = a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + k'$$

Porém temos

$$c < c + k',$$

logo

$$\frac{1}{c} > \frac{1}{c + k'}$$

e tambem

$$b + \frac{1}{c} > b + \frac{1}{c + k'},;$$

portanto

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + k'$$

isto é, a terceira reduzida é menor que a fracção dada; sendo facil deduzir que o mesmo acontece para todas as outras reduzidas de ordem impar.

2.° Fazendo

$$m = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \text{etc},$$

conclue-se que

$$\frac{A}{B} = a + \frac{1}{b} + m\ ;$$

ora, sendo evidentemente

$$b < b + m,$$

será

$$\frac{1}{b} > a + \frac{1}{b} + m;$$

e

$$a + \frac{1}{b} > a + \frac{1}{b} + m$$

ou a segunda reduzida maior que a fracção proposta

$$\frac{A}{B}$$

Demonstrar-se-ia de modo analogo que a quarta reduzida é maior que

$$\frac{A}{B}$$

assim como as demais reduzidas pares.

Si a fracção proposta

$$\frac{A}{B}$$

for *propria*, isto é, si $A < B$, dar-se-á evidentemente o contrario:

As reduzidas de ordem impar serão neste caso sempre maiores que a fracção dada, e as reduzidas de ordem par serão menores.

Comprehende-se com effeito, que assim deve ser, porque neste caso não existe o quociente inteiro a, de sorte que a primeira reduzida será

$$\frac{1}{b},$$

evidentemente maior que a fracção dada, visto como desprezamos uma parte do seu denominador.

Desde então, as reduzidas que eram impares no caso precedente passam agora a ser pares e vice-versa.

Emfim, tanto num caso como no outro, a ultima reduzida é sempre igual á fracção proposta, e as demais crescerão approximando-se della, conforme a ordem a que pertencem.

Si a fracção continua resultar de uma quantidade incommensuravel, o numero de suas *integrantes*, sendo illimitado, sel-o-á tambem o de suas *reduzidas*.

Como, porém, dentre estas umas são maiores e outras menores que a quantidade considerada, é evidente que podemos comprehendel-a entre duas series de fracções que convergem para ella indefinidamente, umas crescendo e outras decrescendo.

A quantidade considerada é pois um *limite* para o qual convergem as duas series de *reduzidas*.

182 — Em consequencia das leis citadas precedentemente, é sempre possivel substituir-se uma quantidade incommensuravel, ou um numero fraccionario por uma fracção ordinaria de termos os mais simples que represente com muita approximação os valores daquellas grandezas.

Nisto reside sobretudo as vantagens do emprego das fracções continuas sob o ponto de vista arithmetico.

Mas veremos em breve que sob o ponto vista algebrico ellas facilitam tambem as transformações numericas, permittindo simplificar o calculo dos numeros indeterminados.

Para comprehender o alcance destas affirmações, basta examinar as principaes propriedades que decorrem das leis acima citadas.

Estas propriedades são :

1ª. *O valor de uma fracção continua fica sempre comprehendido entre duas reduzidas consecutivas, uma de ordem par, outra de ordem impar.*

2ª. *A differença entre duas reduzidas consecutivas é igual a uma fracção que tem para numerador a unidade e para denominador o producto dos denominadores das duas reduzidas.*

Destas propriedades conclue-se immediatamente :

1º, que uma reduzida é mais approximada da fracção continua que qualquer das reduzidas antecedentes;

2º, que o erro commettido tomando uma reduzida como valor approximado da fracção proposta, é sempre menor do que a unidade dividida pelo producto dos denominadores desta reduzida e do da seguinte.

Para verificação, tome-se por exemplo a segunda reduzida acima obtida.

Sabemos que o valor da fracção

$$\frac{A}{B}$$

é comprehendido entre a segunda e a terceira reduzida :

$$\frac{ba+1}{b} > \frac{A}{B} > \frac{c(ab+1)+a}{bc+1}$$

Chamando ε o erro commettido, temos, pois,

$$\varepsilon < \frac{ba+}{b} - \frac{c(ab+1)+a}{bc+1}$$

$$\varepsilon < \frac{(ba+1)(bc+1) - cb(ab+1) - ab}{b(bc+1)}$$

$$\varepsilon < \frac{babc+bc+ba+1-cb.\ ab-cb-ab}{b(bc+1)}$$

$$\varepsilon < \frac{1}{b(bc+1)}$$

Para dar um exemplo da applicação arithmetica destas propriedades, supponhamos que se procura determinar dentre as fracções cujo denominador tem dois algarismos, qual aquella que mais se approxima de

$$\frac{4573}{2195}$$

Teremos

$$\frac{4573}{2195} = 2 + \frac{183}{2195} = 2 + \frac{1}{\left(\frac{2195}{183}\right)} = 2 + \frac{1}{11} + \frac{182}{183} =$$

$$= 2 + \frac{1}{11} + \frac{1}{\left(\frac{183}{182}\right)} = 2 + \frac{1}{11} + \frac{1}{1} + \frac{1}{182}$$

Formando as reduzidas successivas, afim de descobrir a fracção procurada, virá

1ª reduzida

$$\frac{2}{1}$$

2ª reduzida

$$2 + \frac{1}{11} = \frac{23}{11} \ ;$$

3ª reduzida

$$2 + \frac{1}{11} + \frac{1}{1} = \frac{25}{12} \ ;$$

4ª reduzida

$$2 + \frac{1}{11} + \frac{1}{1} + \frac{1}{182} = \frac{4573}{2195}$$

A fracção pedida é, pois,

$$\frac{25}{12}$$

e o erro commettido é menor que

$$\frac{1}{12 \times 2195} \text{ ou } \frac{1}{25340}$$

Supponhamos ainda que se deseja conhecer o erro commettido, adoptando o valor approximado de π, dado por Archimedes, isto é

$$\frac{22}{7}.$$

Já obtivemos a fracção continua correspondente a π (179): formando as reduzidas successivas, virá

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{2818}{897} \ldots \qquad (26\ c)$$

Tomando

$$\frac{22}{7}$$

para valor approximado de π, o erro commettido será, portanto, menor do que

$$\frac{1}{7.106}, \text{ ou } \frac{1}{742}$$

(26 c) Pode-se tambem exprimir o valor de π pela serie

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7 \times 112} + \frac{1}{7 \times 112 \times 116} -$$

$$- \frac{1}{7 \times 112 \times 116 \times 386} + \text{etc}$$

Esta serie é obtida directamente pelo processo que indicamos na nota (26 b).

Para isto basta, depois da primeira divisão indicada pela fracção ordinaria correspondente a π, tomar sempre o seu denominador para dividendo, empregando successivamente como divisor os restos assim obtidos.

Como as fracções parciaes que compõem esta serie decrescem rapidamente, ter-se-á, reunindo-as successivamente as fracções simples

$$\frac{22}{7}, \frac{2463}{784}$$

e etc. que se approximarão cada vez mais do valor de π: o erro commettido será sempre inferior a primeira das fracções parciaes despresadas, a qual é menor, pois como é facil de vêr, do que a differença entre duas reduzidas consecutivas.

Adriano Martius encontrou para o valor de π a fracção

$$\frac{355}{113},$$

que é expressa pela quarta reduzida: o erro commettido é aqui menor do que

$$\frac{1}{113 \times 897}.$$

183—SOLUÇÕES INTEIRAS DA EQUAÇÃO "AX + BY — C", OBTIDAS COM O EMPREGO DAS FRACÇÕES CONTINUAS — A mais importante applicação das fracções continuas na algebra ordinaria, consiste em utilisar a sua propriedade principal para conhecer uma primeira solução inteira desta equação indeterminada, afim de obter todas as outras por meio das fórmulas citadas.

Este segundo methodo de resolução é devido a Lagrange e lhe foi suggerido por um outro mais particular devido a Bachèt de Meziriac.

Para comprehendel-o, consideremos a equação

$$ax + by = c, \qquad (1)$$

suppondo ainda que a,b e c são primos entre si.

Desenvolvendo

$$\frac{a}{b}$$

em fracção continua, já sabemos que á ultima reduzida é a propria fracção

$$\frac{a}{b}$$

Representando a penultima por

$$\frac{m}{n}$$

sabemos tambem que

$$\frac{a}{b} - \frac{m}{n} = \frac{na - mb}{bn} = \frac{\pm 1}{bn},$$

sendo positivo ou negativo o signal do segundo membro, quando

$$\frac{q}{b}$$

for maior ou menor que

$$\frac{m}{n},$$

isto é, conforme a ordem desta reduzida. (182).

Desta ultima igualdade deduz-se que

$$na - mb = \pm 1 \qquad (2)$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por c, e suppondo a principio que o segundo é positivo, teremos

$$anc - bmc = c$$

A comparação desta igualdade com a equação proposta (1) nos deixa ver immediatamente que serão identicas si fizermos

$$x = nc \text{ e } y = mc.$$

Portanto estes valores constituem uma solução da equação dada, e desde logo permittirão obter todas as outras empregando as fórmulas conhecidas.

Si a reduzida

$$\frac{m}{n}$$

for de ordem tal que o segundo membro da igualdade (2) seja negativo, teremos

$$anc - bmc = -c \text{ ou } bmc - anc = c$$

Comparando esta igualdade com a equação proposta, vê-se que neste caso será ella satisfeita si fizermos

$$x = -nc \text{ e } y = me;$$

e, obtida esta primeira solução, determinar-se-ão todas as outras pelas fórmulas de Lagrange, isto é,

$$x = \alpha - bt \text{ e } y = \beta + at \text{ ou } x = \alpha + bt \text{ e } y = \beta - at$$

Tomemos para exemplo a equação

$$39x - 56y = 11$$

Desenvolvendo

$$\frac{56}{39}$$

em fracção continua, virá

$$\frac{56}{39} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Formando as reduzidas, obtemos

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{23}{16}, \frac{56}{39}$$

Sendo a penultima reduzida de ordem par, e portanto, maior que a fracção considerada, será

$$\frac{23}{16} - \frac{56}{39} = \frac{1}{16 \times 39}$$

donde

$$23 \times 39 - 56 \times 16 = 1.$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por *11*, segundo membro da equação proposta, temos ainda

$$39 \times 23.11 - 56 \times 16.11 = 11$$

Comparando esta igualdade com a equação proposta, vê-se immediatamente que será ella satisfeita, fazendo;

$$x = 23.11 \text{ e } y = 16.11;$$

onde se vê que *esta solução póde ser obtida multiplicando respectivamente o segundo membro da equação dada pelos termos da penultima reduzida encontrada.*

As outras soluções serão desde logo conhecidas, fazendo

$$x = 23.11 + 56t \text{ e } y = 16.11 + 39t$$

Seja ainda a equação já considerada,

$$17x - 49y = -8$$

Convertendo

$$\frac{49}{17}$$

em fracção continua, e formando em seguida as reduzidas successivas, obteremos:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{23}{8}, \frac{49}{17},$$

Como

$$\frac{23}{8} - \frac{49}{17} = \frac{-1}{8 \times 17};$$

segue-se que

$$17 \times 23 - 49 \times 8 = -1;$$

multiplicaddo ambos os membros desta igualdade por 8, isto é, pelo segundo membro da equação proposta, virá

$$17 \times 23.\ 8 - 49 \times 8.\ 8 = -8$$

Comparando esta igualdade com a equação proposta, conclue-se immediatamente que

$$x = 23.\ 8 \text{ e } y = 8.\ 8$$

onde se vê que *para obter estas soluções é bastante multiplicar respectivamente cada termo da penultima reduzida pelo segundo membro da equação tomado em valor absoluto.*

Para determinar outras soluções, iaremos, pois,

$$x = 184 + 49t \text{ e } y = 64 + 17t$$

Seja emfim a equação

$$29x + 17y = 250$$

A relação

$$\frac{29}{17},$$

convertida em fracção continua, dá as reduzidas successivas

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7}, \frac{29}{17},$$

donde resulta a igualdade

$$29 \times 7 - 17 \times 12 = -1.$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade pelo segundo membro da equação proposta, tomada com signal contrario, virá

$$29 \times 7. \ (-250) - 17 \times 12. \ (-250) = 250$$

ou

$$29. \ (-7 \times 250) - 17. \ (-12 \times 250) = 250$$

Como a equação proposta pode tomar a forma

$$29 \times x - 17 \times (-y) = 250,$$

conclue-se immediatamente que

$$x = -7 \times 250 \text{ e } -y = -12 \times 250$$

formam a solução procurada. (26d)

(26 d) Bourdon — *Eléments d'algèbre.* 8ª ed. 1837.

Vê-se, pois, que *para obtel-a é bastante multiplicar ambos os termos da penultima reduzida pelo segundo membro da equação, tomado porém com signal contrario.*

Para conhecer as outras soluções faremos, pois,

$$x = -1750 + 17t \text{ e } y = 3000 - 29t,$$

onde é facil de vêr que ha uma unica solução positiva, correspondente a

$$t = 103,$$

sto é

$$x = 1 \text{ e } y = 13$$

Tal é o methodo para resolver em numeros inteiros a quação

$$ax + by = c$$

or meio das fracções *continuas*.

Comparando-o com o outro, vê-se que exige uma serie de avaliações identicas, pois que as operações numericas necessarias ao desenvolvimento de uma fracção continua são as mesmas empregadas para obter o maior divisor commum.

Mas não só estas operações são aqui mais seguidas e breves, como tambem permittem evitar a phase algebrica da introducção e eliminação das incognitas auxiliares, aqui substituidas mais simplesmente pela formação das reduzidas successivas.

Este segundo methodo deve, pois, ser preferido ao primeiro porque apesar de sua inferioridade logica lhe é superior pela sua extrema simplicidade. (26 e)

(26 e) O primeiro é um methodo directo, aborda a questão de um modo mais racional, substituindo por uma serie de transformações successivas a equação dada por formações das variaveis que traduzem a lei que subordina as soluções procuradas; e o segundo é um methodo indirecto, e só nos dá uma solução da

§ 27

Continuação do calculo indeterminado. Diversos graus de indeterminação: sua reducção ao caso fundamental. Problemas e exemplos. Applicação a regra da mistura ou liga

184 — Já sabemos que o calculo indeterminado de que nos occupamos offerece diversos graus de indeterminação, sempre medidos pelo excesso do numero das incognitas sobre o das equações, comportando cada um diversos casos, conforme a multiplicidade das relações consideradas. Mas todos estes casos podem e devem ser successivamente reduzidos ao mais simples dentre elles, representado, como vimos, por uma só equação entre duas incognitas. Para fazer similhante reducção pouco importa de que maneira sejam obtidas as fórmulas das soluções inteiras desta equação.

A complexidade do calculo apenas depende do numero de equações consideradas, porque exige successivamente outras tantas applicações do processo fundamental.

Apreciemos seguidamente estes diversos casos, começando pelo que se refere ainda ao primeiro grau de indeterminação, representado, porém, por duas equações a tres incognitas.

185 — Um systema de duas equações a tres incognitas, pode sempre como vimos, ser expresso sob a forma

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

em que supporemos a, b e c, bem como a', b' e c' numeros primos entre si e respectivamente primos com d e d'.

---

equação primitiva, sendo as outras fornecidas pelas fórmulas especiaes que os valores obtidos fazem surgir inductivamente pelo primeiro methodo, e que este deixa tambem conceber deductivamente. (Moraes Rêgo. — *Elementos de Algebra.*)

Para reduzir este caso ao fundamental começa-se por eliminar uma das incognitas entre as duas equações

A equação resultante a duas incognitas permittirá desde logo a applicação de qualquer dos dois methodos indicados para obtel-as.

Substituindo as fórmulas achadas em qualquer das equações propostas, ter-se-á finalmente a expressão da terceira incognita.

Obteremos por este modo as expressões das tres incognitas em formação de uma indeterminada, cujos valores inteiros farão conhecer os procurados.

Com effeito, assim procedendo, teremos para a primeira equação

$$ax + by = d - cz.$$

donde

$$x = \frac{d - cz - by}{a};$$

substituindo esta fórmula na segunda equação, virá

$$a.' \frac{d - cz - by}{a} + b'y + c'z = d'$$

ou

$$a' (d - cz - by) + ab'y + ac'z = ad'$$

ou

$$a'd - a'cz - a'by + ab'y + ac'z = ad'$$

ou ainda

$$(ab' - ba')y + (ac' - ca')z = ad' - da'$$

Representando respectivamente por A e B os coefficientes das incognitas y e z é por C o termo independente, vê-se que esta ultima equação toma a forma

$$Ay + Bz = C$$

Podemos, pois, resolvel-a em numeros inteiros pelas fórmulas conhecidas

$$y = \alpha - Bt \text{ e } z = \beta + At.$$

Substituindo estas expressões na de x acima obtida, ficará finalmente esta incognita traduzida em numeros inteiros por meio da indeterminada t.

Attribuindo a esta todos os valores inteiros, positivos ou negativos, a partir de zero, obteremos todos os valores inteiros de x, de y e de z.

Tomemos, por exemplo, as equações

$$6x + 7y + 4z = 122$$
$$11x + 8y - 6z = 145$$

Para eliminar z entre estas duas equações, multipliquemos a primeira por 3 e a segunda por 2, e addicionemos em seguida os resultados, membro a membro; virá

$$40x + 37y = 656$$

Applicando a esta equação qualquer dos dois methodos estudados, obteremos

$$x = 37t + 9 \text{ e } y = 8 - 40t.$$

Substituindo estas expressões na primeira das equações propostas, teremos, após as reducções convenientes:

$$2z - 29t = 6$$

Applicando ainda a esta equação um dos methodos fundamentaes, obteremos

$$t = 2t' \text{ e } z = 29t' + 3;$$

substituindo t por $2t'$ nas fórmulas de x e de y, virá finalmente

$$x = 74t' + 9,\ y = 8 - 80t'$$

que, sendo combinadas com

$$z = 29t' + 3,$$

nos darão todos os valores inteiros que satisfazem as equações propostas.

Para obter os positivos será preciso suppôr $t' = 0$, o que dará

$$x = 9, y = 8, z = 3;$$

de sorte que este systema é o unico que convem ás equações propostas.

186 — Póde acontecer que a indeterminação do primeiro grau resulte de outros systemas de equações, como por exemplo, de tres equações a quatro incognitas, de quatro equações a cinco incognitas, de cinco equações a seis incognitas e assim por diante.

Mas nada impede de instituir do mesmo modo que precedentemente a reducção de cada grupo de equações ao precedente, de maneira a formular as soluções inteiras de todos estes systemas.

Todavia o calculo vai ficando cada vez mais laborioso e se complicando de tal sorte que se torna afinal inextricavel.

Si a indeterminação for superior ao primeiro grau, póde-se tambem reduzil-a ao methodo elementar por intermedio do caso precedente.

Para isto basta fundir com o membro constante da equação todos os termos que devem ficar arbitrarios para que sua solução possa recair no caso immediatamente mais simples.

Supponhamos, por exemplo, que se considera a equação.

$$ax + by + cz = d$$

em que a indeterminação é do segundo grau.

Afim de reduzil-a ao primeiro, faremos

$$ax + by = d - cz.$$

Suppondo $d - cz$ conhecido, e representando por uma indeterminada c', teremos

$$ax + by = c'$$

A questão fica assim reduzida ao primeiro grau de indeterminação. Porque, resolvendo a equação

$$ax + by = c',$$

obteremos as fórmulas

$$x = \alpha - bt$$

e

$$y = \beta + at$$

onde α e β são formações de c', isto é, de d, bem como de z e de uma incognita auxiliar t', que são fornecidas do mesmo modo pela equação

$$d - cz = c'.$$

Resolvida esta e substituindo os valores obtidos nas fórmulas de x e y, eliminar-se-á t e desde então bastará attribuir a t' e z todos os valores possiveis em numeros inteiros, para obter os valores correspondentes de x e de y.

Extendida gradualmente aos systemas de duas, tres.... equações, a quatro, cinco.... incognitas, a marcha adoptada até aqui nos leva a reconhecer a completa sufficiencia do calculo assim concebido, desde que os coefficientes das incognitas sejam todos particularisados.

Elaboradas deste modo, as equações propostas poderão sempre ser substituidas por uma unica, tendo a unidade para menor coefficiente e capaz de reproduzir as primeiras, mediante a eliminação das incognitas auxiliares, salvo a que fica finalmente arbitraria.

187 — Indica-se como typo especial das questões sobre o calculo indeterminado um problema que já se

tornou classico, e que offerece a vantagem de apresentar todos os casos de indeterminação quando é successivamente modificado.

Consiste em determinar de quantas maneiras se póde effectuar o pagamento de uma certa quantia, empregando moedas de diversos valores.

Reduzindo-o á sua maior simplicidade, póde ser expresso na seguinte questão:

De quantas maneiras distinctas se póde pagar 78 francos com moedas de cinco francos e de tres francos, sem nenhuma outra moeda?

Para resolvel-a, chamemos x o numero de moedas de cinco francos, e y o de moedas de tres francos; é evidente que, as soluções pedidas serão dadas pela equação

$$5x + 3y = 78,$$

quando resolvida em numeros inteiros e positivos.

Obter-se-á

$$x = 3t \text{ e } y = 26 - 5t$$

Estas duas fórmulas nos mostram que t deve ser positivo e náó póde exceder a

$$\frac{26}{5} \text{ ou } 5\ \frac{1}{5}$$

Fazendo, pois,

$$t = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

resulta

$$x = 0, 3, 6, 9, 12, 15$$

e

$$y = 26, 21, 16, 11, 6, 1.$$

Assim, o pagamento póde ser realizado de seis modos differentes, a saber: com 26 moedas de tres francos, sem nenhuma moeda de cinco francos; com 21 moedas de tres francos e tres de cinco francos; com 16 moedas de tres francos e seis de cinco francos; e assim por diante.

Este problema póde ser complicado successivamente de maneira a offerecer todos os casos de indeterminação.

Basta para isto que se proponha o pagamento simultaneo de muitas quantias com um numero qualquer de moedas differentes.

Seja, por exemplo, resolver a questão seguinte:

Um cambista deseja liquidar o seu negocio pagando simultaneamente aos dois ultimos credores que lhe restam 272 francos a um e 656 ao outro: Só possuindo moedas extrangeiras de diversos valores, precisa effectuar aquelles pagamentos com moedas de ouro, prata e nickel, as primeiras no valor de cinco e oito francos, as segundas de quatro e nove francos e as terceiras de um a tres francos; pergunta-se de quantas maneiras póde elle effectuar a transação.

Para resolver este problema, representemos por x, y e z os numeros de moedas de ouro, prata e nickel de ambas as especies.

Teremos as duas equações

$$\begin{cases} 5x + 4y + z = 272 \\ 8x + 9y + 3z = 656 \end{cases}$$

Eliminando z entre ambas, virá

$$7x + 3y = 160$$

Applicando a esta equação qualquer dos dois methodos indicados para resolvel-a, obteremos as fórmulas

$$x = 1 - 3t \text{ e } y = 51 + 7t$$

Substituindo estas duas fórmulas na mais simples das equações propostas (1ª), teremos

$$5(1 - 3t) + 4(51 + 7t) + z = 272,$$

ou reduzindo e resolvendo

$$z = 63 - 13t.$$

As tres incognitas acham-se, pois, expressas em formações inteiras da indeterminada t.

Assim, dando a t valores inteiros quaesquer, obter-se-ão os valores semelhantes para x, y e z, e estes valores satisfarão ás duas equações propostas.

A constituição das fórmulas nos mostra que para serem positivos todos os valores das incognitas é preciso que t não seja positivo, do contrario seria x negativo.

Mas, podemos suppor

$$t = 0, -1, -2, \ldots,$$

até

$$t = -\frac{51}{7},$$

e acharemos assim os valores positivos de x, y, z, a saber :

$$x = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22;$$
$$y = 51, 44, 37, 30, 23, 16, 9, 2;$$
$$z = 63, 76, 89, 102, 115, 128, 141, 154;$$

onde se vê que o problema é susceptivel de oito soluções differentes.

Vejamos agora como um problema semelhante póde fornecer um exemplo do segundo gráo de indeterminação

Seja proposto *pagar 187 francos com peças de cinco francos, seis francos e 20 francos sem nenhuma outra moeda*.

Designando por x, y e z os tres numeros de moedas de cada especie, teremos a equação

$$5x + 6y + 20z = 187,$$

que se reduz a

$$5x + 6y = 187 - 20z.$$

Tirando desta equação o valor de x, virá

$$x = \frac{(187 - 20z) - 6y}{5}$$

ou

$$x = \frac{c' - 6y}{5} = -y + \frac{c' - y}{5},$$

chamando c' ao segundo membro daquella equação.

Fazendo

$$\frac{c' - y}{5} = t,$$

teremos

$$y = c' - 5t,$$

donde resulta

$$x = -c' + 6t$$

Substituindo nestas duas fórmulas o valor de c' virá finalmente

$$y = 187 - 20z - 5t,$$
$$x = -187 + 20z + 6t.$$

Si x e y podessem ser numeros positivos ou negativos, z e t receberiam valores quaesquer; mas pelo enunciado do problema vê-se que z não deve receber valores superiores a

$$\frac{187}{20} \text{ ou } 9\frac{7}{20},$$

porque do contrario x e y seriam negativos.

Fazendo pois, successivamente $z = 0, 1, 2, 3, \ldots 8, 9$, obteremos os valores de t e por conseguinte os de x e y.

Assim, para $z = 0$ tem-se

$$\begin{cases} t = 32, 33, 34, 35, 36, 37, \\ x = 5, 11, 17, 23, 29, 35, \\ y = 27, 22, 17, 12, 7, 2. \end{cases}$$

Para $z = 1$, virá

$$\begin{cases} t = 28, 29, 30, 31, 32, 33, \\ x = 1, 7, 13, 19, 25, 31, \\ y = 27, 22, 17, 12 7, 2, \end{cases}$$

Para $z = 2$, virá

$$\begin{cases} t = 25, 26, 27, 28, 29, \\ x = 3, 9, 15, 21, 27, \\ y = 22, 17, 12, 7, 2, \end{cases}$$

Para $z = 3$, virá

$$\begin{cases} t = 22, 23, 24, 25, \\ x = 5, 11, 17, 23, \\ y = 17, 12, 7, 2. \end{cases}$$

Para $z = 8$, teriamos somente $t = 5$, o que dá

$$x = 3, y = 2$$

Emfim a hypothese $z = 9$ não corresponde nenhuma solução, porque as fórmulas se tornam

$$x = -7 + 6t \text{ e } y = 7 - 5t,$$

onde t não póde receber nenhum valor inteiro, ficando x e y inteiros e positivos.

188 — Todos os esforços tentados a respeito das equações do segundo gráo quando o calculo é indeterminado, não conseguiram até hoje produzir resultados equivalentes aos obtidos para as do primeiro gráo.

No calculo indeterminado do segundo gráo, são taes as difficuldades, que as soluções inteiras somente podem ser achadas em casos excepcionaes, que por isso mesmo não offerecem nenhuma importancia logica (27 a).

(27 a) Póde-se fazer ideia das difficuldades desta questão consultando a respeito a Algebra de Lhuillier.

Nestas condições o estudo deste dominio accessorio permitte apreciar a restricção necessaria do calculo, tanto arithmetico como algebrico, mesmo a respeito de especulações que parecem a principio offerecer uma grande simplicidade.

Pode-se, portanto, sentir desde já quanto a nossa aptidão em propor questões excede os meios que possuimos para resolvel-as.

De conformidade com esta convicção, devemos reconhecer a importancia intellectual e social da subordinação contínua dos esforços theoricos ao conjunto de nossas verdadeiras necessidades.

« Dahi resulta que é preciso afastar as especulações ociosas, embora reaes, afim de concentrar nosso fraco entendimento sobre as pesquisas uteis.»

189 — ESPECULAÇÕES NUMERICAS BASEADAS NO EMPREGO DO CALCULO INDETERMINADO — Temos visto que nesta theoria, o ponto de vista arithmetico acha-se combinado com o ponto de vista algebrico mais intimamente que em nenhuma outra.

Uma tal circumstancia a torna propria ás especulações numericas, permittindo a solução de uma infinidade de questões sobre os numeros determinados.

Para dar uma ideia de tal efficacia, vamos resolver em seguida alguns problemas desta especie.

1.° *Decompor 159 em duas partes, uma das quaes seja divisivel por oito e a outra por 13.*

Representando por x e y os quocientes respectivos da divisão das duas partes procuradas pelos numeros 8 e 13, é claro que $8x$ e $13y$ exprimirão estas duas partes, e ter-se-á a equação

$$8x + 13y = 159,$$

cujas solucções inteiras e positivas devem satisfazer á questão.

Resolvendo-a por qualquer dos methodos indicados, obteremos

$$x = 15 + 13t \text{ e } y = 3 - 8t$$

Fazendo successivamente $t = 0$ e $t = -1$, resulta

$$\begin{cases} y = 3,\ y = 11 \\ x = 15,\ x = 2 \end{cases}$$

que são os unicos valores inteiros e positivos que verificam a equação.

Portanto, sendo $8x$ e $13y$ as duas partes procuradas, segue-se que 8×15 ou 120, e 13×3 ou 39, formam uma primeira solução do problema e que 8×2 ou 16, e 13×11 ou 143 formam a segunda; logo 159 pode ser decomposto, quer em $120 + 39$, quer em $16 + 143$.

2.° *Achar um numero que, dividido por 39, deixe de resto 16 e dividido por 56 dê o resto 27.*

Chamemos n o numero procurado, x e y os quocientes inteiros de n quando dividido successivamente por 39 e 56.

Teremos as duas equações

$$n = 39x + 16 \text{ e } n = 56y + 27,$$

donde se deduz

$$39x + 16 = 56y + 27,$$

ou reduzindo

$$39x - 56y = 11$$

e a questão fica dependente da resolução em numeros inteiros desta equação.

Obtem-se

$$x = 56t - 27 \text{ e } y = 39t - 19,$$

donde se conclue para valor da incognita principal

$$n = 56y + 27 = 56\,(39t - 19) + 27 = 2184t - 1037$$

A' inspecção desta fôrmula, vê-se que t não póde ser negativo; mas attribuindo-lhe todos os valores inteiros pòsitivos, teremos os valores procurados de n: o menor destes resulta de $t = 1$ e é igual a $2184 - 1037 = 1147$

Para obter os outros, bastará fazer successivamente $t = 2, 3, 4 \ldots$

3.º *Achar um numero inteiro que, dividido por 11, deixe o resto 3; dividido por 19 deixe o resto 5 e dividido por 29 deixe o resto 10.*

Chamando N o numero procurado, x, y e z os respectivos quocientes inteiros, teremos as equações

$$N = 11x + 3,\ N = 19y + 5 \text{ e } N = 29z + 10$$

donde resulta que

$$11x + 3 = 19y + 5 \text{ e } 19y + 5 = 29z + 10$$

ou

$$11x - 19y = 2$$

$$19y - 29z = 5$$

a questão fica pois reduzida a resolver este systema de duas equações a tres incognitas.

Eliminando y, obtem-se

$$11x - 29z = 7;$$

resolvendo esta equação por qualquer dos processos indicados, obter-se-ão os valores de x e z, isto é,

$$z = 142 + 11t \text{ e } x = 375 + 29t,$$

os quaes substituidos em qualquer das equações propostas, nos farão conhecer y.

Mas basta conhecer x ou z para determinar N, mediante substituição em qualquer das expressões de N; achar-se-á deste modo:

$$N = 4128 + 39t$$

t sendo um numero inteiro; de sorte que, fazendo $t = 0$, se obtem *4128* para valor do menor dos numeros procurados.

Estas tres questões são sufficientes para ajuizar-se da aptidão do calculo indeterminado, quando se trata de especulações numericas.

Cumpre todavia que se tenha em vista a recommendação que acima foi feita no sentido de evitar as pesquizas inuteis: o abuso do calculo indeterminado tem produzido muitas deste genero, podendo-se citar neste numero grande parte das que constituem a *theoria dos numeros* de Legendre.

190 — RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MISTURA OU LIGA POR MEIO DO CALCULO INDETERMINADO — Entre as applicações usuaes do calculo tem grande importancia pratica a que se chama ordinariamente regra de *mistura ou de liga*.

No problema da mistura ha effectivamente duas questões distinctas, sendo uma inversa da outra, embora ambas se refiram em geral á mistura de um certo numero de cousas de valores differentes, que devem constituir um todo de desigual numero de partes e de um valor medio.

Numa, dá-se o valor medio ou commum de cada parte da mistura e o valor particular de cada uma dellas, e procura-se determinar o seu numero.

Na outra, procura-se, ao inverso, a constituição propria da mistura, isto é, o numero de partes de cada uma das cousas que devem ser misturadas, quando se conhece o numero total das partes e seu valor medio.

Supponhamos, por exemplo, que se tem varios alqueires de arroz de preços diversos e que se quer saber qual o preço medio de sua mistura.

E' evidente que o preço procurado deve ser tal que o preço total de todos os alqueires misturados seja ainda o mesmo.

Vê-se, portanto, que a questão se reduz neste caso a achar o preço medio de cada alqueire da mistura, bastando para isto sommar os preços dos differentes alqueires, e dividir o preço total pelo numero destes alqueires.

Neste caso, o problema reduz-se, pois, a uma simples determinação de media arithmetica:

Para resolvel-o, em geral, basta, portanto, multiplicar o numero das cousas de cada especie pelo valor da unidade que lhe serve de medida, e dividir a somma de todos estes productos pelo numero total das cousas misturadas.

Assim, por exemplo, misturando-se oito garrafas de vinho de 1.500 réis a garrafa com 12 de 1.000 réis, obtem-se 20 garrafas, cujo preço é

$$8 \times 1500 + 12 \times 1000 = 24000 ;$$

o preço medio de cada garrafa será, portanto,

$$\frac{24000}{20} = 1200$$

(27 b).

Eis em que consiste o caso mais simples da *regra de mistura*.

O outro caso é o inverso do precedente; por que, sendo dado o preço medio dos objectos componentes, pro-

---

(27 b) Cette valeur moyenne est d'une grande utilité dans presque toutes les affaires de la vie; quand on a plusieurs résultats différents, on aime à réduire tous ces résultats à un terme moyen que produit cependant le même resultat total.

Le calcul des probabilités est presque tout fondé sur ce principe.

Les registres des naissances et des morts ont donné lieu à la construction des tables qu'on appelle de mortalité, et qui montrent combien, sur un nombre donné d'enfants nés en même temps, ou dans la même année, il y en a de vivants au bout d'un an, de deux, de trois, etc.; on peut demander, d'après cela, quelle est la vie moyenne d'une personne, d'un âge donné.

Si on cherche dans ces tables le nombre des vivants à cet âge et qu'ensuite on additionne le nombre des vivants de tous les âges

cura-se ao contrario a constituição do todo, isto é, quanto se precisa tomar de cada um para ter este valor medio.

Os problemas da primeira especie são, como vimos, determinados; ao passo que os desta são ao contrario sempre indeterminados.

Todavia a condição de só se obter para resultado numeros inteiros e positivos torna limitado o numero de soluções desta questão.

Supponhamos, a principio, que só se tenha de misturar objectos de duas especies, que o valor da unidade da primeira especie seja a, e o da segunda seja b; e que se

---

suivants, il est clair que cette somme donnera le nombre total des années qui auront été vécues par la totalité des vivants à l'âge donné; par conséquent, il n'y aura qu'à diviser la somme dont il s'agit, par le nombre des vivants à l'âge donné; le quotient será la vie moyenne, ou bien le nombre d'années que chaque personne devrait vivre encore, pour que le nombre total des années vécues fût le même, et que chaque personne eût vécue également.

On trouve de cette manière, en prenant le milieu entre les resultats des différentes tables de mortalité, que, pour un enfant d'un an, la vie moyenne est d'environ 40 ans; qu'à dix ans, elle est encore de 40 ans; à 20, de 34; à 30, de 26; à 40, de 33; à 50, de 17; à 60, de 12; à 70, de 8; à 80, de 5.

On a, par exemple, fait defférentes expériences; trois expériences ont donné quatre pour resultats; deux expériences ont donné cinq; une a donné six.

Pour avoir le resultat moyen, on multipliera 4 par 3, 5 par 2, et 1 par 6.

On ajoutera ensemble tous ces produits, ce que fait 28, et on divisera ce nombre par le nombre des expériences, savoir 6; ce qui donnera

$$4\frac{2}{3}$$

pour le résultat, moyen de toutes ces expériences.

Au reste, vous sentez que ce résultat ne peut être regardé comme exact, qu'autant qu'on suppose que toutes les expériences sont également exactes; cependant elles peuvent ne pas l'être: alors il faut chercher à tenir compte de ces inégalités ce qui demande un calcul plus compliqué; c'est l'objet de plusieurs recherches dont les géomètres se sont occupés (Lagrange, ob. cit.)

pede quantas unidades da primeira e da segunda especies devem ser tomadas para formar um todo cujo valor medio seja m.

Representemos por x o numero das unidades da primeira especie e por y o das unidades da segunda; é claro que ax será o valor das x unidades da primeira especie, e by o das y unidades da segunda:

Portanto, $ax + by$ será o valor total do composto ou mistura.

Mas o valor medio deste composto, devendo ser m, será preciso que a somma $x + y$ das suas unidades, multiplicada por m, valor medio de cada uma, produza o mesmo valor total; logo ter-se-á a equação indeterminada

$$ax + by = mx + my$$

ou

$$(a - m)\, x = (m - b)\, y\,;$$

donde se deduz

$$x = \frac{(m - b)\, y}{(a - m)}$$

Esta fórmula nos mostra que o numero y póde ser tomado a vontade; porque dando a y um valor qualquer, ter-se-á sempre um valor correspondente de x que satisfará á questão.

Tal é a solução geral do problema; mas si é imposta a condição de serem inteiros e positivos os dois numeros x e y, é evidente que não poderá y ser tomado arbitrariamente.

Para ver de um modo simples como deve ser satisfeita esta ultima condição, basta dividir por y ambos os membros da ultima expressão, o que dará

$$\frac{x}{y} = \frac{m - b}{a - m}$$

Para que x e y sejam positivos, será preciso que as duas quantidades

$$m - b \text{ e } a - m$$

sejam do mesmo signal; isto é, que si a for maior ou menor que m, seja b ao contrario, menor ou maior, de sorte que m deve ficar comprehendido entre as duas quantidades a e b.

Supponhamos que a seja o maior e b o menor dos dois preços; procuraremos o valor da fracção

$$\frac{m - b}{a - m}$$

que reduziremos, si for necessario, á sua expressão mais simples.

Seja

$$\frac{B}{A}$$

esta fracção irreductivel; é visivel que se terá a solução mais simples, tomando

$$x = B \text{ e } y = A$$

Mas como uma fracção não se altera multiplicando ambos os termos por um mesmo numero n, é claro que se poderá tomar tambem

$$x = nB \text{ e } y = nA,$$

sendo n numero qualquer que se deve suppor inteiro, para que x e y o sejam tambem.

E' facil demonstrar que estas expressões de x e de y são as unicas que resolvem a questão proposta.

Tomemos um exemplo :

Quer-se fabricar pão que possa ser vendido a 250 réis o kilogrammo; pergunta-se qual a quantidade de farinha de trigo e de milho que se deve misturar, sendo aquella de 300 réis e esta de 160 o kilogrammo.

Universidade de S. Paulo
Faculdade de Ciencias e Letras
Departamento de Matemática

Tomando a fórmula obtida,

$$\frac{x}{y} = \frac{m-b}{a-m},$$

e fazendo o preço medio

$$m = 250,\ a = 300 \text{ e } b = 160,$$

teremos

$$\frac{x}{y} = \frac{250-160}{300-250} = \frac{90}{50} = \frac{9}{5}.$$

Vê-se, portanto que $x = 9$ e $y = 5$ satisfazem á questão; isto é, que se póde misturar nove kilogrammos de farinha de trigo com cinco de milho.

Como, porém, a fracção

$$\frac{x}{y}$$

não se altera multiplicando ambos os seus termos por um mesmo numero n, é evidente que a solução geral do problema nos é dada pelas expressões

$$x = 9n \text{ e } y = 5n.$$

Dando a n todos os valores inteiros 1, 2, 3..., ver-se-á que se pode tambem misturar 18 kilogrammos de trigo com 10 de milho ou 27 com 15, ou 36 com 20, e etc.

Quando neste caso se trata especialmente de metaes misturados pela fusão, a mistura toma o nome de *liga*.

Na regra ordinaria de *liga* deve-se fazer $x = m - b$ sendo x a quantidade do metal mais caro e $m - b$ o excesso do preço medio sobre o mais baixo, e $y = a - m$ sendo y a quantidade do metal menos caro e $a - m$ o excesso do preço mais alto sobre o medio de accordo com a solução geral que formulamos.

Supponhamos agora que, em lugar de duas especies de objectos a misturar, existem tres cujos valores sejam

a começar pelo mais alto, a, b, c; chamemos x, y e z, as quantidades de cada uma que se precisa conhecer para formar um composto ou liga, cujo valor medio seja m.

A somma dos valores das tres quantidades

$$x, y \text{ e } z \text{ será } ax + by + cz$$

em vista dos valores particulares a, b, c das respectivas unidades.

Mas o valor total devendo ser o mesmo que si todos os valores particulares fossem iguaes a m é claro que neste caso será elle expresso por

$$mx + my + mz$$

Tem-se, portanto, a equação

$$ax + by + cz = mx + my + mz,$$

que se reduz a forma mais simples

$$(a - m)\, x + (b - m)\, y + (c - m)\, z = 0$$

Como ha tres incognitas nesta questão, pode-se tomar duas a vontade.

Mas si se quizer que ellas sejam expressas por numeros positivos e inteiros, observar-se-á a principio que as quantidades $a - m$ e $m - c$ são necessariamente positivas; de sorte que pondo a equação sob a forma

$$(a - m)\, x - (m - c)\, z = (m - b)\, y,$$

a questão ficará reduzida a determinar dois multiplos dos numeros das dados $a - m$ e $m - c$, cuja differença seja igual a $(m - b)\, y$.

Sabemos que esta questão pode sempre ser resolvida em numeros inteiros, quaesquer que sejam os numeros

dados cujos multiplos se procura, e seja qual for a differença, dada entre estes multiplos.

Com effeito, fazendo

$$a - m = M,\ m - c = N,\ (m - b)\ y = D,$$

teremos a equação

$$Mx - Nz = D$$

e a questão ficará reduzida ao caso precedente

Apenas o numero y que entra na expressão de D ficará indeterminado e poderá ser tomado a vontade, do mesmo modo que o numero n que entra, como vimos, na expressão de x e y.

Resolvendo aquella equação, acharemos finalmente

$$x = nN + pD \text{ e } z = nM + qD$$

onde n é um numero inteiro qualquer, positivo ou negativo, sendo p e q facilmente deduzidos da relação

$$pM - qN = \pm 1$$

mediante o desenvolvimento de

$$\frac{M}{N}$$

em fracção continua, conforme o processo citado.

Si em vez de tres objectos, a mistura ou liga fosse composta de quatro, cinco..., o problema ficaria reduzido a resolver uma equação indeterminada do primeiro grau, a quatro, cinco... incognitas, as quaes poderiam se tornar determinadas em consequencia da obrigação de somente acceitar-se soluções inteiras e positivas, ou ainda por qualquer outra condição susceptivel de tornar o numero de incognitas igual ao de equações, impostas pelo enunciado da questão.

CAPITULO X

RESOLUÇÃO ALGEBRICA DAS EQUAÇÕES DO 2º GRAU A UMA INCOGNITA; DUPLICIDADE DE SUAS RAIZES VERIFICADA PELO METHODO DOS COEFFICIENTES INDETERMINADOS; RELAÇÕES ENTRE OS COEFFICIENTES E AS RAIZES. DISCUSSÃO DA FÓRMULA RESOLUTIVA; DETERMINAÇÃO DOS ESTADOS MAXIMA E MINIMA DE UMA FORMAÇÃO DO 2º GRAU. CASO DE DUAS EQUAÇÕES A DUAS INCOGNITAS; GRAU DA EQUAÇÃO FINAL. PROBLEMAS E APPLICAÇÕES.

§ 28

Resolução das equações do 2º grau a uma incognita; duplicidade de suas raizes; relações entre estas e os coefficientes

191 — Antes da Idade Média a Humanidade não conseguiu a resolução completa das equações do 2º grau. E' certo que na ultima phase da evolução Grega já se resolviam alguns problemas do 2º grau.

Mas uma tal resolução referia-se unicamente ao caso mais simples em que não existe na equação a primeira potencia da variavel. E' o que se infere da obra de Diophante, onde se acham os primeiros germens da Algebra. Encontra-se ahi a solução de alguns problemas que dependem de equações do 2º grau; mas o autor os dispõe de modo a nunca recahirem numa equação completa, isto é, que contenha a primeira e segunda potencias da incognita.

Propõe, por exemplo, a questão seguinte que resume a theoria das equações do 2º grau: *Achar dois numeros cuja somma e o producto sejam dados.*

Representando por p a somma e por q o producto, veremos que o problema se resolve immediatamente pela equação completa

$$x^2 - px + q = 0$$

Entretanto eis aqui como procede Diophante para resolvel-a por uma equação incompleta: a somma de

dois numeros sendo dada, procura a sua differença, que considera como a incognita. Attendendo que a somma de dois numeros augmentada de sua differença equivale ao dobro do maior e que diminuida dessa differença vale o dobro do menor, elle exprime assim os dois numeros: um pela metade da somma *mais* a metade da differença, o outro pela metade da somma *menos* a metade da differença. Feito isto só lhe resta traduzir a outra condição, isto é igualar o producto destas quantidades ao numero dado como tal. Si chamarmos p a somma proposta, x a differença incognita, um dos numeros será $\frac{p+x}{2}$ e o outro $\frac{p-x}{2}$.

Multiplicando um pelo outro, tem-se $\frac{p^2-x^2}{4}$, de maneira que o termo x desapparece, e igualando aquelle resultado ao producto dado 9, obtem-se a equação incompleta

$$\frac{p^2-x^2}{4}=q$$

ou

$$p^2-x^2=4q$$

ou ainda

$$p^2-4q=x^2$$

donde se tira

$$x=\sqrt{p^2-4q}$$

Diophante resolve ainda algumas outras questões do mesmo genero, tomando a proposito a somma ou a differença para a incognita, e chega sempre a uma equação, na qual não tem sinão de extrahir uma raiz quadrada para obter a solução do problema.

Mas, antes de ser conhecida na Europa a obra de Diophante (28 a), já a Algebra ahi penetrara pela Hespanha

---

(28 a) A obra de Diophante só foi conhecida na Europa no fim do seculo XVI; Xylander fez della a principio uma má traducção, no meiado desse seculo, sobre um manuscripto achado na bibliotheca do Vaticano que para ahi foi trazido provavelmente da Grecia quando os turcos se apoderaram de Constantinopla. Bachet

com a invasão dos mouros, e sobretudo pela Italia por intermedio dos venezianos que estiveram em constante commercio com o Oriente até a tomada de Constantinopla pelos turcos.

Com effeito, já no fim do seculo XV apperecia em Veneza um livro de Luc de Pacciolo (sapateiro italiano) sobre a Arithmetica e a Geometria, onde se encontra a resolução das equações do 2º grau, mesmo no caso completo. Esta solução é ahi formulada em máos versos latinos que se referem a cada caso particular, segundo as differentes combinações dos signaes dos termos da equação. Estas regras só se occupam do caso em que ha raizes reaes e positivas; porque olhava-se ainda as raizes negativas como insignificantes e inuteis, e só mais tarde a Geometria de Descartes fez conhecer o uso das quantidades negativas.

Emfim a obra de Pacciolo já designa o calculo das relações pelo seu nome de origem arabe. Este facto e muitos outros attestam plenamente que cem annos antes de ser conhecida na Europa a obra de Diophante, já a Algebra alli penetrara por intermedio dos arabes que haviam cultivado e desenvolvido os estudos dos gregos sobre esta sciencia (28 b).

192 — O que acima dissemos indica naturalmente que se deve distinguir dois casos na resolução das equações do 2º grau.

O mais simples é aquelle em que a primeira potencia da incognita não existe na equação. Neste caso dá-se a equação proposta a fórma inteira, e depois de reduzil-a a dois termos, procede-se a resolução que apenas exige uma extracção de raiz quadrada para fornecer a in-

---

de Meziriac, da Academia Franceza, publicou uma nova traducção longamente commentada. Esta edição foi em seguida reimpressa com observações e notas de Fermat (1670) e é a mais estimada.

(28 b) Lagrange — Obra citada.

cognita. Portanto bastam aqui as tres transformações successivamente empregadas no primeiro grau, isto é, a *transposição*, a *composição* e o *isolamento* da incognita.

Com effeito, reduzindo a equação ao typo incompleto $ax^2 \pm c = 0$, teremos seguidamente $ax^2 = \mp c$ e $x^2 = \frac{\mp c}{a}$, donde se tira $x = \pm\sqrt{\frac{\pm c}{a}}$. Vê-se que a raiz obtida é dupla, porque a equação considerada póde ser satisfeita não só por $+\sqrt{\frac{c}{a}}$, como tambem por $-\sqrt{\frac{c}{a}}$, visto como o quadrado de qualquer destes dois radicaes de signaes inversos reproduz o primeiro membro da equação $x^2 = \frac{c}{a}$.

No caso mais complexo, em que a equação é completa, as transformações precedentes são apenas preparatorias, e a resolução exige um artificio para reduzir o typo trinomio.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a fórma binomia

$$ax^2 + c = 0$$

Esta reducção póde ser feita de dois modos, o primeiro devido aos arabes e o segundo a Viête. Historicamente separados por trese seculos, o ultimo delles, se torna dogmaticamente preferivel ao primitivo que, entretanto, não deve ser olvidado.

Ambos estes processos resolvem plenamente a equação completa do 2º grau. Entretanto, nos graus superiores elles tornam-se simplesmente preparatorios, o que bem mostra quanto a Algebra esgota rapidamente seus recursos, apenas os institue. Veremos, todavia que o artificio de Viète comporta uma generalisação superior que, embora incapaz de sobrepujar as difficuldades principaes, póde em todos os casos aperfeiçoar os meios de transformação. (28 c).

(28 c) A. Comte — *Synthese Subjective*. Chap. II.

193 — PROCESSO DOS ARABES. — Para instituir este processo, basta olhar os termos affectos da incognita como formando no primeiro membro as duas primeiras partes do quadrado de um binomio determinado, cujo complemento se lhe ajunta, bem como ao termo independente no segundo membro da equação. Esta ficará reduzida assim ao caso espontaneo, onde a raiz quadrada de ambos os membros fornecerá uma equação do 1° grau que resolve a questão.

Seja a equação completa

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

transpondo o termo independente da incognita, e compondo-a em seguida, teremos

$$ax^2 + bx = -c$$

e

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Para obter o terceiro termo do quadrado que se suppõe representado pelo primeiro membro, podemos empregar o processo já citado indagando qual o valor que deve ter uma indeterminada m, para que $x^2 + \frac{b}{a}x + m^2$ seja um quadrado perfeito. Effectuando, pois, a extracção da raiz, teremos

$$\begin{array}{l|l} x^2 + \frac{b}{a} + m^2 & x + \frac{b}{2a} \\ \hline -x^2 + \frac{b}{a}x & \\ \hline -\frac{b^2}{4a^2} + m^2 & \end{array}$$

Igualando o resto a zero, vê-se que $m^2 = \frac{b^2}{4a^2}$. e portanto $m = \frac{b}{2a}$.

Addicionando, pois, a ambos os membros desta equação a quantidade $\frac{b^2}{4a^2}$, o primeiro transformar-se-á evidentemente no quadrado de $x + \frac{b}{2a}$, e teremos assim

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

isto é

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

ou

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Extrahindo a raiz quadrada de ambos os membros desta igualdade, virá

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

equação do primeiro grau em relação a x; resolvendo-a, obtem-se finalmente

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou finalmente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

fórmula que encerra as duas raizes da equação proposta. Ella nos indica o modo pelo qual estas duas raizes se formam por meio dos coefficientes da equação.

Nestas condições, sempre que se tiver de resolver uma equação do 2º grau, deve-se reduzil-a á fórmula geral $ax^2 + bx + c = 0$ e construir em seguida a expressão das raizes, dispensando assim toda a phase algebrica de transformação para reduzir o typo completo ao caso fundamental ou incompleto. Esta intervenção immediata da

phase arithmetica ou de avaliação é sempre preferivel aqui, pois que a fórmula das raizes é simples e facil de reter na memoria, tornando-se o seu emprego muito mais rapido que a phase algebrica de transformação.

Por exemplo, seja proposto resolver a equação

$$2x^2 - 24x + 70 = 0,$$

teremos

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \times 2 \times 70}}{2 \times 2} = 24 \pm \sqrt{576 - 560} = \frac{24 \pm \sqrt{16}}{4}$$

ou

$$x = \frac{24}{4} \pm \frac{4}{4},$$

donde

$$x = 6 + 1 = 7 \text{ e } x'' = 6 - 1 = 5$$

Si o coefficiente do 1° termo da equação do 2° grau fôr igual a unidade, a fórmula que a resolve torna-se mais simples. Com effeito, tal equação póde ser posta sob a forma

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ou

$$x^2 + px + q = 0,$$

si fizermos

$$\frac{b}{a} = p \text{ e } \frac{c}{a} = q.$$

Introduzindo estas duas igualdades na fórmula acima, isto é

$$x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}},$$

teremos

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

para a fórma resolutiva da equação

$$x^2 + px + q = 0.$$

Por exemplo, para a equação

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

virá

$$x = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{4^2}{4} + 12} = 2 \pm \sqrt{4 + 12} = 2 \pm \sqrt{16} = 2 \pm 4$$

Portanto,

$$x' = 2 + 4 = 6 \text{ e } x'' = 2 - 4 = -2$$

194 — APRECIAÇÃO DO PROCESSO DE VIÈTE — O grande geometra que preparou a fundação da Geometria moderna por Descartes, instituiu um processo que, embora menos espontaneo e directo, offerece mais importancia logica por ser susceptivel de maior generalisação.

Meditando sobre a resolução geral das equações, elle concebeu a possibilidade de augmentar ou diminuir a vontade o valor da incognita, substituindo esta por um binomio convenientemente formado.

Realisando esta transformação para um decrescimento indeterminado da incognita, os coefficientes da equação obtida virão complicados de uma constante arbitraria de que se póde dispôr para transformar a vontade um qualquer dentre elles. Ella póde, portanto, ser escolhida de modo a fazer inteiramente desapparecer uma das potencias secundarias da mesma incognita. Basta para isso que se annulle o coefficiente desta mediante uma equação auxiliar de grau igual ao complemento do expoente considerado para o da potencia principal.

Tal é a concepção geral que, especialmente applicada as equações trinomias do segundo grau, é sufficiente para tornal-as binomias, determinando a constante arbitraria do binomio considerado por uma simples equação do 1° grau.

Para esclarecel-a neste caso, tomemos a equação

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

Façamos x igual ao binomio $z - h$ (2) sendo z uma nova incognita e h uma indeterminada capaz de annullar o

o 2º termo da equação. Substituindo este binomio na equação (1) teremos

$$a\,(z-h)^2 + b\,(z-h) + c = 0$$

ou desenvolvendo

$$a\,(z^2 - 2hz + h^2) + bz - bh + c = 0$$

ou

$$az^2 - 2\,ahz + ah^2 + bz - bh + c = 0$$

ou ordenando em relação a z,

$$az^2 + (b - 2\,ah)\,z + (ah^2 - bh + c) = 0$$

Suppondo $b - 2\,ah = 0$ (3), a equação obtida reduzir-se-á a

$$az^2 + (ah^2 - bh + c) = 0$$

equação binomia que nos dá

$$az^2 = bh - ah^2 - c$$

ou

$$z^2 = \frac{bh - ah^2 - c}{a}$$

donde se deduz que

$$z = \pm\sqrt{\frac{bh - ah^2 - c}{a}}$$

Substituindo esta fórmula na expressão de x (2), virá

$$x = -h \pm \sqrt{\frac{bh - ah^2 - c}{a}}.$$

Substituindo h pelo seu valor deduzida da equação (3), isto é $h = \frac{b}{2a}$, teremos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{\frac{b^2}{2a} - \frac{ab^2}{4a^2} - c}{a}}$$

ou

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{2b^2 - b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

ou

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

ou emfim

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (4)$$

expressão identica a já obtida.

Attendendo ao duplo signal do radical, vê-se que esta fórmula se desdobra em duas outras que exprimem respectivamente as duas raizes da equação (1).

Representando-as por x' e x'', teremos pois

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x'' &= -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Reflectindo sobre o artificio empregado afim de fazer desapparecer o segundo termo da equação proposta, vê-se que para isto substituimos a incognita x por $z - h$ (2); ora, o valor fornecido para h pela equação (3) sendo $\frac{b}{2a}$, resultou para x a expressão $x = z - \frac{b}{2a}$.

Dahi se conclue que para transformar a equação em outra desprovida do segundo termo, não fizemos mais do que *substituir a incognita por uma outra addicionada algebricamente a razão geometrica entre o coefficiente*

do 2º termo tomado com signal contrario, e o grão da equação considerada.

Veremos que esta regra se torna applicavel ás equações de grau superior, e semelhante generalisação constitue um dos motivos da superioridade do processo de Viète.

195 — DUPLICIDADE DAS RAIZES COMPROVADA PELO METHODO DAS INDETERMINADAS — A transformação precedente, realisada por Viète, constituiu o melhor germen do *methodo dos coefficientes indeterminados* que se deve ao eminente Descartes, o verdadeiro fundador da philosophia mathematica.

A indeterminação em que ficam os coefficientes da transformada, e a possibilidade de determinar a constante arbitraria pela equação obtida annullando qualquer delles, levou Descartes a generalisar este artificio para toda sorte de transformações. Igualando a formação a transformar a um desenvolvimento hypothetico, racional e inteiro, em relação a variavel e indeterminado quanto aos coefficientes desta, o seu methodo consiste essencialmente em desenvolver para com esta relação uma propriedade bastante simples da formação considerada e determinar em seguida aquelles coefficientes por meio das equações resultantes da comparação entre os coefficientes dos termos da igualdade final.

Para caracterisar este methodo, vamos applicar aos casos da divisão e das potencias.

Considerando a principio o caso da divisão, supponhamos, por exemplo, que se pede o quociente de $6b^2x^5 + (9a - 2b^2c)x^4 - ac^2x^2$ por $3x^2 - cx$.

O grau do quociente sendo a differença entre os graus do dividendo e do divisor podemos escrever

$$\frac{6b^2x^5 + (9a - 2b^2c)x^4 - ac^2x^2}{3x^2 - cx} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

sendo A, B, C e D os coefficientes a determinar.

A propriedade mais simples para este caso é que o dividendo deve ser igual ao producto do divisor pelo quociente, si fôr exacta a divisão.

Teremos, pois,

$$6b^2x^5 + (9a - 2b^2c)x^4 - ac^2x^2 = (3x^2 - cx)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$$

ou desenvolvendo

$$6b^2x^5 + (9a - 2b^2c)x^4 - ac^2x^2 = 3Ax^5 + (3B - Ac)x^4 + \\ + (3C - Bc)x^3 + (3D - Cc)x^2 - Dcx.$$

Estes dois polynomios sendo equivalentes, devem ser identicos, donde se conclue que os coefficientes das mesmas potencias de x devem ser respectivamente iguaes. Estabelecendo a comparação, teremos, pois, as seguintes equações que nos darão os valores dos coefficientes indeterminados:

$$6b^2 = 3A, \quad 9a - 2b^2c = 3B - Ac, \quad -ac^2 = 3D - Cc, \\ 3C - Bc = 0, \quad Dc = 0;$$

resolvendo-as, teremos

$$A = 2b^2, \quad B = 3a \quad \text{e} \quad C = ac.$$

O quociente pedido será, pois,

$$2b^2x^3 + 3ax^2 + acx.$$

Vamos ainda resolver por este methodo as questões sobre a divisibilidade dos polynomios e as condições de uma potencia perfeita, de que já nos occupamos. Para isto basta representar o quociente, ou a raiz, por um polynomio de coefficientes indeterminados, que em seguida se fixa desenvolvendo a comparação de igualdade deste modo estabelecida.

Supponhamos, por exemplo, que se pede os valores de m e n para que a expressão $x^4 - 2x^3 + mx + n$ seja divisivel por $x^2 + 2x + 2$.

Applicando o methodo teremos:

$$x^4 - 2x^2 + mx + n = (x^2 + 2x + 2)\,(x^2 + Ax + B) =$$
$$= x^4 + (A + 2)\,x^3 + (B + 2A\ 2)\,x^2 + (2B + 2A)\,x + 2B.$$

Estabelecendo a comparação, virá:

$$A + 2 = 0 \qquad B + 2A + 2 = -2 \qquad 2B + 2A = m$$
$$2B = n,$$

donde

$$m = -4 \qquad n = 0.$$

Façamos identica applicação para determinar as condições a que deve satisfazer o polynomio

$$4x^4 - 4px^3 + 4qx^2 + 2p\,(m + 1)\,x + (m + 1)^2$$

seja o quadrado perfeito de um trinomio.

Sabemos que o grau do trinomio raiz é igual ao quociente do grau do polynomio dado por 2, isto é, será do 2º grau. Representando, pois, a raiz buscada por $A + Bx + Cx^2$, teremos, chamando P o polynomio dado

$$P\,\tfrac{1}{2} = Ax + Bx + Cx^2. \qquad (1)$$

A propriedade mais simples da formação potencia é ser ella igual a sua raiz elevada á potencia correspondente. Traduzindo este facto na igualdade (1), virá

$$P = (A + Bx + Cx^2)^2 = A^2 + 2ABx + (B^2 + 2AC)\,x^2 +$$
$$+ 2BCx^3 + C^2x^4.$$

Identificando os coefficientes da expressão de P com os do 2º membro, teremos:

$$A^2 = (m + 1)^2 \qquad 2AB = 2p\,(m + 1)$$
$$B^2 + 2AC = 4q \qquad 2BC = -4p \qquad C^2 = 4,$$

donde resulta

$$A = m + 1 \qquad B = p \qquad C = 2 \qquad m + 1 = q - \frac{p^2}{4}$$

Universidade de São Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

Dado, pois, um polynomio $f(x)$, obtem-se as condições para que seja uma potencia perfeita do seguinte modo:

Iguala-se o polynomio dado a um outro que tenha os coefficientes indeterminados. Suppondo que tem de representar a raiz, eleva-se este polynomio a potencia m, iguala-se os coefficientes das mesmas potencias de x nos dois membros, e das equações assim obtidas deduz-se as relações entre as constantes do polynomio dado, para que seja elle uma potencia perfeita (28 d).

Baseando-nos neste methodo, podemos considerar toda a formação do 2º gráo como representada pelo producto de dois factores binomios do 1º gráo, cujos segundos termos, a principio indeterminados, são depois sujeitos a satisfazerem certas relações com os coefficientes da mesma formação.

Seja, por exemplo, a formação algebrica, racional e inteira

$$x^2 + px + q.$$

Suppondo α uma indeterminada que substituida em logar de x neste trinomio o torne igual a zero, já vimos que nesta hypothese será elle divisivel por $x - \alpha$.

(28 d) O fecundo methodo de Descartes é uma concepção bem digna do espirito philosophico do seu creador. Elle apresenta no dominio mais abstracto da mathematica uma applicação notavel da grande lei de Philosophia Primeira que manda formular a hypothese mais simples de accôrdo com os dados a representar.

« Realmente a hypothese mais simples que se póde suppor ao desenvolvimento de uma formação é a de um polynomio inteiro em relação a variavel.

Os resultados a que se chega com o emprego deste methodo deixam bem evidente o quanto no dominio mais simples, as hypotheses, desde que, scientificamente formuladas, podem depois tornar-se precisas ; e ainda mais mostram o quanto é possivel estabelecer previsões partindo de taes hypotheses, de modo a determinar quaes os valores que convêm a certos coefficientes para que se realise um determinado modo de relação entre duas expressões.» (MORAES REGO) — *Elementos de Algebra* — Rio de Janeiro, 1886.

Sendo o dividendo do 2º gráo e o divisor do 1º o quociente será tambem deste gráo e da fórma $x - \beta$, sendo β uma outra indeterminada.

Para conhecer as condições a que devem satisfazer α e β, para que se verifique este modo de relação, basta-nos applicar o methodo cartesiano; igualando o trinomio ao producto dos dois binomios e deduzir as condições de identidade resultantes da transformação.

Teremos assim

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)\ (x - \beta)$$

ou

$$x^2 + px + q = x^2 - (\alpha + \beta)\ x + \alpha\beta$$

Identificando, vemos finalmente que

$$p = -(\alpha + \beta) \text{ e } q = \alpha\beta$$

Taes são as condições a que devem satisfazer as indeterminadas α e β para que a formação $x^2 + px + q$ seja igual ao producto dos dois binomios, isto é, para que se tenha

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)\ (x - \beta)$$

Esta igualdade nos indica que a formação do segundo gráo é exactamente divisivel por $x - \alpha$ e por $x - \beta$, e portanto, segundo o principio apreciado na divisão, se terá

$$x^2 + px + q = 0$$

tanto para $x = \alpha$ como para $x = \beta$. Isto significa que α e β são raizes desta equação do 2º gráo.

O methodo dos coefficientes indeterminadas nos conduz assim a explicação directa da duplicidade de valor attribuido á incognita desta equação por qualquer dos dois processos de sua resolução.

Convém notar aqui um facto importante. Tinhamos já constatado, no *calculo indeterminado do 1º gráo*, que uma questão definida póde admittir muitas soluções, e algumas vezes uma infinidade. Agora o resultado do concurso da resolução e da instituição das equações do 2º gráo nos deixa vêr que esta noção toma um caracter novo, estendendo-se ás relações que apenas encerram uma incognita. Todavia ella não se torna plenamente racional sinão para as equações de gráo superior que não podem ser resolvidas.

Veremos que, em virtude de semelhante decomposição em factores elementares, o numero das *raizes* respectivas deve sempre equivaler ao gráo correspondente. Si o conjuncto dellas fosse superior ao gráo da equação considerada, sel-o-ia tambem o numero de factores do 1º gráo, e o polynomio resultante do segundo membro seria de um gráo superior ao do 1º membro, o que é absurdo suppor.

196 — RELAÇÕES ENTRE OS COEFFICIENTES E AS RAIZES — Vimos precedentemente que duas são as condições necessarias para que um trinomio do 2º gráo fique decomposto em factores do 1º. Estas duas condições são de facto as que devem ligar os coefficientes do mesmo trinomio ás duas raizes da equação correspondente. Para mostral-o, combinemos estas raizes (5), a principio por addição e depois por multiplicação; teremos:

$$x' + x'' = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}; \qquad (6)$$

$$x'\,x'' = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) =$$

$$= \left[\frac{b^2}{4a^2} - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} =$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \qquad (7)$$

Ora, tomando a equação completa do 2º gráo (1), e dividindo ambos os membros pelo coefficiente do 1º termo, virá

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

comparando-a sob esta forma com os resultados acima obtidos, (6 e 7), conclue-se immediatamente:

1º *que o coefficiente do segundo termo tomado com signal contrario equivale á somma das raizes;*

2º *que o termo constante equivale ao producto das raizes.*

A explicação destas duas leis já nos foi dada pela constituição da equação do 2º gráo por meio das do 1º de que é o producto.

Vimos, com effeito, que para uma formação implicita do 2º gráo da fórma $x^2 + px + q$ se tem sempre

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta,$$

donde resultou

$$p = -(\alpha + \beta) \text{ e } q = \alpha\beta$$

ou

$$-p = \alpha + \beta \text{ e } q = \alpha\beta,$$

sendo α e β duas quantidades quaesquer que annullam a formação, quando substituidas successivamente em logar da variavel, e que são portanto as *raizes* da equação correspondente.

Todavia a maneira a mais directa de descobrir as relações entre os dois coefficientes e as *raizes* consiste em tornal-as susceptiveis de fornecer á equação duas raizes dadas. Resolvendo as duas equações do 1º gráo instituidas por um tal problema, obtem-se a expressão dos coefficientes por meio das raizes, sem necessidade de nenhuma suggestão prévia a tal respeito.

Com effeito, suppondo que x' e x'' são as raizes dadas para a equação

$$x^2 + px + q = 0,$$

e admittindo que p e q sejam os seus coefficientes incognitos, teremos por substituição

$$\left.\begin{aligned} x'^2 + x'p + q &= 0 \\ x''^2 + x''p + q &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} x'p + q + x'^2 &= 0 \\ x''p + q + x''^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Resolvendo este systema de duas equações do 1° gráo a duas incognitas, p e q, teremos :

$$(x' - x'')\,p + (x'^2 - x''^2) = 0$$

ou

$$(x' - x'')\,p = -(x'^2 - x''^2)$$

donde

$$p = -\frac{x'^2 - x''^2}{x' - x''} = -(x' + x''). \qquad (8)$$

Substituindo este valor na primeira equação do systema, obtem-se

$$-x'(x' + x'') + q + x'^2 = 0$$

ou

$$-x'(x' + x'') + x'^2 = q$$

ou

$$q = x'(x' + x'') - x'^2 = x'^2 + x'x'' - x'^2$$

isto é

$$q = x'x'' \qquad (9)$$

Este modo de estabelecer as leis que subordinam os dois coefficientes ás raizes da equação do 2° gráo, é como vemos independente da formula que a resolve. Por isto, torna-se gradualmente applicavel aos gráos superiores e deve ser olhado como tendo conduzido o precursor de

Descartes a descobrir, por inducção, as relações geraes entre os coefficientes e as raizes de taes equações. (A. Comte = ob. c.).

197 — EMPREGO DAS RELAÇÕES PRECEDENTES; MODO QUE SUGGEREM PARA VOLTAR Á FORMULA RESOLUTIVA DA EQUAÇÃO — As relações precedentes (8 e 9) permittem formar a equação do 2º gráo cujas raizes são dadas. Este problema é o inverso do que já citamos: *Achar dois numeros de que se conhece a somma* p *e o producto* q. Aquellas relações nos indicam logo que p e q são respectivamente os cofficientes do 2º e 3º termos da equação $x^2 - px + q = 0$ que resolve a questão.

Nestas condições, si ao contrario, forem dados os proprios numeros α e β, por exemplo, não teremos mais do que fazer — $(\alpha + \beta) = p$ e $\alpha\beta = q$ para formar immediatamente a equação procurada.

Tomemos alguns exemplos:

1º. *Formar a equação cujas raizes sejam 5 e 7.*

Solução:

$$p = -(5 + 7) = -12,\ q = 7.5 = 35.$$

e a equação será

$$x^2 - 12x + 35 = 0.$$

Verificação:

$$x = \frac{12}{2} \pm \sqrt{\frac{12^2}{4} - 35} = 6 \pm \sqrt{1};$$

donde

$$x' = 6 + 1 = 7 \text{ e } x'' = 6 - 1 = 5.$$

Comparando estes resultados com os que obtivemos no exemplo do numero 193, vê-se que são os mesmos. Entretanto a equação correspondente é

$$2x^2 - 24x + 70 = 0;$$

é differe da que consideramos por ter os coefficientes multiplicados por 2. Estendendo esta comparação á equações

similhantes, ver-se-á *que terão raizes iguaes quando os respectivos coefficientes forem proporcionaes, como succede neste caso.*

2º. *Formar a equação cujas raizes sejam 5 e — 7.*

Solução :

$$p = -(-7+5) = -(-2) = +2,\ q = -7.5 = -35,$$

e a equação será :

$$x^2 + 2x - 35 = 0.$$

Verificação :

$$x = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{4} + 35} = 1 \pm \sqrt{36}$$

donde

$$x' = -1 + 6 = 5 \text{ e } x'' = -1 - 6 = -7$$

3º. *Formar a equação cujas raizes sejam — 5 e — 7.*

Solução :

$$p = -(-5-7) = -(-12) = +12,\ q = (-5)(-7) = +35,$$

e virá

$$x^2 + 12x + 35 = 0.$$

Comparando esta equação com a obtida no primeiro exemplo, vê-se que apenas differe pelo signal contrario que affecta o 2º termo. Nestas condições, póde-se dizer que *para obter a equação cujas raizes tenham signaes contrarios as de uma outra, basta trocar o signal do termo affecto da 1ª potencia da incognita.*

Verificação ;

$$x = \frac{-12}{2} \pm \sqrt{36 - 35} = -6 \pm \sqrt{1}$$

donde

$$x = -6 + 1 = -5 \text{ e } x'' = -6 - 1 = -7.$$

4º. *Formar a equação cujas raizes sejam* -5 *e* $+5$.

Solução:

$$p = -(5-5) = 0,\ q = -5.5 = -25$$

e teremos

$$x^2 - 25 = 0$$

Verificação:

$$x^2 = 25,\ x = \pm\sqrt{25} = \pm 5,$$

donde

$$x' = 5 \text{ e } x'' = -5.$$

5º. *Formar a equação cujas raizes sejam*

$$5 + 7\sqrt{-1} \text{ e } 5 - 7\sqrt{-1}.$$

Solução:

$$p = -(5+7\sqrt{-1}+5-7\sqrt{-1}) = -10,\ q = (5+7\sqrt{-1}) \times$$

$$\times (5-7\sqrt{-1}) = (25 - 49 \times -1) = 25 + 49 = 74$$

e virá

$$x^2 - 10x + 74 = 0.$$

Verificação:

$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{25-74} = 5 \pm \sqrt{-49} = 5 \pm 7\sqrt{-1},$$

donde

$$x' = 5 + 7\sqrt{-1} \text{ e } x'' = 5 - 7\sqrt{-1}.$$

6º. *Formar a equação cujas raizes sejam*

$$\frac{1}{5} \text{ e } -\frac{1}{7}.$$

Solução:

$$p = -\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}\right) = -\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) = -\frac{2}{35},\ q = -\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = -\frac{1}{35}$$

e teremos

$$x^2 - \frac{2}{35}x - \frac{1}{35} = 0.$$

ou

$$35x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Universidade de S. Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

Verificação:

$$x = \frac{2}{2 \times 35} \pm \frac{\sqrt{4 + 4 \times 35 \times 1}}{2 \times 35}$$

ou

$$x = \frac{2}{2 \times 35} \pm \frac{\sqrt{4 + 4 \times 35 \times 1}}{2 \times 35} = \frac{1}{35} \pm \frac{\sqrt{144}}{2 \times 35} = \frac{1}{35} \pm \frac{6}{35},$$

donde

$$x' = \frac{1}{35} + \frac{6}{35} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5},$$

$$x'' = \frac{1}{35} - \frac{6}{35} = \frac{5}{35} = -\frac{1}{7}$$

7º. *Formar a equação cujas raizes sejam*

$$2 \text{ sen.} a \text{ e } \log. a.$$

Solução:

$$p = -(2 \text{ sen. } a + 2 \log. a) \quad q = 2 \text{ sen. } a. \, 2 \log. a = 4 \text{ sen. } a \log. a$$

e virá

$$x^2 - (2 \text{ sen. } a + 2 \log. a)\, x + 4 \text{ sen. } a \log. a = 0.$$

Verificação:

$$x = 2\left(\frac{\text{sen. } a + \log. a}{2}\right) \pm \frac{\sqrt{4(\text{sen. } a + \log. a)^2 - 16 \text{ sen. } a \log. a}}{2} =$$

$$= \text{sen. } a + \log. a \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{4(\text{sen.}^2 a + 2 \text{ sen. } a \log. a + \log.^2 a) - 16 \text{ sen. } a \log. a}}{2} =$$

$$= \text{sen. } a + \log. a \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{4 \text{ sen.}^2 a + 8 \text{ sen. } a \log. a + 4 \log.^2 a - 16 \text{ sen. } a \log. a}}{2} =$$

$$= \text{sen. } a + \log. a \pm \frac{\sqrt{4 \text{ sen.}^2 a - 8 \text{ sen. } a \log. a + 4 \log.^2 a}}{2} =$$

$$= \text{sen. } a + \log. a \pm \frac{\sqrt{4(\text{sen. } a - \log. a)^2}}{2} =$$

$$= \text{sen. } a + \log. a \pm \frac{2(\text{sen. } a - \log. a)}{2} =$$

$$= \text{sen. } a + \log. a \pm (\text{sen. } a - \log. a);$$

donde

$$x' = sen.\ a + log.\ a + sen.\ a - log.\ a = 2\ sen.\ a$$

$$e\ x'' = sen.\ a + log.\ a - sen.\ a + log.\ a = 2\ log.\ a.$$

As relações (8 e 9) suggerem um novo meio de chegar á formula que resolve a equação do 2º gráo. Seja esta

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (I)$$

Designando por x' e x'' as suas raizes, temos

$$\left.\begin{aligned} x'^2 + px' + q &= 0 \\ x''^2 + px'' + q &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

donde por subtração — membro a membro

$$x'^2 - x''^2 + p\,(x' - x'') = 0$$

ou

$$(x' + x'')\,(x' - x'') + p\,(x' - x'') = 0$$

ou

$$x' + x'' = -\,p \qquad (III)$$

Das equações (II) teremos tambem por addição — membro a membro

$$x'^2 + x''^2 + p\,(x' + x'') + 2q = 0$$

ou, em vista da relação (III)

$$x'^2 + x''^2 - p^2 + 2q = 0$$

ou

$$x'^2 + x''^2 = p^2 - 2q. \qquad (IV)$$

Ainda mais, a igualdade (III) nos dá por elevação ao quadrado

$$x'^2 + x''^2 + 2x'\,x'' = p^2$$

que, em virtude da relação (IV), conduz á

$$2x'\,x'' = p^2 - (p^2 - 2q)$$

ou

$$x'\,x'' = q \qquad (V)$$

Si agora subtrahirmos e sommarmos

$$2x'x''$$

ao primeiro membro da equação (IV), acharemos

$$x'^2 + x''^2 - 2x'x'' + 2x'x'' = p^2 - 2q$$

ou attendendo á relação (V),

$$(x' - x'')^2 = p^2 - 4q.$$

Daqui tiramos, por extracção da raiz quadrada

$$x' - x'' = (p^2 - 4q)^{1/2} \qquad \text{(VI)}$$

as equações (III) e (VI) dão-nos então

$$x' = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}(p^2 - 4q)^{1/2} = \frac{-p + (p^2 - 4q)^{1/2}}{2}$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2}(p^2 - 4q)^{1/2} = \frac{-p - (p^2 - 4q)^{1/2}}{2}.$$

Resumindo estas expressões, teremos finalmente

$$x = \frac{-p \pm (p^2 - 4q)^{1/2}}{2}$$

para fórmula geral que resolve a equação.

(I). — (R. TROMPOWSKY). — *Revista Didactica*. Anno V, n. 1.)

NOTA — « Quando o coefficiente a é muito pequeno, as formulas das raizes difficilmente permittem obter sua avaliação com sufficiente approximação. Torna-se então necessario procurar um meio mais simples para realizar a avaliação sem necessidade de recorrer as formulas geraes das raizes.

O meio instituido para isto foi o seguinte, incontestavelmente o mais simples e mais espontaneo. Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Esta equação nos dá

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b} \qquad \text{(1)}$$

Sendo a muito pequeno, considerou-se o valor $\frac{c}{b}$ como um valor approximado; este valor substituido em logar de x na fracção $\frac{ax^2}{b}$ da equação (1); dá o valor $x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}$, (2) mais approximado do que o primeiro. Este valor (2) substituido na mesma fracção dá

§ 29

Discussão da formula geral das raizes da equação do 2º grau; determinação das maxima e minima de uma formação do 2º grau. Applicação e problemas.

198 — DISCUSSÃO DA FORMULA DO 2º GRAU — Consideremos a formula obtida para resolver a equação

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

isto é

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para apreciar a natureza das raizes, devemos admittir tres hypotheses, conforme a quantidade sob o radical é positiva, nulla e negativa.

---

expressão (1), dá um terceiro valor mais approximado, e assim continuando se chegaria a um valor sufficientemente exacto para uma das raizes; a outra seria obtida subtrahindo-se a raiz conhecida do coefficiente do segundo termo que representa a somma das duas raizes.

Esta questão só tem importancia sob o ponto de vista arithmetico pois que é ella instituida na phase arithmetica da resolução da equação quando se pretende avaliar as fórmulas. Sob o ponto de vista algebrico porém, a questão é inutil, porquanto algebricamente o que se tem em vista é a determinação do modo de relação que liga os coefficientes para constituirem as raizes, deixando absolutamente de parte os valores que possam ter estes coefficientes.

Em todo caso, porém, convém mencionar o processo por *approximações successivas*, que comporta como veremos, uma grande generalisação, para mostrar o modo por que o espirito humano vence as difficuldades que encontra, e como caracterisando no dominio abstracto uma questão muito commum em nossa existencia, que vem a ser: desde que não nos é possivel obter a solução exacta de um facto, a marcha racional do nosso espirito deve consistir em instituir soluções progressivamente mais approximadas, da verdadeira até que se chegue a uma, cuja aceitação não determine erro sensivel para o resultado. A menção deste processo é ainda conveniente para mostrar uma dessas questões onde a phase arithmetica se acha englobada á phase algebrica.»

Devemos.

1ª Hypothese: $b^2 - 4ac$ quantidade positiva. Neste caso os valores de x são evidentemente reaes; são além disso desiguaes, porque em vista do duplo signal do radical um será a somma e o outro a differença entre os dois termos da expressão de x,

Si na equação considerada fôr c positivo, as duas raizes terão o mesmo signal; porque o producto de duas quantidades só póde ser positivo quando ellas têm o mesmo signal: Si b fôr positivo, as raizes serão negativas, e si b fôr negativo serão ellas positivas, porquanto vimos que o coefficiente do 2º termo equivale á somma das raizes com signal contrario.

Si c fôr negativo, as raizes terão signaes contrarios, porque um producto negativo só póde resultar de quantidades de signaes inversos.

Sendo ellas desiguaes, a sua somma terá o signal da maior. Portanto, si b fôr positivo, a maior será a negativa, e si b fôr negativo, dar-se-á o inverso, visto como o signal de b é contrario ao da somma.

Emfim, si c fôr nullo, uma das raizes sel-o-á tambem. Com effeito para que o producto c de duas quantidades se torne nullo, sem que o seja sua somma b, será preciso que esta somma seja igual a outra. E' o que se verifica immediatamente na equação

$$ax^2 + bx = 0$$

ou

$$x\,(ax + b) = 0$$

onde se vê que

$$x = 0 \text{ e } x = -\frac{b}{a}$$

2ª Hypothese: $b^2 - 4ac = 0$.

Neste caso desapparece o segundo termo da expressão de x: as duas raizes serão, portanto, reaes e iguaes a quantidade fornecida pelo primeiro. Para verifical-o, basta

introduzir na equação proposta a hypothese considerada $b^2 - 4ac = 0$, ou $b^2 = 4ac$. Daqui se deduz que $c = \frac{b^2}{4a}$; substituindo esta expressão na equação proposta em logar de c, virá

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = 0$$

ou

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = 0.$$

Esta equação sendo o mesmo que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0,$$

podemos pol-a sob a fórma

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0,$$

equação esta que póde ser satisfeita pela annullação de qualquer dos dois factores do primeiro membro; e como estes se annullam para o mesmo valor $-\frac{b}{2a}$ de x, vê-se que a equação proposta tem duas raizes iguaes áquella quantidade.

Si b fôr nullo, as raizes iguaes serão evidentemente de signaes contrarios, e si não fôr, terão o mesmo signal.

3ª Hypothese: $b^2 - 4ac$ quantidade negativa. Neste caso as duas raizes serão evidentemente imaginarias, porque em ambas se terá de extrahir a raiz par de uma quantidade negativa. Sob o ponto de vista dos valores respectivos, nenhuma pesquiza interior é pois necessaria.

199 — EXAME ESPECIAL DAS RAIZES IMAGINARIAS — Entretanto, sob o ponto de vista algebrico, o advento das raizes imaginarias tem uma grande importancia. Porque, acceitas a principio como um mero symptoma de impossibilidade numerica, ellas permittem depois generalisar as transformações algebricas, supprimindo ahi toda a distincção de valor.

Na hypothese de $b^2 - 4ac$ negativa em que são imaginarias as raizes da equação do 2º grau, notemos que

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}} = (4ac - b^2)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{4ac - b^2} \times \sqrt{-1}.$$

Por conseguinte, as duas raizes podem ser escriptas sob a fórma

$$x' = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \times \sqrt{-1}$$

e

$$x'' = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \times \sqrt{-1}.$$

Representando $-\frac{b}{2a}$ por m e $\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ por n, ellas tomarão a fórma

$$x = m + n\sqrt{-1} \text{ e } x'' = m - n\sqrt{-1}.$$

As raizes imaginarias das equações do 2º grau são sempre desta fórma, onde m e n são quantidades reaes: o mesmo se observa relativamente as equações de graus superiores, sendo notavel que se existir uma raiz da fórma $m + n\sqrt{-1}$, haverá necessariamente uma outra sob a fórma $m - n\sqrt{-1}$; de sorte que as raizes imaginarias são sempre conjugadas. Esta propriedade geral que apenas era conhecida inductivamente para as equações do 2º grau foi mais tarde deduzida por d'Alembert para as equações de um grau qualquer.

As expressões imaginarias são geralmente reductiveis áquella fórma (29 a) e é excusado dizer que submettem as

---

(29 a) — Para mostral-o, desenvolvamos pela lei de Newton a potencia inteira m da expressão geral $a + b\sqrt{-1}$. Teremos

$$(a + b(-1)^{\frac{1}{2}})^m = a^m - \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4.} a^{m-4} b^4 + \ldots. +$$
$$+ \frac{[ma^{m-1} - m(m-1)(m-2)}{1.2.3.} a^{m-3} b^3 + \ldots] b(-1)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \pm M + N(-1)^{\frac{1}{2}},$$

mesmas transformações que as quantidades reaes; porquanto a Algebra afasta systematicamente toda a idéa de possibilidade ou impossibilidode dé avaliação, que só póde perturbar a elaboração das relações.

A respeito das raizes imaginarias, resta-nos sómente fazer uma observação mais proveitosa que a precedente

---

representando M o conjuncto de termos normaes e N o coefficiente de $(-1)^{1/2}$. A raiz quadrada da somma dos quadrados $a^2 + b^2$ denomina-se modulo da expressão $a + b(-1)^{1/2}$. Para que uma *irracional singular* seja nulla, é preciso e basta que seja nullo o seu modulo. Porque si o modulo $(a^2 + b^2)^{1/2}$ não é nullo, a e b não serão ambos nullos e por conseguinte tambem $a + b(-1)^{1/2}$; si $(a^2 + b^2)^{1/2}$ é igual a zero, a e b serão nullos ao mesmo tempo e então $a + b(-1)^{1/2} = 0$. O modulo de producto de duas irracionaes singulares é igual ao producto dos modulos dos factores. Com effeito, sendo o producto de $a + b(-1)^{1/2}$ por $a' + b'(-1)^{1/2}$ igual a $(aa' - bb') + (ab' + ba')(-1)^{1/2}$, o modulo deste producto será $[(aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2]^{1/2} = (a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + b^2a'^2)^{1/2} = [(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)]^{1/2}$. Expressão igual ao producto dos modulos $(a^2 + b^2)^{1/2}$ e $(a'^2 + b'^2)^{1/2}$, das expressões factores. Referido ao caso da multiplicação, o caso da divisão nos indica facilmente que o modulo do quociente de duas irracionaes singulares é igual ao quociente de seus modulos. Chamando $a'' + b''(-1)^{1/2}$, o quociente entre $a + b(-1)^{1/2}$ e $a' + b'(-1)^{1/2}$, temos:

$$a + b(-1)^{1/2} = [a' + b'(-1)^{1/2}]\,[a'' + b''(-1)^{1/2}].$$

Como $(a^2 + b^2)^{1/2} = (a'^2 + b'^2)^{1/2}(a''^2 + b''^2)^{1/2}$, segue-se que $(a''^2 + b''^2)^{1/2} = \dfrac{(a^2 + b^2)^{1/2}}{(a'^2 + b'^2)^{1/2}}$. Estas ligeiras considerações são por demais sufficientes para fazer sentir a irracionalidade da classificação de *imaginarias* que habitos arithmeticos levaram a dar ás irracionaes singulares. Na Algebra directa, esta theoria deve ser apenas esboçada a mostrar a origem de taes expressões do estudo das equações do 2º gráo e firmar a sua verdadeira noção. Esta theoria, depois dos trabalhos de Euler, Moivre, Lagrange, Cauchy, tomou novo impulso, pela intervenção das formações trigonometricas. Sob um tal aspecto é que convém desenvolvel-a, pois só então ella permitte a mais ampla generalisação algebrica, e assim considerada ella é antes do dominio da Geometria que do da Algebra. Ella representa, de um modo brilhante, a reacção do dominio concreto da mathematica sobre o dominio abstracto, reacção que se manifesta em relação á Algebra directa particularmente na

Universidade de São Paulo
Filosofia
Departamento
Matemática

pelas suas consequencias. Ella resulta immediatamente da discussão que acima indicamos. Consiste em que se suppozermos variavel qualquer dos coefficientes a ou c da equação do 2º grau, a fórmula respectiva dará successivamente as tres especies de raizes; notando-se porém que *o caso da imaginariedade fica sempre separado do de realidade pelo caso de igualdade das duas raizes conjunctas.*

Com effeito, consideremos a fórmula das raizes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e supponhamos que os valores de x são a principio reaes, isto é, que $b^2 - 4ac$ é positivo. Attribuindo a c valores positivos e cada vez maiores, é claro que á differença $b^2 - 4ac$ vae decrescendo até que para o valor de c que torna $b^2 - 4ac$, esta differença é nulla: nesta hypothese já vimos que as raizes são iguaes a $\frac{-b}{2a}$. Mas si o valor de c continúa a crescer, a diflerença $b^2 - 4ac$ torna-se negativa e as raizes ficam imaginarias. Assim, pois, o caso de igualdade das raizes separa o caso de realidade do caso de imaginariedade.

Vemos ao mesmo tempo que o valor maximo de c que dá para x valores reaes, é aquelle que corresponde a igualdade das duas raizes, sobrevindo a imaginariedade destas, logo depois da passagem de c por este estado maximo.

Esta circumstancia permitte ligar á resolução das equações do 2º grau o problema que consiste em determinar o estado maximum ou minimum de uma formação algebrica. Historicamente considerada, esta questão apre-

---

resolução do *caso irreductivel* das equações do 3º grau, dada por Viète, e de um modo geral na resolução das equações binomias, e finalmente pelas relações estabelecidas por Euler entre o concreto e o abstracto, formulando o seno e o coseno em formação das exponenciaes singulares. (MORAES REGO — *Elementos de Algebra*).

senta-se desde as primeiras especulações mathematicas, mas só foi elaborada de modo definitivo depois do apparecimento da Geometria de Descartes e do Calculo de Leibnitz.

200 — VARIAÇÕES DE UMA FORMAÇÃO A UMA VARIAVEL: ESTADOS MAXIMA E MINIMA. — Considerando uma formação algebrica, racional e inteira a uma variavel, que representaremos em geral por $F(x)$, torna-se evidente que as suas variações ficarão dependentes dos valores particulares attribuidos a x. Si estes valores forem continuamente crescentes ou decrescentes e de tal sorte que a differença entre dois consecutivos se torne tão pequena quanto si quizer, duas hypotheses podem ter logar: ora a formação cresce ou decresce indefinidamente, o que raro acontece; ora cresce para depois decrescer e vice-versa, como succede geralmente. Neste ultimo caso póde acontecer, por exemplo, que os valores da formação sejam crescentes até o valor $F(g)$ e que logo em seguida comecem a decrescer até attingirem ao valor $F(p)$, tornando-se depois outra vez crescentes. Diz-se então que $F(g)$ é um estado *maximum* de $F(x)$ e que $F(p)$ é um *minimum*.

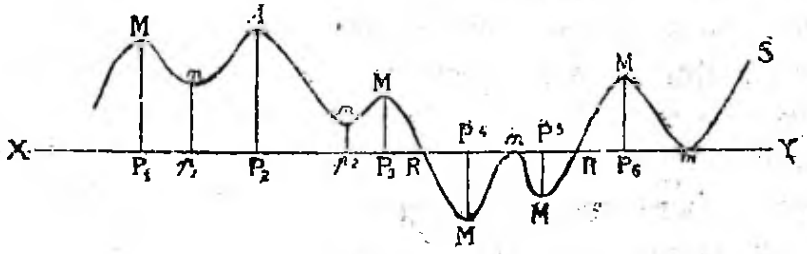
Maximum de uma formação é pois o valor particular que ella adquire, *maior* que os que precedem e seguem immediatamente; *minimum* de uma formação é o valor particular que ella toma, *menor* que os que precedem e seguem immediatamente.

Si, a partir do valor *minimum* $F(p)$, a formação considerada attingir a um valor $F(g)$ além do qual novamente ella se torna decrescente até $T(r)$ e em seguida outra vez crescente, ter-se-á em $F(g)$ um outro *maximum* e em $F(r)$ um outro *minimum*.

Resulta, portanto, que uma mesma formação, desde que esteja sujeita a variações successivamente crescentes e decrescentes, terá muitos *maxima* e muitos *minima*.

E da comparação das grandezas e dos signaes dos *maxima* e *minima*, póde resultar que um *maximum* se torne menor que um *minimum* e que uns e outros sejam positivos ou negativos.

E' o que claramente se vê na figura seguinte que mostra o perfil de um terreno accidentado e onde as alturas dos seus differentes pontos são referidas a uma linha horizontal XY. As rectas perpendiculares que representam estas alturas são os differentes valores de $F(x)$ correspondentes aos da variavel x que se contam desde os pés destas perpendiculares até um ponto fixo 0, tomado para origem.



Vê-se que neste perfil os pontos M correspondem aos *maxima* das alturas relativamente ás alturas dos pontos immediatamente vizinhos, e os pontos m correspondem aos *minima*; sendo que o *maximum* MP é menor que o *minimum* mp.

Nos pontos designados pela letra R, em que o perfil do terreno corta a linha XY, as alturas correspondentes são nullas, mas não constituem *minima*, porque em taes pontos o perfil não muda de direcção. Neste caso o valor zero é simplesmente um valor de tranzição das alturas positivas para as negativas, ou vice-versa, considerando-se como positivas as que ficam acima da linha XY e como negativas as que ficam abaixo.

O mesmo não se dá, porém, no ponto m, entre P_4 e P_5, para o qual a altura zero é um *minimum* bem caracterisado pela mudança de direcção do perfil.

Assim, nesta imagem geometrica dos valores *maxima* e *minima*, zero é *minimum* sómente quando o perfil do terreno é tangente a linha XY á qual são referidas as alturas dos seus differentes pontos. Aproveitando esta noção fornecida pelo facto concreto, podemos interpretar o valor zero que a formação $F(x)$ por ventura receber em virtude da variação continua de x: Não se deve consideral-o como *minimum* quando estiver comprehendido entre valores da formação que tenham signaes differentes. (29 b).

« As denominações de *maximum* e *minimum* são mui proprias a bem recordar em que consiste este genero de questões, porque indicam uma idéa de maior ou de menor valor, que, convenientemente definida, distingue com effeito estes estados notaveis. Uma formação não comportaria realmente nem *maximum* nem *minimum* si fosse sempre crescente ou sempre decrescente a medida que a sua variavel augmenta, quando mesmo tendesse indefinidamente para um limite assignalavel.

Si, porém, como na mór parte dos casos reaes, a formação é ora crescente, ora decrescente, cada passagem de um a outro estado será marcada por um valor *maximum* quando a formação cessa de augmentar para começar a diminuir, ou por um *minimum* no caso contrario. Estes estados criticos são alternativos, de sorte que todo *maximum* cae entre dois *minima*, e todo *minimum* entre dois *maxima*.

Vê-se assim que o valor *maximum* de uma formação é, com effeito, o maior, não de todo absolutamente, o que é muito raro, mas só desde o *minimum* precedente até ao *minimum* seguinte e da mesma sorte para o valor *minimum*. E' por isso que o uso tem consagrado aqui o emprego das denominações latinas, cuja traducção litteral indicaria uma definição viciosa. »

(29 b) — J. N. — *Revista Didactica*, n. 12, de 1903.

201 — ESTABELECIMENTO DO METHODO PROPRIO PARA DETERMINAR OS MAXIMA E MINIMA DAS FORMAÇÕES ALGEBRICAS A UMA VARIAVEL — Isto posto vejamos qual a marcha a seguir na determinação dos maxima e minima. Acabamos de vêr que os diversos valores de $F(x)$ resultam dos que recebe continuamente a variavel x. Nestas condições, o processo que espontaneamente se apresenta para determinar um estado qualquer de $F(x)$ consiste em apreciar directamente as variações desta formação quando se faz variar continuamente a variavel (29 c). Mas um tal methodo raramente póde ser applicado, porquanto exige que a formação seja sufficientemente simples ou que pelo menos se lhe possa dar uma fórma tal que permitta semelhante apreciação.

Emquanto as investigações mathematicas foram muito elementares, esta marcha poude convir; mas logo que as formações se complicaram a sua inefficacia tornou-se evidente, o que exigiu a instituição de um methodo mai systematico.

O principio em que este se baseia, embora oriundo de estudos geometricos, poude ser filiado ao exame das raizes da equação geral do 2º grau, conforme a observação que já fizemos a respeito da igualdade destas raizes separando a imaginariedade da realidade.

Para estabelecer este methodo, representemos por y os diversos valores que recebe $F(x)$ em consequencia das variações de x. E' claro que se poderá determinar reciprocamente os valores de x que correspondem a um certo valor fixado para y, desde que se resolva a equação $F(x) = y$ em relação a x.

Conforme os valores fixados para y, a fórmula obtida nos dará os valores correspondentes de x que, como vimos, poderão ser desiguaes, iguaes e imaginarios.

(29 c) Para maiores detalhes sobre esta marcha vêr a nota C, no fim deste paragrapho.

Ora, si augmentarmos ou diminuirmos successivamente o valor fixado para y, de modo que elle attinja todos os estados *maxima* e *minima*, os valores de x indical-os-ão um a um pela igualdade das raizes obtidas, porquanto vimos (199) que não podem passar da realidade a imaginariedade, ou vice-versa, sem que se tornem iguaes.

Dahi, pois, o seguinte processo para a determinação dos *maxima* e *minima*: *Iguala-se a formação dada $F(x)$ a uma indeterminada y, resolve-se a equação resultante relativamente a variavel x, e estabelece-se as condições que tornam reaes e iguaes os valores de x e que assim farão conhecer o valor limite de y. Este valor será um maximum si outro maior que elle tornar x imaginario; será um minimum si o mesmo acontecer para outro valor menor que elle.*

Como se vê, a determinação do *maximum* e *minimum* de uma formação a uma só variavel, fica dependendo da resolução da equação correspondente e das condições de realidade e de igualdade de suas raizes. Esta questão não póde, portanto, ser resolvida pela Algebra elementar sinão para a formação do 2º, 3º e 4º gráos (29 d), sendo que para as duas ultimas torna-se mais facil tratal-a pelo Calculo transcendente. Devemos, pois, limitar este estudo ao caso

---

(29) « E' verdade que a Algebra Superior aperfeiçoa muito este methodo primitivo, baseando-se ainda no caracter especial de igualdade que distingue os valores de x quando y é *maximum* ou *minimum*. Segundo esta *consideração fundamental o maximum ou minimum de y acha-se sempre caracterisado directamente pela propriedade de fazer a equação $f(x) - y = 0$ adquirir raizes iguaes*, o que permitte se determinar estes valores principaes, sem ter necessidade de resolver esta equação, limitando-se a formular nella a igualdade de duas raizes. Veremos que para isto bastará dividir o seu primeiro membro por $(x - b)^2$ e o resto identicamente annullado, fornecerá duas equações para determinar y por meio dos coefficientes da equação dada, e ao mesmo tempo h que constitue precisamente o valor procurado de x. Apezar deste progresso do

usual das formações algebricas do 2º grau a uma variavel que podemos sempre suppôr inteiras.

202 — MAXIMA E MINIMA DAS FORMAÇÕES DO 2º GRAU: SUA DETERMINAÇÃO — Dois casos principaes podem ser considerados, conforme a formação é completa ou incompleta.

Primeiro caso: Sabemos que todas as formações inteiras e completas do 2º grau podem tomar a fórma

$$ax^2 + bx + c$$

e que na equação correspondente o signal do coefficiente b nenhuma influencia exerce sobre a realidade ou imaginariedade das suas raizes. Póde-se, portanto, suppôr este coefficiente positivo ou negativo e considerar sómente os signaes de a e c, resultando então as seguintes hypotheses:

1ª Hypothese. *Os coefficientes a e c são ambos positivos.* A formação terá a fórma

$$ax^2 \pm bx + c \qquad (1)$$

Igualando-a a uma indeterminada y, a questão reduz-se, como vimos, em descobrir para y um valor limite tal que x seja sempre real para outros valores de y menores ou maiores que aquelle; e isto consegue-se resolvendo-se a equação

$$ax^2 \pm bx + c = y$$

Ter-se-á

$$x = \frac{\mp b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a}$$

ou

$$x = \frac{\mp b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac) + 4ay}}{2a}$$

---

methodo primitivo fica elle naturalmente limitado ás formações algebricas ao mesmo tempo racionaes e inteiras: De sorte que só o calculo transcendente pode resolver a questão em todos os casos, graças a intervenção das curvas de que emana historicamente a primeira noção geral do principio citado, apezar de poder-se hoje concebel-o de uma maneira puramente abstrata.»

A quantidade $b^2 - 4ac$ podendo ser positiva, negativa, ou nulla, ha tres casos a examinar:

1.° Si $b^2 - 4ac$ é positivo, x será real para qualquer valor positivo de y, e, para y negativo, sómente quando se tiver $4ay \leqq (b^2 - 4ac)$ ou $y \leqq \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

A formação considerada (1) tem, pois, seu *maximum* negativo que é

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

a qual correspondem os dois valores iguaes

$$\mp\frac{b}{2a} \textit{ da variavel } x.$$

2.° Si $b^2 - 4ac$ é negativo, x será real sómente para valores positivos de y taes, que se tenha $4ay \geqq (4ac - b^2)$ ou $y \geqq \frac{4ac - b^2}{4a}$.

A formação proposta (1) tem, pois, um *minimum* positivo, representado por

$$+\frac{4ac - b^2}{4a}$$

ao qual correspondem os dois valores iguaes $\mp\frac{b}{2a}$ da variavel x.

3.° Si $b^2 - 4ac$ é nullo, os valores de x tornam-se imaginarios para y negativo, e serão reaes para y nullo ou positivo. Nestas condições póde y tomar todos os valores desde $+\infty$ até zero sem que x deixe de ser real, e de zero a $-\infty$, tornando-se x imaginario. O menor valor de y que torna x real é, portanto, zero; de sorte que a formação considerada (1) tem um *minimum* que é zero, ao qual correspondem dois valores iguaes para a variavel x.

2ª. Hypothese. *O coefficiente a é ainda positivo e c negativo.* A formação do 2° gráo é, pois, do typo

$$ax^2 \pm bx - c \qquad (2)$$

Igualando-a a indeterminada y e resolvendo a equação obtida, virá

$$x = \frac{\mp b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 + 4a(c + y)}}{2a}$$

ou

$$x = \frac{\mp b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac) + 4ay}}{2a}$$

A variavel x será real para todos os valores positivos de y, e para y negativo sómente quando $4ay \gtrless (b^2 + 4ac)$ ou $y \gtrless \frac{b^2 \quad 4ac}{4a}$. A formação proposta (2) terá, pois, um *maximum* negativo $-\frac{b^2 + 4ac}{4a}$, ao qual, como sempre correspondem dois valores iguaes para x.

3ª. Hypothese. *O coefficiente a é negativo e c positivo.* A formação é do typo

$$-ax^2 \pm bx + c \qquad (3)$$

Resolvendo a equação

$$-ax^2 \pm bx + c = y,$$

ou

$$ax^2 \mp bx - c = -y,$$

relativamente a x, virá

$$x = \frac{\pm b \pm \sqrt{b^2 + 4a(c - y)}}{2a}$$

ou

$$x = \frac{\pm b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(b^2 + 4ac) - 4ay}}{2a}$$

A variavel x será real para todos os valores negativos de y, para $y = 0$, bem como para os valores positivos que tornarem $4ay \leqq (b^2 + 4ac)$, isto é, para $y \leqq \frac{b^2 + 4ac}{4a}$; dahi em diante será x imaginario.

A formação (3) tem, pois, um *maximum* positivo $+\frac{b^2+4ac}{4a}$, ao qual correspondem dois valores iguaes para a variavel, isto é, $\pm\frac{b}{2a}$.

4ª. Hypothese: *Os coefficientes a e c são ambos negativos.* A formação do 2º grau será da fórma $-ax^2 \pm bx - c$ (4).

Igualando-a a y e multiplicando ambos os membros da equação obtida por -1, virá

$$ax^2 \mp bx + c = -y,$$

cuja resolução nos dá

$$x = \frac{\pm b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4a(c+y)}}{2a}$$

ou

$$x = \frac{\pm b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac) - 4ay}}{2a}$$

E' preciso aqui distinguir-se tres casos:

1º. Si a differença $b^2 - 4ac$ fôr positiva, x será real para todos os valores negativos de y, para y nullo, e para y positivo, mas sómente quando se tiver $4ay \leqq (b^2 - 4ac)$, isto é para $y \leqq \frac{b^2-4ac}{4a}$. Nestas condições, a formação terá um maximo positivo

$$+\frac{b^2-4ac}{4a}$$

ao qual correspondem dois valores iguaes para x.

2º. Si $b^2 - 4ac$ fôr negativo, x será real sómente para valores negativos de y que satisfizerem á condição $4ay \geqq (4ac - b^2)$ da qual se deduz $y \geqq \frac{4ac-b^2}{4a}$. Haverá, pois, para a formação considerada (4) um *minimum* negativo $-\frac{4ac-b^2}{4a}$ ao qual correspondem dois valores iguaes para x.

3.º Si $b^2 - 4ac$ fôr nullo, a variavel x será real para y negativo e para y igual a zero, tornando-se imaginaria para qualquer valor positivo de y. A formação terá, pois, um *minimum* que é zero, havendo dois valores iguaes para a variavel,

Segundo caso: Formação inteira e incompleta.

São seis as hypotheses a considerar:

1ª. Falta á formação o termo independente da variavel, sendo a positivo: $ax^2 \pm bx$.

Resolvendo a equação $ax^2 \pm bx = y$, obtem-se

$$x = \frac{\mp b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 + 4ay}}{2a}$$

Sómente valores negativos de y podem tornar x real são os que resultam da condição

$$4ay \leqq b^2, \text{ donde } y \leqq \frac{b^2}{4a},$$

o que indica ter a formação proposta um *maximum* negativo que é $-\frac{b^2}{4}$, ao qual corresponde dois valores iguaes para a variavel.

2ª. Falta á formação o termo constante, sendo a negativo: $-ax^2 \pm bx$.

Ter-se-á então $-ax^2 \pm bx = y$ ou $ax^2 \mp bx = -y$, donde

$$x = \pm \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ay}}{2a}.$$

Os valores positivos de y, unicos que tornam x real são dados pela condição

$$4ay \gtreqless b^2 \text{ ou } y \gtreqless \frac{b^2}{4a}.$$

Ha, pois, um *maximum* positivo, que é $+\frac{b^2}{4a}$, a que correspondem dois valores para a variavel.

3ª. Falta á formação o termo em x, sendo a e c positivos: $ax^2 + c$.

Os valores de x deduzidos da equação $ax^2 + c = y$ são expressos por $x = \pm\sqrt{\frac{y-c}{a}}$.

Para y positivo elles serão reaes, mas sómente quando se tiver $y \geqq c$.

A formação terá então um *minimum* positivo + c, havendo dois valores iguaes para a variavel.

4ª. Falta á formação o termo em x, sendo a positivo e c negativo: $ax^2 - c$.

Da equação $ax^2 - c = y$, ter-se-á

$$x = \pm\sqrt{\frac{y+c}{a}}.$$

A variavel x, sempre real para y positivo, sel-o-á para y negativo sómente quando fôr $y \leqq c$, o que indica ter a formação um *maximum* negativo $-c$, havendo dois valores iguaes para a variavel.

5ª. Falta á formação o termo em x, sendo a negativo e c positivo: $-ax^2 + c$.

A equação $-ax^2 + c = y$, ou $ax^2 - c = -y$ nos dá

$$x = \pm\sqrt{\frac{c-y}{a}}.$$

Os valores negativos de y tornam x imaginario; mas os positivos o fazem real sob a condição ds ser $y \leqq c$.

A formação admitte, pois, um *maximum* positivo + c, havendo então dois valores iguaes para a variavel.

6.ª Falta á formação o termo em x, sendo a e c negativos: $-ax^2 - c$.

Fazendo $-ax^2 - c = y$ ou $ax^2 + c = -y$, obtem-se

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c-y}{a}}.$$

Para y positivo ou nullo os valores de x serão imaginarios, mas tornar-se-ão reaes para y negativo $y \geqq c$.

A formação terá, pois, um *minimum* negativo $-c$.

O quadro em seguida resume toda a discussão precedente e mostra ao mesmo tempo:

1°, que a formação do 2° grau completa terá um *maximum* sempre que a quantidade $b^2 - 4ac$ fôr positiva;

2°, que a mesma formação terá um *minimum* sempre que a quantidade $b^2 - 4ac$ fôr nulla ou negativa;

3°, que a formação do 2° grau incompleto tem sempre um *maximum* quando é o termo constante que lhe falta, ou quando, faltando-lhe o termo em x, os dois outros que a compõem têm signaes contrarios;

4°, finalmente, que a formação do 2° grau incompleta, em que falta o termo em x, tem um *minimum* sempre que os dois termos que a compõem têm o mesmo signal.

QUADRO SYNOPTICO DAS MAXIMA E MINIMA DAS FORMAÇÕES DO 2° GRAU A UMA VARIAVEL

Formação completa	$+ ax^2 \pm bx + c$	$b^2 > 4ac$	$M = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$
		$b^2 < 4ac$	$m = +\frac{4ac - b^2}{4a}$
		$b^2 = 4ac$	$m = 0$
	$+ ax^2 \pm bx - c$		$M = -\frac{(b^2 + 4ac)}{4a}$
	$- ax^2 \pm bx + c$		$M = +\frac{b^2 + 4ac}{4a}$
	$- ax^2 \pm bx - c$	$b^2 > 4ac$	$M = +\frac{b^2 + 4ac}{4a}$
		$b^2 < 4ac$	$m = -\frac{(4ac - b^2)}{4a}$
		$b^2 = 4ac$	$m = 0$
Formação incompleta	$+ ax^2 \pm bx$		$M = -\frac{b^2}{4a}$
	$- ax^2 \pm bx$		$M = +\frac{b^2}{4a}$
	$+ ax^2 + c$		$m = +c$
	$+ ax^2 - c$		$M = -c$
	$- ax^2 + c$		$M = +c$
	$- ax^2 - c$		$m = -c$ (29 e)

(29 e) J. N. — *Revista Didactica*, n. 12, de 1903. (Convirá dividir este paragrapho em duas lições oraes, terminando aqui a primeira.

203 — Os exemplos seguintes nos exercitarão no emprego deste processo.

1º Exemplo. Determinar os *maxima* ou *minima* da formação

$$x^2 - 7x + 5.$$

Teremos

$$x^2 - 7x + 5 = y,$$

donde

$$x = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{49 - 4(5 - y)}}{2}$$

ou

$$x = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{29 + 4y}}{2}$$

Fazendo $29 + 4y = 0$, tira-se $y = -\frac{29}{4}$, que é um *maximum* negativo da formação proposta, porque qualquer valor maior que elle tornaria x imaginario. O duplo valor desta variavel é então $\pm \frac{7}{2}$.

2º Exemplo: $7x^2 + 5x + 3$.

Teremos

$$7x^2 + 5x + 3 = y$$

donde

$$x = -\frac{5}{14} \pm \frac{\sqrt{-59 + 28y}}{14}.$$

Fazendo $-59 + 28y = 0$, virá

$$y = \frac{59}{28},$$

que é um *minimum* positivo, porquanto qualquer outro valor menor faria x imaginario.

A segunda poderá abranger o resto do mesmo paragrapho e os tres primeiros numeros do seguinte, bastando que as quatro ultimas sejam lidas pelos alumnos. Por este modo o numero total de lições verbaes não soffre alteração).

3º Exemplo. Seja ainda $x^2 - 6x + 9$.

Teremos

$$x^2 - 6x + 9 - y = 0$$

donde

$$x = 3 \pm \frac{\sqrt{36 - 36 + 4y}}{2},$$

onde se vê que ha um *minimum*, $y = 0$.

4º Exemplo. Seja ainda $3x^2 + 4x - 7$.

Teremos

$$3x^2 + 4x - (7 + y) = 0,$$

donde

$$x = -\frac{4}{6} \pm \frac{\sqrt{100 + 12y}}{6};$$

fazendo $100 + 12y = 0$, virá $y = -\frac{100}{12}$ que é um *maximum* negativo, porque outro maior faria x imaginario.

5º Exemplo. Seja $-3x^2 - 2x + 7$.

Teremos

$$3x^2 + 2x - (7 - y) = 0,$$

donde

$$x = -\frac{2}{6} \pm \frac{\sqrt{88 - 12y}}{6};$$

fazendo $88 - 12y = 0$, virá $y = \frac{88}{12}$, que é um *maximum* positivo, visto como outro maior faria x imaginario.

6º Exemplo. Seja ainda $-3x^2 + 5x$.

Teremos

$$-3x^2 + 5x = y$$

ou

$$3x^2 - 5x = -y$$

ou

$$3x^2 - 5x + y = 0$$

donde

$$x = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{25 - 12y}}{6};$$

pondo $25 - 12y = 0$, virá $y = \frac{25}{12}$ que é um *maximum* positivo.

7º Exemplo: Seja, emfim, $\frac{3}{5}x^2 + 2$

Teremos

$$\frac{3}{5}x^2 + 2 = y$$

ou

$$3x^2 + 10 = 5y,$$

ou

$$3x^2 + 10 - 5y = 0$$

ou ainda

$$3x^2 + 5(2 - y) = 0,$$

donde

$$x^2 = \frac{5(y-2)}{3}$$

ou

$$x = \pm\sqrt{\frac{5(y-2)}{3}};$$

fazendo $5(y-2) = 0$, acha-se $y = 2$, que é um *minimum* positivo, pois que qualquer outro menor faria x imaginario.

204 — Supponhamos emfim que se trata de resolver a questão seguinte: *A somma de duas quantidades variaveis, sendo constante, verificar quando o seu producto é maximum.*

Representando por a a somma dada, por x e y os dois factores variaves e por z o producto tambem variavel, cujo *maximum* se procura, teremos as equações

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = z. \end{cases}$$

Eliminando y entre ambas, teremos

$$y = a - x,$$

donde

$$x(a - x) = z$$

ou

$$x^2 - ax + z = 0.$$

A questão fica reduzida a achar o *maximum* de z nesta equação do 2º grau, que resolvida nos dá

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - z}.$$

Fazendo $\frac{a^2}{4} - z = 0$, vê-se que $\frac{a^2}{4}$ é o *maximum* valor de z, visto como qualquer outro maior faria x imaginario.

Mas, sendo $z = \frac{a^2}{4}$, será

$$xy = \frac{a^2}{4},$$

e por ser $x + y = a$, deduz-se que

$$x = \frac{a}{2} \text{ e } y = a - x = \frac{a}{2}.$$

Concluimos, portanto, que *a somma de duas quantidades variaveis sendo constante seu producto será maximum quando ellas forem iguaes entre si e a metade da somma dada.*

Não ha aqui producto *minimum*; porque si o valor dado a um dos factores, x por exemplo, exceder a somma constante a, o outro factor y tornar-se-á negativo, e tanto maior quanto x positivamente. O producto z ficará tambem negativo, podendo por conseguinte crescer até $-\infty$ sem que a condição de realidade da variavel x cesse de existir.

Generalisando a conclusão a que acima chegamos, é facil de mostrar que *o producto de n factores positivos e variaveis que têm uma somma constante é maximum quando todos estes factores são iguaes entre si e a nª parte da somma constante.*

Com effeito, seja a a somma dada, $x, y, z \ldots t$ os factores variaveis e P o producto variavel.

Teremos

$$\begin{cases} x + y + z + \ldots + t = a \\ xyz \ldots t = P \end{cases}$$

Para que P exprima o *maximum* procurado, é preciso que dois factores quaesquer do producto x e y, por exemplo, sejam iguaes entre si; mesmo porque si assim não fôr, poder-se-á substituir cada um desses factores por sua semi-somma $\frac{x+y}{2}$.

A somma a não será modificada e teremos então, em vista do que acima foi dito, $\frac{x+y}{2} \times \frac{x+y}{2} > xy$ ou multiplicando ambos os membros desta desigualdade por todos os outros factores

$$\frac{x+y}{2} \times \frac{x+y}{2} \times z \ldots . t > P$$

Ora, desde que dois factores quaesquer do producto formado não são iguaes entre si, poder-se-á achar um producto maior. Portanto o producto obtido só será *maximum* quando se tiver

$$x = y = z = \ldots . = t = \frac{a}{n}$$

As duas conclusões precedentes fornecem a solução immediata de um grande numero de problemas geometricos.

Por exemplo, supponhamos se se trata de saber dentre todos os rectangulos do mesmo perimetro $2p$, qual é aquelle cuja area é *maximum*.

A somma da base x e da altura y sendo constantemente igual a p, concluimos logo que o seu producto xy ou a area do rectangulo será *maximum* quando fôr $x = y = \frac{p}{2}$, isto é, quando o *rectangulo* tornar-se um *quadrado*.

Propondo-se ainda saber qual o triangulo rectangulo de superficie ou de perimetro *maximum*, achar-se-á immediatamente que os dois lados do angulo recto deverão

Universidade de S. Paulo
Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

ser iguaes. Pela mesma razão para o triangulo de superficie *maximum* inscriptivel num circulo, achar-se-á aquelle cujos lados são iguaes, isto é, o *equilatero*, e etc.

NOTA C — Para esclarecermos este processo, vamos estudar dois exemplos em que as formações consideradas são do 2º grau.

1º Exemplo :

Seja a formação geral, racional e inteira do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para determinar os *maxima* e *minima* desta formação pelo methodo espontaneo, vamos transformal-a de modo a reduzil-a a uma fórma sufficientemente simples que nos permitta apreciar sua variação quando varia a variavel independente x.

Para isto façamos $f(x) = az$, sendo:

$$z = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

A questão fica por esta fórma reduzida ao estudo da formação $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$, a qual póde ser transformada do seguinte modo:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

Temos assim a formação z decomposta em duas partes, uma independente de x e a outra não. Esta ultima parte sendo muito simples, podemos estudar as suas variações correspondentes ás variações de x.

Quando x decresce de $-\infty$ a $-\frac{b}{2a}$ a expressão

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

decresce de $+\infty$ a o, e, portanto, z decresce de $+\infty$ a $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$; continuando x a decrescer até zero a expressão $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ cresce de o a $\frac{b^2}{4a^2}$ e z cresce de $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ a $\frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac - b^2}{4a^2}$ ou $\frac{c}{a}$. Ao valor, pois, $-\frac{b^2}{2a}$ de x corresponde o valor $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ da formação z, depois da qual esta formação de decrescente que era torna-se crescente, isto é, ao valor $-\frac{b}{2a}$ de x corresponde um *minimum* $\frac{6ac - b^2}{4a^2}$ para a formação z. Si x continuar a crescer de o a $+\infty$, a expressão $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, crescerá de $\frac{b^2}{4a^2}$ a $+\infty$, a formação z cres-

cerá tambem de $\frac{c}{a} + \infty$; e então não haverá nem *maximum* nem *minimum* em todo este intervallo.

Considerando agora a igualdade $f(x) = az$, e substituindo z pelo *minimum* achado, temos que para o valor $\frac{b}{2a}$ de x na formação $f(x)$, resulta o valor *minimum* $\frac{4ac - b^2}{4a}$ para esta formação.

2º Exemplo. Consideremos agora a formação :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

Para esta formação o methodo directo não é applicavel e o methodo indirecto é muito simples e expedito.

Igualando a formação á uma indeterminada, temos

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = m$$

Resolvendo em relação a x, temos :

$$x = \frac{b - mb'}{2(a - ma')} \pm \frac{[(b - mb')^2 - 4(a - ma')(c - mc')]^{1/2}}{2(a - ma')} \quad \text{(a)}$$

A condição para que os valores de x sejam reaes é que os valores de m sejam taes que a differença $(b - mb')^2 - 4(a - ma')(c - mc')$ seja positiva ou nulla. Transformando esta expressão e ordenando em relação a m, a condição para que os valores de x sejam reaes será que a expressão, $(b'^2 - 4c'a')m^2 + 2m(2ac' + 2ca' - bb') + b' - 4ac$, seja positiva ou nulla. Fazendo as contracções: $p = b'^2 - 4c'a'$, $q = 2ac' + 2ca' - bb'$, $r = b^2 - 4ac$ esta expressão tomará a fórma: $pm^2 + 2mq + r$.

Temos agora tres casos a considerar segundo as raizes da equação em m : $pm^2 + 2mq + r = o$ são reaes, iguaes ou singulares.

Consideremos o primeiro caso. Sejam m' e m'' as duas raizes desta equação e seja $m'' > m'$. Segundo a decomposição estudada na equação do 2º grau, temos a igualdade :

$$pm^2 + 2mq + r = p(m - m')(m - m''). \qquad (1)$$

Sendo m' menor de que m'', é claro que se suppozermos m crescendo continuamente de zero até m' para todos estes valores de m

menores que m' os factores do segundo membro de (1) serão negativos e, portanto, o producto será positivo; e quando $m = m'$ o producto será nullo e, portanto, o trinomio $pm^2 + 2mq + r$ tambem o será.

Si m toma valores comprehendidos entre m' e m'', isto é, maiores que m' e menores que m'' o trinomio $pm^2 + 2mq + r$ será negativo para esses valores, pois que o producto (1) terá o primeiro factor $(m - m')$ positivo, e o segundo $(m - m'')$ negativo, e como este trinomio está no valor de x affecto da raiz quadrada, os valores de x tornam-se singulares. O valor m' é pois o limite além do qual x torna-se singular, e constitue um valor *maximum* da formação dada. Este *maximum*, como vimos, resulta da hypothese $m = m'$, ou $pm^2 + 2mq + r = o$ que corresponde ao caso de igualdade das raizes da equação (a). Si suppozermos m decrescendo continuamente de $+\infty$ até m'' para todos estes valores maiores que m'' a expressão $(m - m')(m - m'')$ será positiva até o valor $m = m''$ para o qual ella é nulla; continuando m a decrescer, isto é, tomando valores comprehendidos entre m' e m'' o producto $(m - m')(m - m'')$ torna-se negativo e x apresenta-se sob a fórma irracional singular.

O valor m'' constitue, pois, o limite aquem do qual x se torna singular e constitue um minimum da formação dada. Este valor annullando a expressão affecta da raiz no valor de x, corresponde ao caso da igualdade das raizes da equação (a) em x.

Segue-se daqui que a formação dada póde receber todos os valores desde zero até m' e desde m'' até o infinito, e não póde receber nenhum valor comprehendido entre m' e m''.

Si as duas raizes são negativas, temos: $pm^2 + 2qm + r = p(m + m')(m + m'')$. Neste caso se m varia continuamente de o até ∞ o valor do producto, e portanto do 1º membro, será sempre positivo, e por conseguinte os valores de x serão normaes para todos esses valores. A formação neste caso não tem maximo.

Si uma das raizes m' é negativa e a outra positiva, temos:

$$pm^2 + 2qm + r = p(m + m')(m - m'')$$

Esta expressão será negativa para todo valor de m menor do que m'' e será positiva para todo valor de m comprehendido entre m' e $+\infty$. Os valores de x serão, pois, normaes em quanto m tomar valores comprehendidos entre $+\infty$ e m'', si m continuar a decrescer x torna-se singular. O valor m'' representa assim o limite aquem do qual x é singular, e constitue um *minimum* da formação dada.

Supponhamos agora as raizes m' e m'' iguaes. Neste caso a formação $pm^2 + 2mq + r$ é igual a $p(m - m')^2$ expressão que será positiva qualquer que seja o valor dado a m. Não ha, por conse-

guinte nesta hypothese, nem *maximum* nem *minimum* para a formação dada, pois x será normal para todo o valor m.

Finalmente, si as raizes m' e m'' forem irracionaes singulares, temos :

$$pm^2 + 2qm + r = p\left[\left(m + \frac{q}{p}\right)^2 + \frac{rp - q^2}{p^2}\right]$$

expressão que será positiva qualquer que seja o valor de m e, portanto, x será tambem normal para todos esses valores.

Estes exemplos bastam para fazer comprehender o espirito do methodo espontaneo empregado na Algebra para conhecer os *maxima minima* e de uma formação.

§ 30

Resolução das equações do 2° grau no caso de um systema de igual numero de incognitas; sua inexequibilidade em vista do grau da equação final. Exemplos e problemas do 2° grau. Equações irracionaes que se transformam em racionaes do 1° ou 2° graus.

205 — Vamos apreciar agora a resolução quando se considera um systema de duas ou mais equações do 2° grau a igual numero de incognita. Para resolver esta questão em todos os casos, seria preciso que, a semelhança do 1° grau, podessemos applicar-lhe convenientemente a concepção geral que reduz a difficuldade de *eliminar* a de resolver.

Ora, semelhante transformação só raramente póde ser conseguida, porquanto veremos que conduz quasi sempre a uma equação insoluvel. Si no caso do 1° grau é possivel resolver um numero qualquer de equações simultaneas com outras tantas incognitas, é isto devido a excepção que apresenta a respeito da equação que resulta finalmente das eliminações successivas.

Veremos em Algebra superior que o *grau desta equação final attinge sempre ao producto dos graus das equações primitivas*; de sorte que será do 4° grau no caso de duas equações simultaneas do 2° grau a duas incognitas, do 8° grau no caso de tres, e assim por diante. Dahi resulta quasi sempre a inexequibilidade da questão, porque não sabemos resolver algebricamente as equações além do 4° grau.

Nestas condições, a resolução das equações simultaneas do 2° grau sómente é possivel no caso mais simples de duas equações a duas incognitas onde a equação final é do 4° grau. Como, porém, a formula resolutiva desta equação se torna por fim inextricavel, a segunda phase algebrica deve reduzir-se essencialmente ao caso de uma

só incognita. « Este estudo, apezar de assim restricto deve normalmente ficar tão memoravel sob o ponto de vista dogmatico, como o é historicamente ; por isso que introduz como vimos duas noções geraes, uma de methodo e a outra de doutrina, que não podiam surgir antes.»

206 — Entretanto, para nos exercitarmos na pratica da *eliminação*, vejamos como se poderia obter a equação final resultante da eliminação de qualquer das duas incognitas entre duas equações simultaneas do 2º grau. Teremos, além disto, a vantagem logica de confirmar o que acima foi dito a respeito do grau da equação final que neste caso deve ser o 4º.

Sabemos que o systema em questão póde ser representado sob a fórma

$$\left.\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ a'x + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Para maior facilidade do calculo, eliminemos y^2 entre as duas equações. Para isto multipliquemos a primeira por c', coefficiente de y^2 na segunda, e a segunda por c, coefficiente de y^2 na primeira, e depois subtraíamos uma da outra, membro a membro.

Virá assim

$$(ac' - ca')\,x^2 + (bc' - cb')\,xy + (dc' - cd')\,x + \\ + (ec' - ce')\,y + (fc' - cf') = 0 \quad (2)$$

Esta equação (2) formará com uma das primitivas (1) um systema equivalente ao proposto. Sendo ella do 1º grau em relação a y, nos dá immediatamente

$$y = -\frac{(ac' - ca')\,x^2 + (dc' - cd')\,x + (fc' - cf')}{(bc' - cb')\,x + (ec' - ce')}$$

Substituindo esta expressão na primeira das equações dadas, expellindo os denominadores e effectuando os cal-

culos, achar-se-á evidentemente uma equação completa do 4º grau, encerrando apenas a incognita x; será da fórma

$$mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0 \qquad (3)$$

Adiante veremos que esta equação fornece quatro valores para x, donde resultarão, portanto, outros quatro para y, de sorte que o systema considerado admitte quatro soluções.

207 — No caso especial em que o systema proposto contém apenas uma equação do 2º grau e as restantes do 1º, todas em numero igual ao de incognitas, a equação a uma incognita resultante das eliminações successivas, será pela mesma razão do 2º grau.

Para obtel-a, supponhamos que o systema proposto contém $(m - 1)$ equações do 1º grau e uma do 2º, encerrando todas as m incognitas $x, y, z \ldots . t$. Deduziremos então das $(m - 1)$ equações do 1º grau as $(m - 1)$ incognitas $y, z \ldots t$, em formação da restante x, supposta conhecida. Substituindo os valores destas incognitas na m^a equação do 2º grau, obter-se-á uma equação tambem do 2º grau, mas encerrando apenas a incognita x. Esta equação fornecendo para tal incognita dois valores x' e x'', resultarão immediatamente, para cada uma das $(m - 1)$ incognitas restantes, os valores correspondentes y' e y'', z' e z'', ... t' e t''.

Tomemos, por exemplo, o systema formado de duas equações completas a duas incognitas, uma do 1º grau e a outra do 2º, isto é

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Resolvendo a primeira equação em relação a y, este systema póde sempre tomar a fórma

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0 \end{aligned}$$

Eliminando y por substituição na segunda, obtem-se a equação

$$Ax^2 + Bx(ax + b) + C(ax + b)^2 + Dx + E(ax + b) + F = 0,$$

onde effectuando os calculos e fazendo

$$A + Ba + Ca^2 = M,\ Bb + 2Cab + D + Ea = N,$$
$$Cb^2 + Eb + F = P,$$

chega-se a

$$Mx^2 + Nx + P = 0$$

equação do 2º grau a uma incognita.

Tendo ella duas raizes x' e x'' resultarão para y os correspondentes

$$y' = ax' + b \text{ e } y'' = ax'' + b;$$

de sorte que o systema proposto admitte as duas soluções x' e y', x'' e y'', e não póde admittir mais.

Si o systema proposto contivesse uma equação do 3º grau e outra do 1º, a duas incognitas, a eliminação de uma destas nos conduziria a uma equação do 3º grau; de sorte que multiplicando estes casos se poderia provar inductivamente a proposição acima, relativa ao grau da equação final. Mas torna-se inutil fazel-o porquanto na Algebra superior receberá mais a proposito a respectiva demonstração.

208. — **Exemplos:**

1º. Seja a resolver o systema

$$3x + 2y = 1,7,$$
$$3x^2 + y^2 - x = 0,26.$$

Da primeira equação se tira

$$y = \frac{1,7 - 3x}{2}$$

de sorte que a segunda se torna por substituição

$$3x^2 + \left(\frac{1,7 - 3x}{2}\right)^2 - x = 0,26,$$

donde

$$21x^2 - 14,2x + 1,85 = 0$$

que fornece

$$x = \frac{7,1 \pm \sqrt{50,41 - 38,85}}{21} = \frac{7,1 \pm 3,4}{21},$$

isto é

$$x' = 0,5 \text{ e } x'' = 0,1762,$$

a menos de 0,0001 por excesso.

Substituindo estes valores de x no de y, virá

$$y' = \frac{1,7 - 1,5}{2} = 0,1 \text{ e } y'' = \frac{1,7 - 0,5286}{2} = 0,5857,$$

a menos de 0,0001 por excesso.

2°. Seja a resolver o systema

$$y - x = a$$

$$xy = b.$$

Si fizermos $x = -x'$, o systema torna-se

$$y + x' = a$$

$$x'y = -b$$

De sorte que se conhece a somma e o producto das duas quantidades y e x', que serão, portanto, as raizes da equação

$$z^2 - az - b = 0,$$

donde

$$z = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Por conseguinte

$$y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \text{ e } x' = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2},$$

isto é,

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Ter-se-á, emfim, por substituição para o 2º par de valores

$$y = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \text{ e } x' = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Seja a resolver o systema

$$y + ax = m + an,$$

$$y^2 + x^2 = m^2 + n^2,$$

Vê-se immediatamente que este systema é satisfeito por $y = m$ e $x = n$: trata-se sómente de obter o segundo par de valores. A primeira equação dá

$$y = m + an + ax.$$

A segunda torna-se então

$$(m + an - ax)^2 + x^2 = m^2 + n^2,$$

donde

$$(a^2 + 1)x^2 - 2a(m + an)x + 2amn + n^2(a^2 - 1) = 0.$$

O producto das raizes x' e x'' tem por expressão

$$x'x'' = \frac{2amn + n^2(a^2 - 1)}{a^2 + 1}.$$

A raiz x' sendo igual a n, ter-se-á

$$x'' = \frac{2am + n(a^2 - 1)}{a^2 + 1}$$

Substituindo este valor por x'' no de y, acha-se

$$y'' = m + an - \frac{2a^2m + an(a^2 - 1)}{a^2 + 1} = \frac{2an - m(a^2 - 1)}{a^2 + 1}$$

4°. Seja a resolver o systema

$$x + y = a$$
$$x^2 + y^2 = b^2.$$

A primeira equação dá $y = a - x$, e a segunda torna-se por substituição

$$x^2 + (a - x)^2 = b^2,$$

isto é,

$$2x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0,$$

donde

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2a^2 + 2b^2}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}.$$

Por conseguinte

$$y = \frac{a \mp \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}.$$

5°. Seja finalmente, a resolver o systema

$$x + y = a,$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = b.$$

Expellindo os denominadores, a segunda equação torna-se

$$x^2 + y^2 = bxy.$$

Da primeira equação tira-se

$$y = a - x,$$

que substituido na precedente, dá

$$x^2 + (a - x)^2 = bx(a - x),$$

donde

$$(2 + b)x^2 - a(2 + b)x + a^2 = 0$$

e

$$x = \frac{a(2 + b) \pm \sqrt{a^2(2 + b)^2 - 4a^2(2 + b)}}{2(2 + b)}$$

Fazendo sahir a^2 do radical e simplificando, virá

$$x = \frac{a(2+b) \pm \sqrt{b^2-4}}{2(2+b)}$$

Póde-se simplificar a expressão de x, dividindo os dois termos por $2+b$, observando que para dividir o radical por esta quantidade é preciso dividir b^2-4 pelo seu quadrado $(2+b)^2$ e que b^2-4 equivale a $(b+2)(b-2)$; si além disto o factor commum $\frac{a}{2}$ é posto em evidencia, virá

$$x = \frac{a}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\right)$$

e por conseguinte

$$y = \frac{a}{2}\left(1 \mp \sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\right).$$

6.º Seja finalmente proposto determinar os valores de x e y na expressão

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

sabendo-se que

$$x+y=a \text{ e } 2\sqrt{xy} = \sqrt{b}, \text{ ou } 4xy = b.$$

Estas duas equações nos fornecendo a somma a e o producto b das duas quantidades x e y, teremos as expressões destas mediante a equação

$$z^2 - az + \frac{b}{4} = 0,$$

donde resulta

$$z = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2-b}{4}} = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-b}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2-b}}{2}$$

Assim, pois, desdobrando em dois este resultado, teremos as expressões procuradas de x e de y, as quaes substituidas na expressão dada nos fornecem

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b}}}{2} + \frac{\sqrt{a-\sqrt{a^2-b}}}{2}$$

de sorte que o radical duplo fica decomposto na somma de dois outros.

Note-se que a hypothese de ser $x+y=a$ e $2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$ é suggerida pela propria expressão dada; porquanto, elevando-se ao quadrado, tem-se

$$a+\sqrt{b} = (x+y)+2\sqrt{xy}.$$

Ora, é facil de verificar que sendo

$$a+\sqrt{b} = m+\sqrt{n},$$

deve-se ter

$$a = m$$

e por conseguinte

$$\sqrt{b} = \sqrt{n},$$

suppondo estas duas quantidades incommensuraveis. Com effeito, si a quantidade commensuravel a fosse differente de m, por exemplo igual a $m+n$, ter-se-ia, substituindo este valor, na primeira das expressões acima:

$$m+n+\sqrt{b} = m+\sqrt{n},$$

ou

$$n+\sqrt{b} = \sqrt{n};$$

o que exige que n necessariamente nullo, porque do contrario se teria

$$n = \sqrt{n} - \sqrt{b};$$

o que é absurdo, visto como a differença entre duas quantidades incommensuraveis não póde ser expressa exactamente por uma quantidade commensuravel n.

209 — RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES IRRACIONAES QUE SE TRANSFORMAM EM RACIONAES DO 2° OU DO 1° GRAU.

I — *Caso de um só radical.* Quando apenas é irracional um dos termos affectos da incognita, basta isolal-o num dos membros da equação e elevar ambos á potencia indicada pelo indice do radical, para que este desappareça. A equação racional assim obtida ficará, porém, de grau mais elevado em relação á incognita, se esta figurar em outro termo sem radical.

Si o radical fôr duplo, triplo, etc., serão necessarias duas, tres, ... potenciações successivas para que elles desappareçam. Os exemplos seguintes elucidam o que fica dito.

1° Exemplo:

$$\sqrt{2x} - 4 = 0.$$

Isolando o radical, tem-se

$$\sqrt{2x} = 4;$$

elevando ambos os membros á segunda potencia, vem

$$2x = 16,$$

donde

$$x = \frac{16}{2} = 8.$$

2° Exemplo:

$$\sqrt{2x} + x - 12 = 0.$$

Isolando o radical, vem

$$\sqrt{2x} + x = 12$$

ou

$$\sqrt{2x} = 12 - x,$$

elevando ao quadrado, teremos

$$2x = (12 - x)^2$$

ou

$$2x = 144 - 24x + x^2$$

ou ainda

$$x^2 - 26x + 144 = 0$$

logo

$$x = 13 \pm \sqrt{13^2 - 144} = 13 \pm 5.$$

3° Exemplo:

$$\sqrt{2+\sqrt{2x}}=2.$$

Elevando á segunda potencia, tem-se

$$2+\sqrt{2x}=4;$$

isolando o radical, vem:

$$\sqrt{2x}=2;$$

elevando ainda ao quadrado, virá

$$2x=4,$$

donde

$$x=\frac{4}{2}=2.$$

II — *Caso de dois radicaes.* Quando na equação sómente entram dois radicaes do 2° grau, torna-se facil transformal-a em uma equação racional.

E' o que se vê nos exemplos seguintes:

1° exemplo. Seja a equação

$$\sqrt{7+x}=1+\sqrt{2+x},$$

elevando ao quadrado, virá

$$7+x=(1+\sqrt{2+x})^2$$

ou effectuando

$$7+x=1+2\sqrt{2+x}+2+x$$

e isolando o radical

$$7+x-1-2-x=2\sqrt{2+x}$$

ou ainda

$$4=2\sqrt{2+x}$$

ou dividindo por 2

$$2=\sqrt{2+x};$$

elevando úma outra vez ao quadrado, tem-se

$$4=2+x$$

ou

$$4-2=x$$

logo

$$x=2.$$

2º Exemplo — Resolver a equação

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$$

Elevando uma primeira vez ao quadrado, vem:

$$x + 5 + 2x + 8 + 2\sqrt{(x+5)(2x+8)} = 49$$

ou

$$2\sqrt{(x+5)(2x+8)} = 36 - 3x$$

Elevando uma segunda vez ao quadrado, vem:

$$4(x+5)(2x+8) = (36-3x)^2$$

ou effectuando e reduzindo

$$x^2 - 288x + 1136 = 0$$

equação que nos dá:

$$x = 144 \pm \sqrt{144^2 - 1136} = 144 \pm \sqrt{19600}$$

donde

$$x' = 284 \text{ e } x'' = 4.$$

Verifiquemos estas raizes; a 1ª nos dá:

$$\sqrt{284} + \sqrt{576} = 7$$

resultado inadmissivel, pois não verifica a equação dada.

A 2ª nos dá

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$$

ou

$$3 + 4 = 7$$

ou

$$7 = 7;$$

logo temos uma identidade onde sómente a 2ª raiz achada verifica a equação dada.

Observemos que si tomassemos o 1º radical com o signal —, a 1ª raiz conviria, e a 2ª não satisfaria mais. E' preciso, pois, notar que os signaes particulares dos

radicaes desapparecendo pela elevação ao quadrado, a equação final corresponde a todas as combinações de signaes destes radicaes. Uma raiz que a principio não satisfaz, póde depois convir si fizermos sobre os signaes dos radicaes as hypotheses convenientes, contanto que não sejam absurdas.

3º Exemplo — Resolver a equação

$$\sqrt{28 + 2x} = \sqrt{21 + x} + 1$$

Elevando sucessivamente seus dois membros ao quadrado, obtem-se

$$28 + 2x = 21 + x + 2\sqrt{21 + x} + 1$$

ou

$$6x = 2\sqrt{21 + x};$$

ou ainda

$$36 + 12x + x^2 = 84 + 4x$$

ou

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

teremos pois:

$$x = -4 \pm \sqrt{16 + 48} = -4 \pm 8$$

logo

$$x' = 4 \text{ e } x'' = 12,$$

A 1ª verifica a equação, e a 2ª não satisfaz sinão no caso de tomar os radicaes com signal negativo.

4º Exemplo — Resolver a equação

$$\sqrt{14 + x} + \sqrt{5 + 2x} = 1$$

Procedendo como acima, virá respectivamente:

$$14 + x + 2\sqrt{(14 + 5)\ (5 + 2x)} + 5 + 2x =$$

$$= 2\sqrt{(14 + x)\ (5 + 2x)} = -13 - 3x$$

Uma segunda elevação nos dá

$$4(14 + x)(5 + 2x) = (18 + 3x)^2$$

ou

$$x^2 - 24x + 44 = 0$$

Logo deduz-se

$$x = 12 \pm \sqrt{144 - 44} = 12 \pm 10$$

Logo

$$x' = 22 \text{ e } x'' = 2$$

A verificação dá

$$\sqrt{36} + \sqrt{49} = 1$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 1$$

isto é: nenhuma das raizes achadas satisfazem a equação.

Para que haja verificação, será necessario tomar o primeiro radical com o signal negativo e o segundo com o signal positivo, depois fazer o inverso.

5º Exemplo — Resolver finalmente a equação

$$2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 4.$$

Expellindo o denominador, vem:

$$2x + 2 = 4\sqrt{x}$$

Elevando ambos os membros á 2ª potencia, vem

$$4x^2 + 8x + 4 = 16x$$

ou

$$4x^2 - 8x + 4 = 0$$

ou

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

ou

$$(x - 1)^2 = 0$$

donde

$$x = 1.$$

III — Caso de um systema de equações irracionaes.

Deve-se normalmente transformal-as em equações racionaes, e então resolver o systema obtido. Entretanto, póde haver conveniencia em eliminar, logo, alguns dos radicaes que affectam a incognita, como se vê no exemplo seguinte:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \\ \sqrt{4x} + 5\sqrt{y} = 26 \end{cases}$$

Multiplicando por 5, ambos os membros da primeira equação e subtrahindo-a da segunda, obtem-se immediatamente:

$$10\sqrt{x} - \sqrt{4x} = 50 - 26$$

ou

$$10\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 24$$

ou ainda

$$8\sqrt{x} = 24$$

ou

$$\sqrt{x} = 3$$

donde

$$x = 9.$$

Substituindo este valor na primeira das equações dadas, obtem-se,

$$2 \times 3 + \sqrt{y} = 10$$

ou

$$\sqrt{y} = 10 - 6$$

ou ainda

$$\sqrt{y} = 4$$

logo, finalmente

$$y = 16.$$

210 — APPLICAÇÃO UTIL: DECOMPOSIÇÃO DE UMA FRACÇÃO RACIONAL EM OUTRAS MAIS SIMPLES. — Vejamos esta

importante applicação do methodo dos coefficientes indeterminados.

Seja

$$\frac{(fx)}{F(x)}$$

uma fracção algebrica cujos dois termos são formações inteiras e racionaes de x, sendo $f(x)$ de um grau inferior a (Fx), e supponhamos que não admittem nenhum factor commum.

Vejamos como é possivel decompôr esta fracção em uma somma de fracções simples, tendo para numeradores quantidades constantes e para denominadores respectivos os factores do 1º grau de $F(x)$.

Para isto, supponhamos que se tenha obtido as m raizes da equação

$$F(x) = 0,$$

e designemol-as por

$$a,\ b,\ c,\ \ldots.\ k.$$

Proponhamo-nos determinar as constantes $A.\ B,\ C,\ \ldots.\ K$ de maneira que se tenha

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots. + \frac{K}{x-k} \quad (1)$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por $F(x)$, virá:

$$f(x) = A\frac{F(x)}{x-a} + B\frac{F(x)}{x-b} + C\frac{F(x)}{x-c} + \ldots. + K\frac{F(x)}{x-k} \quad (II)$$

Esta equação devendo ser identica, será preciso que depois de haver effectuado as operações indicadas e ordenado em relação a x, os coefficientes das mesmas potencias desta variavel nos dois membros sejam iguaes entre si. Isto fornecerá tantas equações entre as inoognitas

$A, B, C, \ldots K$ quantas forem estas incognitas, e permittirá, portanto, determinal-as.

Seja, por exemplo,

$$\frac{a + bx + cx^2}{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3}$$

a fracção proposta que se pode para simplificar; póde-se pôr sob á fórma

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + x^3}$$

desde que se faça

$$\frac{a}{\delta'} = \alpha, \frac{b}{\delta'} = \beta, \frac{c}{\delta'} = \gamma, \frac{a'}{\delta'} = \alpha' \frac{b'}{\delta'} = \beta' \text{ e } \frac{c'}{\delta'} = \gamma'.$$

Designemos por $x - p$, $x - q$, $x - r$, os factores do denominador, que supporemos reaes e desiguaes.

Admittamos que

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + x^3} = \frac{A}{x - p} + \frac{B}{x - q} + \frac{C}{x - r} \quad (I)$$

Sendo A, B, C, quantidades que se trata de determinar. Reduzamos ao mesmo denominador e observemos que

$$\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + x^3 = (x - p)\ (x - q)\ (x - r);$$

virá então

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = \left| \begin{array}{l} A(x - q)\ (x - r) \\ + B(x - p)\ (x - r) \\ + C(x - p)\ (x - r) \end{array} \right| \quad (II)$$

Poder-se-ia, como fizemos acima, effectuar os calculos e comparar os dois membros termo a termo, o que daria entre A, B, C, tres relações por meio das quaes obter-se-ia o valor destas quantidades.

Mas, por uma consideração particular, chega-se mais simplesmente a determinação destes valores. Com effeito, por isso que as equações (1) e (2) devem existir qualquer

que seja o valor de x, e por serem A, B e C independentes de x, conclue-se que si, para um valor particular attribuido a esta quantidade, chegamos a determinar valores correspondentes para A, B, C, esses valores convirão igualmente as equações (1) e (2).

Ora, si fizermos successivamente na equação (2), $x = p$, $x = q$, $x = r$, virá

1°, para $x = p$

$$\alpha + \beta p + \gamma p^2 = A(p - q)\ (p - r),$$

que dá

$$A = \frac{\alpha + \beta p + \gamma p^2}{(p - q)\ (p - r)}$$

2°, para $x = q$

$$B = \frac{\alpha + \beta q + \gamma q^2}{(q - p)\ (q - r)}$$

3°, para $x = r$

$$C = \frac{\alpha + \beta r + \gamma r^2}{(r - p)\ (r - q)}.$$

Consideremos agora os casos particulares.

Seja a principio $p = q = r$. A decomposição precedente não póde mais ter logar, porque os coefficientes A, B, C tornam-se infinitos. Mas póde-se seguir outra marcha, fazendo

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{(x - p)^3} = \frac{A}{(x - p)^2} + \frac{C}{x - p},$$

e tentar a determinação de A, B, C, segundo esta decomposição.

Para isto devemos expellir os denominadores, o que dará

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = A + B(x - p) + C(x - p)^2.$$

Suppondo em primeiro logar $x = p$, resulta

$$A + \alpha + \beta p + \gamma p^2;$$

e a equação torna-se, quando nella se substitue este valor de A,

$$\beta(x-p)+\gamma(x^2-p)^2)=B(x-p)+C(x-p)^2,$$

ou dividindo pelo factor commum $(x-p,)$,

$$B+\gamma(x+p)=B+C(x-p).$$

Fazendo novamente $x=p$, acha-se

$$B=\beta+2\gamma p\ ;$$

ou substituindo na equação que acaba de ser obtida, B por este valor, $\gamma(x-p)=C(x-p)$; portanto $C=\gamma$.

Assim, chega-se a identidade

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2+x^3}=\frac{\alpha+\beta p+\gamma p^2}{(x-p)^3}+\frac{\beta+2\gamma p}{(x-p)^2}+\frac{\gamma}{x-p}\ ;$$

resultado cuja exactidão é facil de constatar reduzindo a uma só as fracções do segundo membro.

Seja agora $p=r$, ou $\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2+x^3$ da fórma $(x-p)^2\ (x-q)$, e ensaiemos, neste caso, a decomposição seguinte:

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{(x-p)^2\ (x-q)}=\frac{A}{(x-p)^2}=\frac{B}{x-p}+\frac{C}{x-q}\ ;$$

expellindo os denominadores, obtem-se

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2=A(x-q)+B(x-p)\ (x-q)+C(x-p)^2.$$

Isto posto, suppondo $x=p$, virá

$$\alpha+\beta p+\gamma p^2=A(p-q),$$

relação donde se tira

$$A=\frac{\alpha+\beta p+\gamma p^2}{p-q}$$

Substituindo A por seu valor na segunda equação identica, e transpondo, acha-se

$$-\alpha(x-p)-\beta q(x-p)+\gamma px(x-p)-\gamma q(x^2-p^2)=$$
$$=(p-q)\ [B(x-p)\ (x-q)+C(x-p)^2];$$

dividindo por $x - p$, e fazendo em seguida $x = p$, esta ultima identidade nos dá :

$$B = -\frac{\alpha + \beta q + \gamma q^2}{(p - q)^2}.$$

De resto, na parte superior do dominio mathematico veremos um meio mais simples e mais systematico de effectuar em todos os casos semelhantes decomposições das fracções algebricas.

Exemplos:

Conforme fizemos acima, basta effectuar os calculos e comparar os dois membros termo a termo, o que dará entre A, B, C, tres relações por meio das quaes obter-se-á o valor destas quantidades.

1° Exemplo — Applicando esta marcha geral, a decomposição da fracção

$$\frac{4x - 2}{x^2 - 6x + 8},$$

obtem-se, depois de resolver a equação

$$x^2 - 6x + 8 = 0,\ a = 4 \text{ e } b = 2,$$

donde por conseguinte

$$\frac{4x - 2}{x^2 - 6x + 8} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x - 2};$$

expellindo os denominadores e effectuando os calculos, virá

$$4x - 2 = \frac{A(x^2 - 6x + 8)}{x - 4} + \frac{B(x^2 - 6x + 8)}{x - 2},$$

e

$$(4x - 2)\ (x - 4)\ (x - 2) =$$

$$= A(x^2 - 6x + 8)\ (x - 2) + B(x^2 - 6x + 8)\ (x - 4)$$

ou

$$4x^3 - 26x^2 + 44x - 16 =$$

$$= Ax^3 - 8Ax^2 + 20Ax - 16A + Bx^3 - 10Bx^2 + 32Bx - 32$$

ou ainda

$$4x^3 - 26x^2 + 44x - 16 =$$

$$(A + B)x^3 - (8A + 10B)x^2 + (20A + 32B)x - (16A + 32B)$$

Identificando e tomando duas das equações obtidas para determinar A e B, isto é, $A+B=4$ e $20A+32B=44$, chega-se aos valores $A=7$ e $B=-3$, donde resulta que

$$\frac{4x-2}{x^2-6x+8}=\frac{7}{x-4}-\frac{3}{x-2}$$

2º Exemplo — Supponhamos ainda que se trata de decompor a fracção

$$\frac{2x^2+12x+18}{2x^3-10x^2+4x+16}$$

Dividindo ambos os termos por 2 virá:

$$\frac{x^2+6x+9}{x^3-5x^2+2x+8}=\frac{(x+3)^2}{x^3-5x^2+2x+8}$$

Trata-se de determinar A, B, C, partindo da relação

$$\frac{(x+3)^2}{x^3-5x^2+2x+8}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}$$

ou expellindo os denominadores

$$\begin{gathered}(x^2+6x+9)\ (x^3-5x^2+2x+8)=\\ =A(x^3-5x^2+2x+8)\ (x-2)\ (x-4)+\\ +B(x^3-5x^2+2x+8)\ (x+1)\times(x-4)+\\ +C(x^3-5x^2+2x+8)\ (x+1)\ (x-2)\end{gathered}$$

ou effectuando

$$\begin{gathered}x^5+x^4-19x^3-25x^2+66x+72=\\ =A(x^5-11x^4+40x^3-44x^2-32x+64)+\\ +B(x^5-8x^4+13x^3+22x^2-32x-32)+\\ +C(x^5-6x^4+5x^3-16x^2-12x-16)\end{gathered}$$

ou

$$\begin{gathered}x^5+x^4-19x^3-25x^2+66x+72=\\ =Ax^5+Bx^5+Cx^5-11Ax^4-8Bx^4-6Cx^5+\\ +40Ax^3+13Bx^3+5Cx^3-44Ax^2+22Bx^2+16Cx^2-\\ -32Ax-32Bx-12Cx+64A-32B-16C,\end{gathered}$$

ou pondo as potencias de x em evidencia

$$x^5 + x^4 - 19x^3 - 25x^2 + 66x + 72 =$$
$$= (A + B + C)x^5 - (11A + 8B + 6C)x^4 +$$
$$+ (40A + 13B + 5C)x^3 - (44A - 22B - 16C)x^2 -$$
$$- (32A + 32B + 12C)x + 64A - 32B - 16C;$$

identificando os coefficientes de ambos os membros, virá

$$A + B + C = 1, \quad -11A - 8B - 6C = 1,$$
$$40A + 13B + 5C = -19, \quad -44A + 22B + 16C = -25,$$
$$-32A - 32B - 12C = 66, \quad 64A - 32B - 16C = 72$$

Tomando a primeira, a terceira e a sexta destas equações afim de determinar A, B e C, virá

$$A = \frac{4}{15} \qquad B = -\frac{25}{6} \qquad C = \frac{49}{10}$$

de sorte que a fracção proposta se torna:

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{x^3 - 3x^2 + 2x + 8} = \frac{4}{15(x+1)} - \frac{25}{6(x-2)} + \frac{49}{10(x-4)}$$

Verificação: Expellindo os denominadores, virá:

$$(x^5 + x^4 - 19x^3 - 25x^2 + 66x + 72)90 =$$
$$= 24(x^5 - 11x^4 + 40x^3 - 44x^2 - 32x + 64) -$$
$$- 375(x^6 - 8x^4 + 13x^3 + 22x^2 - 32x - 32) +$$
$$+ 441(x^5 - 6x^4 + 5x^3 + 16x^2 - 12x - 16);$$

donde resulta por identificação, as igualdades:

$$30x^5 = 8x^5 - 125x^5 + 147x^5$$
$$30x^4 = -88x^4 + 1000x^4 - 882x^4$$
$$-570x^3 = 320x^3 - 1625x^3 + 735x^3$$
$$-750x^2 = -352x^2 - 2750x^2 + 2352x^2$$
$$1980x = -256x + 4000x - 1764x$$
$$2160 = 512 + 4000 - 2352.$$

De resto, na parte superior do dominio mathematico, veremos um meio mais simples e mais systematico de effectuar em todos os casos semelhantes decomposições das funcções algebricas.

Resolvamos, emfim, os tres problemas a uma incognita que nos parecem mais importantes dentre os apresentados pelas obras especiaes de Algebra.

1° — PROBLEMA DAS LUZES. — *Duas luzes, uma das quaes é quatro vezes mais intensa do que a outra estão separadas por um intervallo de 3 metros; determinar sobre a recta que as junta o ponto que ellas illuminam igualmente.*

Si chamarmos x a distancia ao ponto procurado da luz mais fraca, que suppomos dirigida para a mais forte, é claro que esta ultima se achará á distancia $3 - x$ do mesmo ponto. Ora, sabendo-se pela Physica que a intensidade da luz decresce na razão inversa do quadrado da distancia, é claro que tomando a mais fraca para unidade, será $\frac{1}{x^2}$ a sua força á distancia x, e $\frac{4}{(3-x)^2}$ a força da mais forte, á distancia $3 - x$.

Estas intensidades devendo ser iguaes no ponto procurado em virtude das condições do problema, ter-se-á a equação

$$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(3-x)^2}$$

ou

$$9 - 6x + x^2 = 4x^2$$

ou ainda

$$4x^2 - x^2 + 6x - 9 = 0$$

ou

$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$

ou

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

donde se deduz

$$x = -1 \pm 2$$

Os dois valores de x são, pois,

$$x' = -1 + 2 = 1 \text{ e } x'' = -1 - 2 = -3.$$

O primeiro nos mostra que o ponto igualmente illuminado pelas duas luzes é collocado entre ellas, se acha a um metro de distancia da mais fraca, e portanto a dois da mais forte. O segundo valor, que é negativo, nos indica que existe ainda um segundo ponto igualmente illuminado pelas duas luzes e collocado a tres metros de distancia da mais fraca, mas em sentido contrario do primeiro, isto é, sob a recta que liga as duas luzes, prolongada do lado opposto á mais forte. E' com effeito visivel que este ponto se achando a tres metros de distancia da luz mais fraca, e portanto a seis da mais forte, é igualmente illuminado pelas duas.

Esta solução inesperada nos mostra mais uma vez a necessidade de levar em conta os resultados negativos tanto quanto os positivos, todas as vezes que o exigirem as condições do problema, afim de que as questões possam adquirir toda generalidade.

2º — PROBLEMA DO PÔÇO — *Calcular a profundidade de um pôço, conhecendo o numero T de segundos decorridos entre o instante em que se deixa cahir uma pedra e aquelle em que o som produzido chega ao ouvido, suppondo que se despreza a resistencia do ar.*

Representemos por x a profundidade do pôço. O tempo T decompõe-se evidentemente em dois periodos: um t gasto pela pedra em percorrer descendo o espaço x, e outro t em que o som percorre o mesmo espaço subindo.

A quéda de um corpo no vacuo tem logar com um movimento uniformemente variado, cuja acceleração é representada por g, que entre nós é igual a $9^m,7874$, e a mecanica ensina que $x = \frac{1}{2} g t^2$.

Desta equação tira-se $t = \frac{\sqrt{2x}}{g}$.

Por outro lado a velocidade do som no ar é constante e igual approximadamente a 343 metros por segundo;

representando-a por v, virá tambem, segundo a Mecanica, a equação

$$x = vt'$$

donde deduz

$$t' = \frac{x}{v}$$

Teremos por conseguinte

$$T = t + t' = \sqrt{\frac{x2}{g}} + \frac{x}{v}$$

donde

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} = T - \frac{x}{v}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado acharemos

$$\frac{2x}{g} = T^2 - \frac{2T}{v}x + \frac{x^2}{v^2}$$

Obtem-se, pois, a equação do 2º grau:

$$\frac{x^2}{v^2} - 2\left(\frac{T^2}{v} + \frac{1}{g}\right)x + T^2 = 0.$$

As raizes desta equação são reaes, porque

$$\frac{T}{v} + \frac{1^2}{g} > \frac{T^2}{v^2};$$

ambas são positivas, visto como seu producto é igual a T^2v^2 e sua somma a $2\left(\frac{T}{v} + \frac{1}{g}\right)v^2$.

Entretanto, sómente uma póde convir, porque o poço não tem duas profundidades differentes.

Applicando-lhe a fórmula geral, virá

$$x = \frac{\frac{T}{v} + \frac{1}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{T}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{T}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}}$$

A primeira raiz é evidentemente maior que $\frac{T}{v} \div \frac{1}{v^2}$, isto é vT; é pois esta raiz que deve ser regeitada; porque

em virtude da relação $x = vt'$, t' sendo menor que T, será tambem $x = < vT$. Portanto, tomaremos sómente a segunda solução.

Note-se que foi por havermos elevado ao quadrado a equação acima $\frac{\sqrt{2x}}{g} = T - \frac{x}{v}$, que introduzimos uma solução estranha, isto é, a que corresponde a equação $-\frac{\sqrt{2x}}{g} = T - \frac{x}{v}$. O facto singular de haver duas raizes positivas, e sómente uma corresponder á questão, fica assim explicado.

3º — PROBLEMA DA MÉDIA E EXTREMA RAZÃO — *Dividir uma grandeza em duas partes taes que a maior seja média proporcional entre toda a grandeza e a outra parte.*

Para resolvel-o algebricamente, representemos por l a grandeza dada, e por x a parte pedida, teremos assim:

$$l : x :: x : l - x$$

donde

$$x^2 = l(l - x) \text{ ou } x^2 + lx - l^2 = 0 \qquad (I)$$

equação do 2º grau que nos dá:

$$x = -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2 + 4l^2}{4}} = -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{5l^2}{4}} = -\frac{l}{2} \pm \frac{l}{2}\sqrt{5}.$$

Portanto, obtem-se para x os dois valores:

$$\begin{cases} x' = -\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\sqrt{5} = \frac{l}{2}(\sqrt{5} - 1) \\ x'' = -\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\sqrt{5} = l\left(-1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

o primeiro dos quaes, positivo, é maior que $\frac{l}{2}$, visto como $\sqrt{5} - 1$ é maior do que 1; e o segundo, negativo, é maior do que l, por isso que $-1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ é maior do que -1.

Esta segunda solução que parece á primeira vista absurda, torna-se perfeitamente explicavel, attendendo á origem concreta do problema. Com effeito, surgido na Geometria, ella visa dividir um comprimento AB nas duas partes acima especificadas: ora, a primeira solução nos indica claramente que o ponto da divisão obtido deve se achar entre os extremos A e B da linha proposta; ao passo que a 2ª solução nos mostra se achar o mesmo ponto no prolongamento da linha dada, e tomado em sentido contrario áquelle em que se contou a distancia Ax, de sorte que o seu valor se torna negativo e é maior do que a propria linha. Porque, em vista do enunciado, se póde contar a incognita x, a partir do ponto A, á direita ou á esquerda deste ponto, e a Algebra indica em geral a opposição de sentido pela opposição de signal.

E' o que se póde verificar, designando por C o ponto á direita de A, e por C' o da esquerda. Representando AC' por x, a equação do problema será para o ponto C':

$$x^2 = l(l + x) \text{ ou } x^2 - lx - l^2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

Comparando esta com a equação (I), vê-se que não differem sinão pela mudança de x em $-x$; e que mostra terem as mesmas raizes com signaes contrarios. A raiz positiva da equação (II) é, pois, AC', contada á esquerda de A, e sua raiz negativa e, portanto, AC, contada á direita. As equações (I) e (II) verificam-se assim mutuamente, e a primeira basta para achar as duas soluções do problema. E' apenas a escolha da origem A que torna possivel as soluções negativas. Porque si tomassemos para origem o ponto B, as duas soluções BC e BC' seriam ambas no mesmo sentido, e pondo então $BC = x$, ou $BC' = x$, a equação do problema seria da fórma

$$(l - x)^2 = lx \text{ ou } x^2 - 3lx + l^2 = 0$$

é as raizes desta equação

$$x = \frac{3l}{2} \pm \sqrt{\frac{9l^2}{4} - l^2} = \frac{l}{2}(3 \pm \sqrt{5}),$$

são ambas positivas: a primeira excede $\frac{5l}{2}$, e a segunda é menor que $\frac{l}{2}$.

Demais seria impossivel que qualquer outro ponto C'' collocado á direita de A e além de B, podesse satisfazer a questão. AC'' excedendo ao mesmo tempo AB e BC'', não poderia então ser média proporcional entre as duas distancias enunciadas. Com effeito, fazendo $AC'' = x$, a equação do problema, torna-se:

$$x^2 = l(x - l) \text{ ou } x^2 - lx + l^2 = 0$$

e as raizes desta equação são *imaginarias*, o que demonstra a impossibilidade citada.

Notemos, emfim, que o problema da média e extrema razão, em logar de se referir a uma recta póde ser posto relativamente a uma superficie ou um volume. As equações e os resultados precedentes são tambem immediatamente applicaveis, sob a condição de substituir l e x, pela expressão das superficies ou dos volumes correspondentes.

APPLICAÇÕES A GEOMETRIA — Resolvamos agora alguns problemas geometricos:

1.° *Calcular os lados do angulo recto de um triangulo rectangulo, conhecendo sua hypothenusa a e a altura correspondente h.*

Chamemos x e y os dois lados incognitos e supponhamos $x > y$. O duplo da area do triangulo é expresso ao mesmo tempo pelo producto xy e pelo producto ah; de sorte que se tem immediatamente as duas equações do problema

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = ah. \end{cases}$$

Universidade de S. Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

Para facilitar a eliminação addicionemos e subtraíamos membro a membro estas duas equações, depois de haver multiplicado por 2 ambos os membros da segunda.

Virá

$$(2)\quad \begin{cases} (x+y)^2 = a^2 + 2ah = a(a+2h), \\ (x-y)^2 = a^2 - 2ah = a(a-2h), \end{cases}$$

e o systema (2) assim formado é equivatente ao primitivo. Delle se deduz

$$x + y = \sqrt{a(a+2h)}$$

$$x - y = \sqrt{a(a-2h)},$$

e os dois radicaes só comportam o signal +, por serem as incognitas essencialmente positivas.

Tem-se, pois, finalmente,

$$x = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a(a+2h)} + \sqrt{a(a-2h)}\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a)a+2h)} - \sqrt{a(a-2h)}\right]$$

onde x e y sendo positivos devem ser com mais forte razão quantidades reaes. A condição de possibilidade do problema é por conseguinte

$$a > 2h \text{ ou } h < \frac{a}{2}.$$

2º. *Achar os tres lados de um triangulo rectangulo conhecendo seu perimetro e sua superficie.*

Representemos por $2p$ o perimetro e por s^2 sua superficie, por x e y os dois lados do angulo recto, por z a hypothenusa. O enunciado e a propriedade fundamental do triangulo rectangulo nos dão immediatamente as equações

$$x + y + z = 2p,$$

$$xy = 2s^2,$$

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Para simplificar a eliminação, póde-se tirar da primeira equação $x + y$, elevar ao quadrado ambos os membros desta expressão e substituir no resultado $x^2 + y^2$ por z^2, deduzido da terceira equação, e $2xy$ por $4s^2$, tirado da segunda; virá então

$$z^2 + 4s^2 = 4p^2 - 4pz + z^2,$$

z^2 desapparece de ambos os membros e a equação torna-se do 1º grau, nos dando

$$z = \frac{4p^2 - 4s^2}{4p} = \frac{p^2 - s^2}{p}.$$

E como os lados do triangulo são positivos, esta expressão nos mostra que se deve ter $p^2 > s^2$ ou $p > s$, para uma primeira condição de possibilidade do problema.

A primeira equação nos dá

$$x + y = 2p - z = \frac{p^2 + s^2}{p}$$

e por ser a segunda

$$xy = 2s^2,$$

segue-se que x e y são as raizes da equação

$$u^2 - \frac{p^2 + s^2}{p} u + 2s^2 = 0$$

Si as raizes desta equação forem reaes, ellas serão positivas, porque sua somma é positiva e tambem o seu producto. Portanto, a segunda condição de possibilidade do problema será

$$\left(\frac{p^2 + s^2}{p}\right)^2 > 8s^2;$$

ella equivale a

$$(p^2 + s^2)^2 > 8p^2s^2 \text{ ou } p^2 + s^2 > 2p\,8\sqrt{2}.$$

CAPITULO XI

RESOLUÇÃO ALGEBRICA DAS EQUAÇÕES DO 3° E 4° GRAUS A UMA INCOGNITA; IMPOSSIBILIDADE DE RESOLVER AS DE GRAU SUPERIOR, SALVO EM CASOS EXCEPCIONAES.

§ 31

Resolução algebrica das equações do 3° grau a uma incognita

211 — De todos os povos da Europa foram os italianos os que mais se applicaram a cultura da Algebra no começo da idade moderna. Póde-se mesmo affirmar que foram os algebristas da Italia que prepararam os trabalhos posteriores de Viete e Descartes na França, de Harriot na Inglaterra e de Hudde na Hollanda (31 a); porque os primeiros tratados de Algebra appareceram na Italia antes de serem publicados na França e nos outros paizes (31 b).

Foi um geometra de Bolonha, Scipião Ferreo, quem descobriu a resolução das equações do 3° grau, embora sómente para um caso particular. Dois outros geometras tambem italianos, Tarraglia e Cardan a completaram em seguida e a tornaram geral para todas as equações do 3° grau.

(31 a) Hudde (João), geometra hollandez, nasceu em Amsterdam em 1633 e falleceu na mesma cidade em 1704. Dedicou-se ao estudo da Geometria de Descartes e segundo Leibnitz fez interessantes descobertas sobre a theoria das equações. Infelizmente, porém, a maior parte dos seus trabalhos não foi impressa. Apenas vieram a luz dois fragmentos publicados por Schooten, em 1659, sob o titulo de *J. Huddenii, de reductione æquationum et de maximis et minimis epistolæ duæ*. O primeiro destes escriptos offerece diversas regras para discernir si uma equação é reductivel ou não; si é o producto de duas outras de graus inferiores, e para achar, neste ultimo caso, os factores respectivos.

(31 b) As primeiras obras de Algebra que appareceram na França foram a de Lepelletier, impressa em 1554, e a de Bulion, em 1559.

Tartaglia expoz sua solução em máos versos latinos, na sua obra sobre differentes questões e invenções, impressa em 1546, onde pela primeira vez se encontra um estudo do systema de fortificação abaluartado.

Cardan publicou na mesma época o seu tratado de *Arte magnã*, isto é, de Algebra, no qual quasi nada deixa a desejar sobre a resolução das equações do 3° grau, devendo-se observar que é elle o primeiro que percebe a multiplicidade das raizes das equações e a sua distincção em positivos e negativos. Mas é sobretudo conhecido por ter primeiro notado o caso chamado *irreductivel*, no qual a expressão das raizes reaes apresenta-se sob uma fórma imaginaria.

Por alguns casos particulares em que a equação tem divisores irracionaes, Cardan convenceu-se de que aquella expressão não impedia que as raizes fossem reaes.

Mas restava provar que não só as raizes são reaes no *caso irreductivel* porém que não podem mesmo ser todas tres reaes e desiguaes senão neste caso; foi o que fez depois delle Viete, bem como Albert Girard (31 c) pela consideração do problema da *trisecção do angulo* assimilada a este caso (31 d).

Depois destes geometras, Hudde, Euler, Txhirnauss e Lagrange brilhantemente trataram das equações do 3° e 4° graus.

Varios são os processos para resolver algebricamente

(31 c) Girard (Albert), geometra hollandez, nasceu nos fins do seculo XVI e morreu em 1634. Deixou um tratado de Trigonometria, publicado em Haya em 1626, onde, como Viete, elle reduz á metade o numero de casos distinctos da resolução dos triangulos sphericos, por meio da consideração do triangulo supplementar a que chama reciproco. Publicou tambem uma obra sobre Algebra, onde se encontram idéas justas sobre as equações e especialmente sobre suas raizes negativas. Emfim, deve-se-lhe tambem uma edição commentada das obras de Stevin (Leyde — 1634).

(31 d) Lagrange — *Leçons mathematiques donnée a l'école normale*, em 1795.

estas equações. Todos elles consistem em transformar, por substituições convenientes, a equação a resolver em uma outra mais simples que possa ser resolvida por meio das equações de grau inferior e a determinar, com o auxilio das raizes desta equação chamada reduzida, todas as raizes da proposta.

Todos os processos para resolver as equações do 3º e 4º graus se reduzem, portanto, a determinar uma formação de suas raizes que dependa de uma equação de grau inferior e de tal sorte que dê facilmente as raizes da proposta.

Nestas condições, a resolução das equações do 3º grau de que nos vamos occupar será obtida fazendo-a depender de um caso mais simples da equação do 2º grau, o qual por sua vez fica, como vimos, reduzido ao typo incompleto cuja solução é directamente obtida.

Estudando que seja o typo do 3º grau, obteremos a resolução do typo mais complicado do 4º grau, fazendo-o depender dos dois casos anteriores e mais simples, dos 2º e 3º graus. Por conseguinte, predomina por toda parte o importante preceito logico que nos leva a decompôr uma questão complexa em casos successivamente mais simples, cujo conhecimento constitue a base para a solução dos mais complicados.

212 — Examinemos o processo usualmente empregado para resolver as equações do 3º grau. Consideremos para isso a equação geral

$$ay^3 + by^2 + cy + d = 0,$$

algebrica, racional e inteira.

Dividindo ambos os membros pelo coefficiente do 1º termo e representando $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$ respectivamente por e, f, e g, teremos,

$$y^3 + ey^2 + fy + g = 0 \qquad (1)$$

Empreguemos o artificio de Viete para fazer desapparecer o 2º termo desta equação. Para isso é preciso, como vimos na segunda phase algebrica, igualar a variavel a uma outra arbitraria, a qual se somma algebricamente a relação entre o coefficiente do 2º termo, tomado com signal contrario, e o grau da equação. Substituindo, pois, y por $x - \frac{e}{3}$, teremos:

$$\left(x - \frac{x}{3}\right)^3 + e\left(x - \frac{e}{3}\right)^2 + f\left(x - \frac{e}{3}\right) + g = 0$$

Effectuando os desenvolvimentos e reduzindo, virá:

$$x^3 + \left(f - \frac{1}{3}e^2\right)x + \left(g - \frac{1}{3}ef + \frac{2}{27}e^3\right) = 0 \quad (2)$$

Fazendo para maior simplicidade

$$f - \frac{1}{3}e^2 = p,\ g - \frac{1}{3}ef + \frac{2}{27}e^3 = q,$$

a equação tomará a fórma

$$x^3 + px + q = 0 \quad (3)$$

Convém fazer aqui uma observação relativamente ao emprego do artificio de Viete. No typo geral do segundo grau o desapparecimento do termo da mais alta potencia secundaria da variavel reduz immediatamente o caso completo ao typo incompleto, cuja solução é directamente obtida; emquanto que aqui um semelhante desapparecimento reduz o typo completo (1) a um typo incompleto (3), cuja resolução exige transformações especiaes; de modo que o artificio conduz, no primeiro caso, a solução immediata da questão, ao passo que no segundo prepara apenas a solução.

Como bem observa Clairaut, póde parecer a quem não reflectir bem sobre a questão que o artificio de Viete, novamente empregado para fazer desapparecer o termo px

da equação (3), reduz a questão a outro typo incompleto $z^3 - r = 0$, cuja solução é immediatamente obtida. Um tal recurso é, entretanto, inteiramente illusorio, porque semelhante transformação faria necessariamente surgir o termo já eliminado na primeira transformação. Podemos, porém, generalisar a concepção de Viete e servirmo-nos della, não para fazer desapparecer o termo px da equação (3), como fizemos ha pouco, mas para decompôr esta equação em outras mais simples que possam ser resolvidas immediatamente. Para isso, em vez de substituir a variavel por uma outra, sommada a relação entre o termo constante e o grau da equação, podemos considerar a variavel x como a somma de duas indeterminadas y e z que procuraremos fixar por meio de equações de graus inferiores ao da equação de que se trata.

Fazendo, pois,

$$x = y + z, \tag{4}$$

e substituindo na equação (3) virá:

$$(y + z)^3 + p(y + z) + q = 0$$

ou

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + py + pz + q = 0,$$

ou pondo $3yz$ e p em evidencia, e em seguida tambem $(y + z)$, virá:

$$(y^3 + z^3 + q) + (3yz + p)(y + z) = 0 \tag{5}$$

A simples inspecção deste desenvolvimento, vê-se logo que elle é verificado quando se faz

$$y^3 + z^3 + q = 0$$

e

$$(3yz + p)(y + z) = 0,$$

ou simplesmente

$$3yz + p = 0,$$

visto como $y + z = x$ que não póde ser nullo.

Destas duas equações deduz-se :

$$\left.\begin{aligned} yz = -\frac{p}{3} \text{ ou } y^3z^3 = -\frac{p^3}{27} \\ \text{e} \qquad y^3 + z^3 = -q \end{aligned}\right\} 6$$

Estas duas condições permittem determinar as auxiliares y e z, porque fazendo $y^3 = u'$ e $z^3 = u''$, podemos considerar

$$-q = u' + u''$$
$$-\frac{p^3}{27} = u'\,u''$$

como sendo respectivamente a somma e o producto das raizes u' e u'' de uma equação do 2º gráu

$$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad (7)$$

Resolvida esta equação, estará resolvida a equação considerada (3), por isso que, sendo obtidas as expressões de u' ou y^3 e u'' ou z^3, podemos substituindo y e z na expressão (4) obter a fórmula de x. Por esse motivo é que se dá a esta equação a designação de *reduzida* ou resolvente da equação proposta.

Teremos, com effeito,

$$u' = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad (8)$$

donde

$$u' \text{ ou } y^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad (9)$$

e

$$u'' \text{ ou } z^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad (10)$$

Assim será

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Universidade de S. Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

Substituindo estas expressões na equação (4) $x = y + z$, teremos

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Esta expressão denomina-se fórmula de Cardan, apesar de dever-se antes attribuir a Hudde o artificio adoptado para obtel-a.

Ella encerra implicitamente as raizes da equação considerada (3) como passamos a verificar. Com effeito, fazendo (9) e (10) como acima,

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}} = m^3 \text{ e } -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = n^3, \quad (8)$$

será

$$u' = + m^3 \text{ e } u'' = + n^3$$

ou, o que é o mesmo; (9) e (10),

$$y^3 = + m^3 \text{ e } z^3 = + n^3 \qquad (11)$$

Por isso que $x = y + z$ (4) teremos

$$x = \sqrt[3]{m^3} = \sqrt[3]{n^3} \qquad (12)$$

Como porém as equações (11) $y^3 = m^3$ e $z^3 = + n^3$, devem ter tres raizes cada uma, é claro que resultarão nove expressões para x. Com effeito, representadas por y', y'' e y''', as tres raizes da primeira, por z', z'' e z''' as tres raizes da segunda, teremos:

$$\begin{aligned}
x &= y' + z' \\
x &= y' + z'' \\
x &= y' + z''' \\
x &= y'' + z' \\
x &= y'' + z'' \\
x &= y'' + z''' \\
x &= y''' + z' \\
x &= y''' + z'' \\
x &= y''' + z'''
\end{aligned} \qquad (12\ a)$$

Vamos porém verificar que destas nove expressões apenas convém tres. Para isso vamos separar as tres raizes da equação $y^3 = m^3$.

Representemos por

$$y = \delta \sqrt[3]{m^3},$$

uma de suas raizes: si assim é, elevando-se esta igualdade ao cubo, teremos o primeiro membro daquella equação. Virá, pois,

$$y^3 = \delta^3 m^3,$$

ou

$$m^3 = m^3 \delta^3,$$

donde:

$$\delta^3 = 1,$$

ou

$$\delta^3 - 1 = 0. \tag{13}$$

que podemos pôr sob a fórma

$$(\delta^2 + \delta + 1)\ (\delta - 1) = 0, \tag{14}$$

em vista da qual podemos escrever

$$\delta^2 + \delta + 1 = 0 \tag{15}$$

$$\delta - 1 = 0 \tag{16}$$

Destas duas equações tiramos

$$\delta = 1 \text{ e } \delta = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Nestas condições as tres raizes da equação binomia (13) serão assim representadas

$$\delta_1 = 1,\ \delta_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \text{ e } \delta_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

Vulgarmente são estas raizes conhecidas como as tres raizes da unidade.

As tres raizes da equação $y^3 = m^3$, serão, portanto,

$$y' = m\,\delta_1,\ y'' = m\,\delta_2 \text{ e } y''' = m\,\delta_3$$

ou

$$y' = m,\ y'' = m\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right), \text{ e } y''' = m\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right).$$

As tres raizes da outra equação $z^3 = +n^3$, serão portanto

$$z' = +n,\ z'' = +n\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \text{ e } z''' = +n\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right).$$

Attendendo por conseguinte as relações (12) teremos:

$$x = m + n \quad \ldots \quad 1^a$$

$$x = m + n\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \quad \ldots \quad 2^a$$

$$x = m + n\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) \quad \ldots \quad 3^a$$

$$x = m\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) + n \quad \ldots \quad 4^a$$

$$x = m\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) + n\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \quad \ldots \quad 5^a$$

$$x = m\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) + n\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) \quad \ldots \quad 6^a$$

$$x = m\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) + n \quad \ldots \quad 7^a$$

$$x = m\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) + n\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \quad \ldots \quad 8^a$$

$$x = m\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) + n\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) \quad \ldots \quad 9^a$$

Mas é facil de ver que destas nove expressões ha apenas tres que satisfazem a equação proposta (3). Com effeito, vimos que além da relação (11) $m^3 = y^3$ e $n^3 = +z^3$ se deve

ter ainda entre y e z as duas equações (6) $y^3 + z^3 = -q$ e $yz = -\frac{p}{3}$. Ora, de qualquer maneira que se tomem os nove arranjos acima, si formarmos a somma dos cubos de suas partes teremos para resultado constante $m^3 + n^3$.

Si tomarmos, por exemplo, a setima expressão de x:

$$x = m\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) + n\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right),$$

veremos que por ser

$$(-1+\sqrt{-3})^3 = (-1-\sqrt{-3})^3 = 8,$$

a somma em questão será

$$\frac{m^3}{8} \times 8 + \frac{n^3}{8} \times 8 = m^3 + n^3 = y^3 + z^3 = -q \ldots ; \quad (16)$$

donde para satisfazer a condição

$$y^3 + z^3 = -q,$$

todas as nove combinações são igualmente admissiveis. Não se dá porém o mesmo com a segunda

$$yz = -\frac{p}{3}$$

ou

$$3yz = -p;$$

porque para isto seria preciso que o triplo producto de dois termos de cada uma das expressões de x fosse sempre

$$3mn = 3yz = -p;$$

ora isto não póde ter lugar sinão para os tres seguintes casos

$$x = m + n$$

$$x = m\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) + n\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$$

$$x = m\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) + n\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right);$$

onde o producto de dois termos é sempre mn, como se póde verificar.

As nove pretendidas expressões de x reduzem-se, portanto, a estas tres que se podem escrever sob esta fórma:

$$\left.\begin{aligned} x &= m + n \\ x &= -\frac{1}{2}(m+n) + \frac{1}{2}(m-n)\sqrt{-3} \\ x &= -\frac{1}{2}(m+n) - \frac{1}{2}(m-n)\sqrt{-3} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

São estas as tres raizes da equação (3), devendo-se notar que a sua somma é nulla. Substituindo m e n pelas expressões respectivas, deduzidas das equações (11), teremos:

$$(18)\ x' = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$(19)\ x'' = -\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^2}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^2}{27}}}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right]\sqrt{-3}$$

$$(20)\ x''' = -\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right]\sqrt{-3}$$

Podemos tomar a primeira destas fórmulas para representar as tres raizes da equação (3), tendo em vista que ella deve ser multiplicada, successivamente, pelas tres quantidades

$$1,\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\ \text{e}\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

designando cada producto uma das raizes da mesma equação.

213 — Discutamos agora as fórmulas das raizes (18) (19) (20).

Para maior simplicidade consideremos estas raizes sob as fórmas (17)

$$x = m + n$$

e

$$x = -\frac{m+n}{2} \pm \frac{m-n}{2}\sqrt{-3},$$

representando m e n as contracções acima feitas nas quaes entra a raiz quadrada do binomio

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27},$$

isto é,

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} + \left|\frac{p^3}{27}\right.}$$

Como a normalidade ou a singularidade das raizes depende deste binomio, vamos considerar as tres hypotheses em que elle é positivo, nullo e negativo.

1ª hypothese:

$$\frac{q}{4} + \frac{p^3}{27}$$

positivo. Neste caso as raizes da reduzida do segundo grau (7) sendo normaes e desiguaes, m e n são tambem normaes e desiguaes (8 e 10); donde conclue-se que a primeira expressão

$$x' = m + n$$

é normal e que as duas outras

$$x'' = -\frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2}\sqrt{-3}$$

e

$$x''' = -\frac{m+n}{2} - \frac{m-n}{2}\sqrt{-3},$$

são singulares conjugadas, porisso que $m - n$ sendo real,

$$\left(\frac{m-n}{2}\right)\sqrt{-3}$$

ou

$$\pm\sqrt{\frac{-3(m-n)}{2}}$$

é uma quantidade imaginaria.

A raiz normal será positiva se q fôr negativo, porque, como nos mostra a fórmula (18), $\frac{q}{2}$ é positivo e a primeira raiz cubica é positiva e necessariamente maior que a segunda que affecta a differença entre

$$\frac{q}{2} \text{ e } \left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)$$

emquanto que a primeira raiz cubica affecta a somma destas mesmas expressões.

Ao contrario a primeira raiz será negativa si q é positivo porque o primeiro radical cubico (18) affecta neste caso uma differença e a segunda uma somma de duas parcellas negativas.

2ª hypothese:

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$$

é nullo. Neste segundo caso as raizes da deduzida do 2º grau (7) são iguaes a

$$-\frac{q}{2}$$

(6), e portanto, m e n (9) são iguaes a

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Substituindo estas expressões na fórmula das raizes teremos

$$x' = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

$$x'' = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

e

$$x''' = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Si q é positivo a equação (3) terá tres raizes normaes, sendo uma x' negativa, e duas x' e x'' positivas, devendo notar-se que cada uma destas tem metade do valor da primeira. Si q é negativo haverá uma raiz positiva x' e duas outras negativas x'' e x'''; de sorte que neste caso como precedentemente, o producto das tres raizes é sempre igual a q, mas de signal contrario.

3ª hypothese:

$$\frac{q}{4} + \frac{p^3}{27}$$

negativo. Esta terceira hypothese importa em admittir que p é negativo e que $\frac{p^3}{27}$ é maior do que $\frac{q^2}{4}$. Neste caso as duas raizes da reduzida (7) são imaginarias (8) e portanto as expressões de m e de n tambem o são.

214 — INSPECÇÃO DO CASO IRREDUCTIVEL. — Resulta dahi que as raizes da equação dada apresentam neste caso a fórma imaginaria. Entretanto, vamos vêr que, embora tenham essa fórma singular, estas raizes são todas normaes.

Para mostrar isso basta desembaraçal-as das expressões imaginarias introduzidas pela hypothese considerada. Para conseguil-o com facilidade, substituamos $\frac{q}{2}$ por a e

$$\sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

supposta imaginaria, por $b\sqrt{-1}$.

Teremos:

$$x' = \sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-a-b\sqrt{-1}} =$$

$$= -\sqrt[3]{-a-b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} =$$

$$= -\left[\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}}\right]$$

..... (21)

$$x'' = -\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-a-b\sqrt{-1}}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{-a-b\sqrt{-1}}\right] \times \sqrt{-3} =$$

$$= +\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}}\right] \times \sqrt{-3}. \quad (22)$$

$$x''' = -\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-a \div b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-a-b\sqrt{-1}}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{-a-b\sqrt{-1}}\right] \times \sqrt{-3} =$$

$$= +\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a-b\sqrt{-3}}\right] \times \sqrt{-3}. \quad (23)$$

Ora, o desenvolvimento dos dois radicaes cubicos

$$\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} = (a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

e

$$\sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}} = (a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}},$$

dando como sabemos, resultados da fórma singular,

$$a' + b'\sqrt{-1} \text{ e } a' - b'\sqrt{-1},$$

a expressão de x produz entretanto um resultado normal, por isso que

$$x' = -(a' + b'\sqrt{-1}) + (a' - b'\sqrt{-1}) =$$

$$= -a' - b'\sqrt{-1} - a' + b'\sqrt{-1} = -2a'.$$

O mesmo se dá para as expressões de x'' e de x''', porque

$$x'' = \frac{1}{2}(a' + b'\sqrt{-1} + a' - b'\sqrt{-1}) +$$

$$+ \frac{1}{2}(a' + b'\sqrt{-1} - a' + b'\sqrt{-1})\sqrt{-3} =$$

$$= \frac{1}{2}(a' + b'\sqrt{-1} + a' + b'\sqrt{-1}) +$$

$$+ (a' + b'\sqrt{-1} - a' + b'\sqrt{-1})\frac{\sqrt{-3}}{2} =$$

$$= \frac{2a'}{2} + 2b'\sqrt{-1} \times \frac{\sqrt{-3}}{2} = a' + b'(\sqrt{-1})^2\sqrt{+3} =$$

$$= a' + b'(-\sqrt{+3}) = a' - b'\sqrt{3}.$$

$$x''' = \frac{1}{2}(a' + b'\sqrt{-1} + a' - b'\sqrt{-1}) -$$

$$- \frac{1}{2}(a' + b'\sqrt{-1} - a' + b'\sqrt{-1})\sqrt{-3} =$$

$$= \frac{1}{2}(a' + b'\sqrt{-1} + a' - b'\sqrt{-1}) -$$

$$- \frac{1}{2}(a' + b'\sqrt{-1} - a' + b'\sqrt{-1})\sqrt{-3} =$$

$$= \frac{2a'}{2} - 2b'(\sqrt{-1})^2\frac{\sqrt{+3}}{2} =$$

$$= a' - b'(-\sqrt{3}) = a' + b'\sqrt{3}.$$

Este caso das equações do 3º grau tem-se chamado de *irreductivel*, porque apesar de se provar que são normaes as tres raizes, x', x'' e x''' as fórmulas geraes que as traduzem (18) (19) (20) não tem podido até o presente ser desembaraçadas das irracionaes singulares que contêm, ficando assim de nenhuma utilidade para o calculo de seus valores numericos, a menos que nos contentemos com um resultado approximado, como aquelles que se obtêm transformando aquellas fórmulas em séries indefinidas e fazendo a somma de um maior ou menor numero de termos, conforme o grau de approximação. (31 e). Para preencher esta lacuna os algebristas modernos recorreram a origem geometrica das equações do 3º grau. Foi assim que Viète obteve a solução exacta deste caso, assimilando-o ao problema da *trisecção do angulo*; porém esta

---

(31 e) Para conseguir isto basta applicar a lei binominal aos radicaes cubicos que figuram em (21), (22) e (23), os quaes representam como sabemos potencias fraccionarias. Tomemos o desenvolvimento de

$$(a \pm b\sqrt{-1})^m$$

que comprehende estes como casos particulares, e procuremos dar-lhes uma fórma mais adequada as avaliações. Tomando em primeiro logar a expressão de x', notamos logo que

$$-[(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}]=$$

$$=-a^{\frac{1}{3}}\left[\left(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(1-\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

Fazendo

$$\frac{b}{a}=c,$$

ficamos reduzidos a desenvolver

$$(1+c\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} \text{ e } (1-c\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}},$$

a juntar depois os resultados e multiplicar a expressão obtida por

$$-a^{\frac{1}{3}}.$$

solução só deve ser estudada na Trigonometria, como constituindo uma reacção especial do dominio concreto da mathematica sobre o dominio abstracto.

Teremos assim:

$$(+c\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot c\sqrt{-1} - \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}c^2 - \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}-2}{3}c^3\sqrt{-1} + \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}-3}{4} - c^4 + etc.$$

Quanto a

$$(1 - c\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

vê-se que basta mudar na série o signal das potencias impares de c para ter logo:

$$(1 - c\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{\frac{1}{3}}{1}c\sqrt{-1}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}c^2 + \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}-2}{3}c^3\sqrt{-1} + \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}-3}{4}c^4 - etc.$$

Si em cada uma destas duas séries se reunem os termos da ordem par e os de ordem impar; teremos:

$$(1 + c\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(1 - \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}c^2 + \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}-3}{4} - c^4 - etc.\right) +$$

$$+ \left(\frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot c - \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}-2}{3}c^3 + \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}-3}{4}\cdot\frac{\frac{1}{3}-4}{5}c^5 - etc.\right)\sqrt{-1}$$

e

$$(1 - c\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(1 - \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}c^2 + \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}-3}{4}c^4 - etc.\right) -$$

$$- \left(\frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot c - \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}-2}{3}c^3 + \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}-3}{4}\cdot\frac{\frac{1}{3}-4}{5}c^5 - etc.\right)\sqrt{-1}$$

Resumindo a discussão precedente, nós vemos que na hypothese

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -z$$

ha tres raizes reaes e desiguaes; que na hypothese

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$$

ha tres raizes reaes, sendo duas iguaes; e que finalmente na hypothese

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = +s,$$

ha duas raizes irracionaes singulares e uma real.

Sommando as duas séries e multiplicando o resultado por

$$-a^{\frac{1}{3}},$$

teremos:

$$x' = -2a^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot c^2 + \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}-3}{4}c^4 - etc.\right) =$$

$$= -2a^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{q}\frac{b^2}{a^2} - \frac{10}{24^3}\cdot\frac{b}{a^4} + \frac{154}{6561}\cdot\frac{b^6}{a^6} - etc.\right),$$

Si em lugar de sommar os dois resultados acima, os subtrahissemos, teriamos

$$(1 + c\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} - (1 - c\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{3}}{1}c - \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}-3}{4}\cdot\frac{\frac{1}{3}-4}{5}\cdot c^5 - etc.\right)2\sqrt{-1}$$

donde

$$(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} - (a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 2a^{\frac{1}{3}}\sqrt{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{b}{a} - \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3} +\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}-3}{4}\cdot\frac{\frac{1}{3}-4}{5}\cdot\frac{b^5}{a^5} - etc.\right),$$

215 — COMPARAÇÃO COM OS RESULTADOS DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU. — Comparando esta apreciação com o que fizemos sobre a fórmula do 2º grau, notamos que aqui, como lá, o caso de igualdade de duas raizes da equação constitue uma separação entre o caso de normalidade e o de singularidade das mesmas raizes. Vemos tambem, levados por essa analogia, que a igualdade de um par de raizes da equação do 3º grau caracterisa um estado critico

---

Para passar desta expressão para os valores de x'' e x''' torna-se facil, porque sendo

$$x = \frac{1}{2}[(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}] \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}\,[(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} - (a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}],$$

vê-se que basta dividir por 2 a primeira série, que obtivemos, o que dá

$$a^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{q}\cdot\frac{b^2}{a^2} - \frac{10}{24^3}\cdot\frac{b^4}{a^4} + \frac{154}{6561}\cdot\frac{b^6}{a^6} - etc.\right),$$

multiplicar a segunda, que se muda em

$$2a^{\frac{1}{3}}\sqrt{-1}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{a} - \frac{5}{81}\cdot b^3 + \frac{22}{729}\cdot\frac{b^5}{a^5} - etc.\right),$$

a multiplicar, dizemos, por

$$\pm \frac{1}{3}\sqrt{-3}$$

e a ajuntar os resultados.

Assim procedendo, teremos para expressão de x'':

$$x'' = a^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{q}\cdot\frac{b^2}{a^2} - \frac{10}{24^3}\frac{b^4}{a^4} + \frac{154}{6561}\cdot\frac{b^6}{a^6} - etc.\right) -$$

$$- \frac{1}{3}\cdot\frac{b}{a}\,a^{\frac{1}{3}}\sqrt{-3}\left(1 - \frac{5}{27}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{22}{24^3}\frac{b^4}{a^4} - etc.\right) =$$

$$= a^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{q}\cdot\frac{b^2}{a^2} - \frac{10}{24^3}\frac{b^4}{a^4} + \frac{154}{6561}\cdot\frac{b^6}{a^6} - etc.\right) -$$

$$- \frac{b}{a^{\frac{1}{3}}}\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{5}{27}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{22}{24^3}\frac{b^4}{a^4} - etc.\right).$$

para a formação correspondente; de modo que a determinação dos maximos e minimos desta formação fica dependente da resolução da equação que lhe corresponde.

Com effeito, igualando a formação dada a uma indeterminada m, e resolvendo a equação resultante, não teremos mais do que determinar entre que limites póde variar m sem que duas das raizes se tornem singulares. Feito isto,

---

A expressão de x''' é a mesma, mudando-se apenas o signal de

$$\frac{b}{a^{\frac{1}{3}}}\,\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

As séries que acabamos de achar para expressões de x', x'' e x''' só são convenientes quando a é maior que b, porque então os termos da série irão diminuindo, e por conseguinte se poderá desprezar os ultimos quando se tornarem muito pequenos. Si porém acontece que a seja menor que b será preciso, empregando a fórmula do binomio para achar

$$\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} \text{ e } \sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}},$$

tomar

$$b\sqrt{-1}$$

para o primeiro termo do binomio e a para o segundo

O desenvolvimente procederá então segundo as potencias de $\frac{a}{b}$. Para obtel-o basta notar que

$$(b\sqrt{-1}+a)^{\frac{1}{3}} = \left(1+\frac{a}{b\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}\,(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(1-\frac{a}{b}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}\,(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

por isso que

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1};$$

e que

$$(-b\sqrt{-1}+a)^{\frac{1}{3}} = \left(1-\frac{a}{b\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{3}} - (-b^{\frac{1}{3}})\,(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(1+\frac{a}{b}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} \times (-b)^{\frac{1}{3}}\,(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}.$$

o limite dos valores reaes de x corresponderá ao valor de m que tornar iguaes duas das raizes da equação. Este processo comporta o mesmo aperfeiçoamento, indicado no 2º grau, o qual consiste como sabemos em olhar o valor da indeterminada m que torna iguaes duas das raizes da equação, como um estado critico da formação correspondente. A discriminação dos *maxima* e dos *minima* faz-se do mesmo modo.

216 — APPLICAÇÕES. — Para fazer algumas applicações das regras precedentes, tomemos a equação: $y^3 + 3y^2 - -3y + 25 = 0$ (1). Começaremos por fazer desapparecer o segundo termo desta equação, o que conseguiremos de accôrdo com o artificio conhecido, suppondo $y = x - 1$; a equação resultante será $x^3 - 6x + 30 = 0$ (2) a qual

---

Como os desenvolvimentos dos factores

$$\left(1 - \frac{a}{b}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ e } \left(1 + \frac{a}{b}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

se deduzirão dos de

$$\left(1 - \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ e } \left(1 + \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

mudando $\frac{b}{a}$ em $\frac{a}{b}$ não restará mais que multiplicar as séries resultantes pelos factores

$$b^{\frac{1}{3}}(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} \text{ e } (-b)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}.$$

A expressão de x' será:

$$x' = 2b^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{b} - \frac{5}{81}\frac{a^3}{b^3} + etc.\right) =$$

$$= \frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}}\left(-1 + \frac{5}{27}\frac{a^2}{b^2} - \frac{22}{24^3}\frac{a^4}{b^4} + \frac{374}{6561}\cdot\frac{a^6}{b^6} - etc.\right).$$

Facilmente acharemos as expressões de x'' e x'''.

sendo comparada a $x^3 + px + q = 0$, nos dá $p = -6$ e $q = 30$. Estes valores sendo substituidos em

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

dão

$$\sqrt{217},$$

que é uma quantidade real e positiva. A fórmula (18) dá portanto uma raiz real da equação dada.

Fazendo nesta fórmula

$$15\,\frac{q}{2} \text{ e } \sqrt{217} = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p}{27}},$$

teremos:

$$x' = \sqrt[3]{-15 + \sqrt{217}} + \sqrt[3]{-15 - \sqrt{217}}$$

que é a unica raiz real da equação (1). Substituindo-a na relação $y = x - 1$, teremos

$$y = \sqrt[3]{-15 + \sqrt{217}} + \sqrt[3]{-15 - \sqrt{217}} - 1,$$

para a unica raiz real da equação dada. As outras raizes de (1) serão:

$$x'' = -\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-15 + \sqrt{217}} + \sqrt[3]{-15 - \sqrt{217}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-15 + \sqrt{217}} - \sqrt[3]{-15 - \sqrt{217}}\right]\sqrt{3}\,\sqrt{-1}$$

e

$$x''' = -\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-15 + \sqrt{217}} + \sqrt[3]{-15 - \sqrt{217}}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-15 + \sqrt{217}} - \sqrt[3]{-15 - \sqrt{217}}\right]\sqrt{3}\,\sqrt{-1};$$

substituindo na relação $y = x - 1$, teremos as outras raizes correspondentes da equação dada.

Este exemplo nos mostra que, sendo positiva a quantidade

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

a fórmula (18) nos dá para raiz uma expressão embaraçada de radicaes. Isto tem lugar mesmo quando a raiz é racional. Tem-se disso um exemplo na equação $x^3 - 6x - 40 = 0$ comparavel immediatamente a equação (2). Fazendo $p = -6$ e $q = -40$, a fórmula (18) nos dá:

$$x' = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

A raiz acha-se assim expressa sob uma fórma irracional. Entretanto ella é commensuravel, porque a equação é verificada quando se faz $x = 4$. Supponhamos ainda que se tem a equação $x^3 + 3x - 4 = 0$. Esta equação podendo ser comparada immediatamente a equação $x^3 + px + q = 0$, nos mostra que $p = 3$, $q = -4$; e como p é positivo vemos que a fórmula (18) nos dá:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{5}},$$

para o unico valor normal de x. Si tomassemos ainda as equações $x^3 - 12 \pm 16 = 0$, e $x^3 - 21 \pm 16 = 0$, acharíamos: na primeira tres raizes reaes, sendo duas eguaes; e na segunda tres reaes e desiguaes.

217 — Reduzida, embora, a resolução da equação do 2º grau, a do 3º manifesta desde já a complexidade desta questão nos graus superiores. Com effeito, comparando a fórmula do 3º grau com a relativa ao segundo, vemos desde logo a complicação notavel que vai de um ao outro caso; porquanto, ao passo que nas do 2º grau só figura um radical do segundo grau, aqui se acha um do terceiro superposto a outro do segundo.

A composição destas fórmulas nos mostra que ellas se tornam impraticaveis para equações do 3º grau cujo

segundo termo não tenha desapparecido espontaneamente. A suppressão artificial deste, a semelhança do que fizemos passando da equação (1) a equação (2) sobrecarrega de tal maneira os coefficientes da fórmula definitiva, que fomos obrigados para obtel-a a fazer as simplificações que deram lugar a equação (3).

Si as fórmulas para esta equação assim simplificada, já são tão complexas, póde-se imaginar como ficariam ellas se as referissemos, a principio a equação (2) pela substituição de p e q por

$$f - \frac{e^2}{3} \text{ e } \frac{2e^3}{27} - \frac{fe}{3} + g,$$

e depois a equação (1) pela substituição de x na relação

$$y = x - \frac{e}{3}.$$

Este accrescimo de difficuldade que se nota do segundo para o terceiro grau, nos deixa perceber *á priori* a extrema complicação das fórmulas do 4º. E' tão grande esta complicação que torna mais apparente que real a resolução do 4º grau. Mesmo aqui, é tal a imperfeição desta sciencia que a resolução se acha essencialmente limitada ao caso de uma só incognita, por isso que duas equações simultaneas do 3º grau devem ordinariamente produzir uma equação final do nono grau, cuja resolução algebrica só em casos rarissimos poderia ser obtida.

Quando mesmo uma das equações fosse do segundo grau, a equação final seria do sexto, a qual tambem sómente em casos especiaes admittiria uma solução algebrica.

Esta impossibilidade, que tanto restringe o problema fundamental da Algebra Directa, nos mostra claramente que o estudo que se póde fazer sobre as raizes das equações de graus superiores não póde deixar de ser essencialmente inductivo; o que torna evidente a irracionalidade de pretender-se sempre substituir a inducção pela deducção.

§ 32

Resolução algebrica das equações do 4º grau a uma incognita

218 — A resolução algebrica das equações do 4º grau foi realisada como a do terceiro pelos geometras italianos do seculo XVI. Os mathematicos dessa época costumavam propôr entre si problemas a resolver; eram desafios publicos entre elles e que tinham a utilidade de excitar e entreter no espirito o estimulo necessario pelo estudo da sciencia. Deve-se a esses desafios muitas descobertas importantes e a da resolução das equações do 4º grau acha-se neste numero. Foi então proposto o problema seguinte: *Achar tres numeros continuamente proporcionaes, cuja somma seja 10 e o producto dos dois primeiros seja 6.*

Designando para maior generalidade, por a a somma dos tres numeros, por b o producto dos dois primeiros, e por x, y estes dois numeros, ter-se-á a principio $xy = b$. Em seguida, em virtude do enunciado, o terceiro numero será expresso por $\frac{y^2}{x}$, de sorte que a outra condição nos dará

$$x + y + \frac{y^2}{x} = a$$

Da primeira equação tira-se

$$x = \frac{b}{y};$$

e esta expressão substituida na segunda fornecerá

$$\frac{b}{y} + y + \frac{y^3}{b} = a;$$

ou fazendo desapparecer os denominadores, ordenando os termos

$$y^4 + by^2 - aby + b^2 = 0$$

equação do 4º grau sem o 2º termo.

Diz Bombelli em sua Algebra (32 a) que Luiz Ferrari, de Bolonha, discipulo de Cardan, conseguiu resolver esta equação por um methodo assás engenhoso: Consiste em decompol-a em duas partes, o que permitte a extracção da raiz quadrada de uma e da outra. Para isto foi bastante ajuntar aos dois membros da equação assim decomposta quantidades cuja determinação depende de uma outra equação, porém do 3º grau; de sorte que a resolução da equação do 4º grau fica dependente da do 3º e sujeita aos mesmos inconvenientes do caso irreductivel. Este methodo de resolução divulgou-se desde logo e foi empregado por todos os geometras até Descartes que instituiu um outro mais directo e a certos respeitos mais racional, embora menos simples.

Vamos estudar successivamente estes dois processos, apreciando em primeiro logar o que offerecem de commum.

219 — Complemento natural da terceira phase algebrica, a resolução das equações do 4º grau obtem-se fazendo depender este caso complexo dos dois casos anteriores, mais simples do 2º e 3º graus. Os dois processos mais usuaes para resolver a equação do 4º grau baseam-se numa equivalente decomposição binaria desta equação, e comportam um preambulo commum que consiste em reduzir o typo completo do 4º grau a um incompleto, mediante o desapparecimento do 2º termo affecto da mais alta potencia secundaria da variavel.

(32 a) A Algebra de Bombelli, impressa em Bolonha, em 1577, em lingua italiana, não só contém a descoberta de Ferrari, como tambem differentes observações importantes sobre as equações do 2º e 3º graus e principalmente sobre o calculo dos radicaes, por meio do qual o autor chega, em alguns casos, a tirar as raizes cubicas imaginarias dos binomios da fórmula do 3º grau no *caso irreductivel*, o que dá um resultado todo real, e fornece a prova mais directa da realidade desta sorte de expressões. (Lagrange.— *Leçons de Mathematiqne* données a l'école normale — 1795.)

Seja a equação

$$u^4 + au^3 + bu^2 + cu + d = 0$$

Fazendo $u = x - \frac{a}{4}$ e effectuando os calculos, vem

$$x^4 + \left(b - \frac{3}{8}a^2\right)x^2 + \left(c - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}a^3\right)x +$$

$$+ \left(d - \frac{3}{256}a^4 + \frac{1}{16}a^2 b - \frac{1}{4}ac\right) = 0 \qquad (1)$$

Fazendo as contracções:

$$b - \frac{3}{8}a^2 = q,\ c - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}a^3 = r$$

e

$$d - \frac{3}{256}a^4 + \frac{1}{16}a^2 b - \frac{1}{4}ac = s,$$

virá

$$x^4 + qx^2 + rx + s = 0 \qquad (2)$$

220 — Apreciemos em primeiro logar o engenhoso processo de Ferrari. Consiste em generalisar o artificio usado no segundo grau, isto é, sommar a ambos os membros da equação um binomio contendo uma indeterminada capaz de os tornar quadrados perfeitos. Elle reduz assim á resolução da equação proposta á de duas equações do segundo grau, por intermedio de uma do terceiro que fixa aquella indeterminada.

Conservando no primeiro membro sómente o termo da potencia principal da incognita, a equação (2) torna-se

$$x^4 = -qx^2 - rx - s; \qquad (3)$$

ajuntando a ambos os membros o binomio

$$yx^2 + \frac{y^2}{4}$$

(sendo y uma constante arbitraria) com o fim de tornar o primeiro quadrado de

$$x^2 + \frac{y}{2},$$

teremos:

$$x^4 + yx^2 + \frac{y^2}{4} = yx^2 - qx^2 - rx + \frac{y^2}{4} - s,$$

ou

$$\left(x^2 + \frac{y}{2}\right)^2 = (y - q)\,x^2 - rx + \left(\frac{y^2}{4} - s\right) \qquad (4)$$

O primeiro membro tendo se tornado um quadrado perfeito pela simples addição daquelle binomio, vejamos a que condições deve satisfazer a indeterminada y que este encerra, afim de que o segundo membro se torne tambem um quadrado. Este segundo membro tendo tres termos, é claro que só poderá ser o quadrado de um binomio; e como o segundo termo $-rx$ deve em tal caso representar o dobro do primeiro pelo segundo termo, do mesmo binomio, será preciso que:

$$\frac{1}{4}\,r^2 = (y - q)\left(\frac{y^2}{4} - s\right) \qquad (5)$$

isto é que o quadrado da metade do coefficiente do segundo termo (4) seja igual ao producto dos coefficientes dos outros dois termos. Expellindo o denominador 4 da ultima equação (5) e ordenando-a em relação a y, teremos:

$$y^3 - qy^2 - 4sy + (4qs - r^2) = 0 \qquad (6)$$

Comprehende-se que a resolução da equação proposta (1) depende agora da resolução desta equação; porque, uma vez conhecido um valor real de y, a sua substituição em (4) tornará o segundo membro desta equação um quadrado perfeito. Então, por isso que o primeiro já o é tambem, bastará extrahir a raiz quadrada de ambos, para que o grau da equação dada se tenha abaixado ao segundo.

Supponhamos, pois, que a resolução da equação (6) nos tenha feito conhecer y. Substituindo em (4) a expressão de

$$\frac{y^2}{4} - s$$

dada pela equação (5), teremos:

$$\left(x^2 + \frac{y}{2}\right)^2 = (y - q)\,x^2 - rx + \frac{r^2}{4\,(y - q)}$$

ou

$$\left(x^2 + \frac{y}{2}\right)^2 - (y - q)\,x^2 + rx - \frac{r^2}{4\,(y - q)} = 0.$$

Pondo $y - q$ em evidencia, teremos:

$$\left(x^2 + \frac{y}{2}\right)^2 = (y - q)\left[x^2 - \frac{rx}{y - q} + \frac{r^2}{4\,(y - q)^2}\right]$$

ou

$$\left(x^2 + \frac{y}{2}\right)^2 = \left[(y - q)^{1/2}\right]^2 \left[x^2 - \frac{rx}{y - q} + \frac{rx}{4\,(y - q)^2}\right]$$

ou ainda

$$\left(x^2 + \frac{y}{2}\right)^2 - \left[(y - q)^{1/2}\left(x - \frac{r}{2(y - q)}\right)\right]^2 = 0$$

O primeiro membro desta equação sendo igual á differença entre dois quadrados, teremos

$$\left[\left(x^2 + \frac{y}{2}\right) - (y - q)^{1/2}\left\{x - \frac{r}{2(y - q)}\right\}\right]$$

$$\left[\left(x^2 + \frac{y}{2}\right) + (y - q)^{1/2}\left\{x - \frac{r}{2(y - q)}\right\}\right] = 0$$

Daqui se deduz, que:

$$\left(x^2 + \frac{y}{2}\right) - (y - q)^{1/2}\left(x - \frac{r}{2(y - q)}\right) = 0$$

e

$$\left(x^2 + \frac{y}{2}\right) + (y - q)^{1/2}\left(x - \frac{r}{2(y - q)}\right) = 0,$$

ou effectuando, e ordenando

$$x^2 - (y-q)^{\frac{1}{2}}\, x + \left[\frac{y}{2} + \frac{r\,(y-q)^{1/2}}{2(y-q)}\right] = 0$$

e

$$x^2 + (y-q)^{\frac{1}{2}}\, x + \left[\frac{y}{2} - \frac{r\,(y-q)^{1/2}}{2(y-q)}\right] = 0,$$

ou ainda

$$x^2 - (y-q)^{\frac{1}{2}}\, x + \left[\frac{y}{2} + \frac{r}{2(y-q)^{1/2}}\right] = 0$$

e

$$x^2 + (y-q)^{\frac{1}{2}}\, x + \left[\frac{y}{2} - \frac{r}{2(y-q)^{1/2}}\right] = 0,$$

donde

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{y-q} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(y-q) - \frac{y}{2} - \frac{r}{2\times\sqrt{y-q}}} \quad (7)$$

e

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{y-q} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(y-q) - \frac{y}{2} + \frac{r}{2\sqrt{y-q}}} \quad (8)$$

A equação (6), que é do terceiro grau, é portanto a reduzida ou resolvente da equação dada. Vemos que era possivel traduzir por meio de fórmulas affectas de radicaes do 2º e 3º graus, as raizes da equação (6); agora concluimos que a equação do 4º grau (1) gosa tambem da mesma propriedade, por isso que as fórmulas (7 ou 8) dão as quatro raizes da equação (2) em formação dos coefficientes e de uma raiz qualquer y da resolvente (6).

Basta attender que nas fórmulas (7 e 8), y representa a expressão de uma das raizes desta equação do terceiro grau (6), complicada como vimos de raizes quadradas e cubicas, para logo notar o accrescimo de complicação que adquirem as fórmulas das raizes quando se passa do 3º ao 4º grau. Tão complexas são estas fórmulas do 4º grau que a sua avaliação é quasi sempre impossivel.

Essa circumstancia faz com que a resolução das equações do 4º grau, mais apparente que real, não offereça outra vantagem que a logica.

221 — Resolvamos agora a equação do 4º grau pelo processo de Descartes. Para expol-o, tomemos ainda o typo geral.

$$u^4 + au^3 + bu^2 + cu + \delta = 0 \qquad (1)$$

e supponhamos que pela substituição de u por $x - \frac{a}{4}$, se tenha feito desapparecer o termo au^3. Teremos:

$$x^4 + \left(b - \frac{3}{8}a^2\right)x^2 + \left(c - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}a^3\right)x +$$

$$+ \left(\delta - \frac{3}{256}a^4 + \frac{1}{16}a^2b - \frac{1}{4}ac\right) = 0$$

ou

$$x^4 + qx^2 + rx + s = 0 \qquad (2)$$

Suppondo que o primeiro membro desta equação (2) seja composto de duas formações do 2º grau, correspondentes ás duas equações:

e
$$\left.\begin{aligned} x^2 + mx + n &= 0 \\ x^2 + fx + g &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

teremos multiplicando uma pela outra, a equação:

$$x^4 + (m+f)\,x^3 + (n + fm + g)\,x^2 + (fn + gm)\,x + gn = 0 \quad 4$$

Comparando os termos homologos desta equação com os da precedente (2), a identidade das duas formações do 4º grau exige as seguintes equações de condição:

$$\left\{\begin{aligned} m + f &= 0 \quad \text{por ser nullo o coefficiente do 2º termo de (2)} \\ n + fm + g &= q \\ fn + gm &= r \\ gn &= s \end{aligned}\right.$$

as quaes servem para determinar qualquer das quatro incognitas m, n, f e g.

A primeira nos dá

$$f = -m$$

e as equações se tornarão :

$$x^2 + mx + n = 0$$
$$x^2 - mx + g = 0$$

e para a determinação dos coefficintes m, n e g, teremos as equações seguintes, mediante a substituição de f por $-m$, nas restantes :

$$\left.\begin{aligned} n - m^2 + g &= q \\ gm - mn &= r \\ gn &= s \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

A primeira nos dá

$$g = m^2 - n + q;$$

a segunda por substituição de g, dará :

$$n = \frac{m^3 + mq - r}{2m},$$

e a terceira nos dá ainda por substituição de g:

$$(m^2 - n + q)\, n = s$$

ou

$$mn^2 - n^2 + nq = s$$

ou ainda

$$m^2 - n + q = \frac{s}{n}.$$

Substituindo nesta, a expressão de n tirada da segunda, quando ahi substituimos g, teremos:

$$m^2 - \frac{m^3 + mq - r}{2m} + q = s \div \frac{m^3 + mq - r}{2m}$$

ou

$$m^2 - \frac{m^3 + mq - r}{2m} + q = \frac{2sm}{m^3 + mq - r}.$$

Expellindo os denominadores, teremos :

$$2m^3 (m^3 + mq - r) - (m^3 + mq - r)^2 +$$
$$+ 2mq (m^3 + mq - r) = 4rm^2$$

ou effectuando

$$2m^6 + 2qm^4 - 2rm^3 - m^6 - 2qm^4 + 2rm^3 - q^2m^2 +$$
$$+ 2qrm - r^2 + 2qm^4 + 2q^2m^2 - 2qrm = 4rm^2$$

ou reduzindo e ordenando:

$$m^6 + 2qm^4 + (q^2 - 4s) m^2 - r^2 = 0 ; \qquad (6)$$

equação do sexto grau, mas que se resolve como se fosse do 3º, porque sómente contém potencias pares da incognita.

Com effeito, suppondo

$$y = m^2$$

será

$$y^2 = m^4$$

e

$$y^3 = m^6$$

e teremos, portanto :

$$y^3 + 2qy^2 + (q^2 - 4s) y - r^2 - 0$$

que é a reduzida da equação do 4º grau, obtida pelo processo de Descartes.

Observação — Os conhecimentos que temos adquirido a respeito das propriedades que ligam os coefficientes de uma equação algebrica ás respectivas raizes, permittem ainda mostrar que a equação (6) não encerrando senão as potencias pares da variavel, terá suas raizes iguaes duas a duas e affectas de signaes contrarios ; de sorte que poderá ser resolvida á maneira das equações do 3º grau.

Com effeito, si representarmos por x_1, x_2, x_3 e x_4 as quatro raizes da equação proposta (1), equivalente a (6), é claro que teremos :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \qquad (7)$$

por isso que ella (2) não tem o segundo termo,

De outro lado, os valores de m tomados com signaes contrarios sendo evidentemente as sommas das raizes da equação obtida (6), tomadas duas a duas, elles devem ser em numero de seis, porque seis são as combinações que podemos fazer com quatro quantidades x_1, x_2, x_3 e x_4 tomadas duas a duas, isto é

$$\begin{array}{lll} x_1 + x_2, & x_1 + x_3, & x_1 + x_4 \\ x_2 + x_3, & x_2 + x_4 & \\ x_3 + x_4 & & \end{array} \qquad (7)$$

Nota-se porém que tres destas combinações são iguaes as outras tres, por isso que a somma total das quatro raizes senda nulla, as sommas parciaes destas raizes tomadas duas a duas, serão duas a duas iguaes e de signaes contrarios, isto é,

$$x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 = -(x_3 + x_4) \qquad (8)$$

Nestas condições a equação em m (6), que admittirá necessariamente para raizes estas seis sommas parciaes (7), embora do sexto grau, será comtudo reductivel ao terceiro por não conter as potencias pares da incognita.

Representando por m_1, m_2 e m_3, os tres valores de m teremos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= m_1 \\ x_1 + x_3 &= m_2 \\ x_1 + x_4 &= m_3 \\ x_2 + x_3 &= m_3 \\ x_2 + x_4 &= m_2 \\ x_3 + x_4 &= m_1 \end{aligned}$$

De sorte que a equação em m poderá ser escripta sob a fórma:

$$(m - m_1)(m + m_1)(m - m_2)(m + m_2)(m - m_3)(m + m_3) = 0,$$

ou

$$(m^2 - m_1^2)(m^2 - m_2^2)(m^2 - m_3^2) = 0$$

Fazendo $m^2 = y$, teremos portanto para reduzida da equação proposta (2):

$$(y - m_1^2)\ (y - m_2^2)\ (y - m_3^2) = 0$$

equação donde deduziremos:

$$y_1 = m_1^2,\ y_2 = m_2^2 \text{ e } y_3 = m_3^2$$

Estas expressões nos mostram que qualquer das raizes da reduzida (9) é igual ao quadrado de uma das raizes da equação final em m (6).

Si, em lugar de eliminar n entre as equações (3) e (4) tivessemos eliminado m, a equação final seria ainda do *sexto* grau mas tambem reductivel ao terceiro. Com effeito, os divisores do segundo grau da equação proposta (2) sendo expressos por:

$$(x - x_1)\ (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)\ x + x_1\ x_2$$
$$(x - x_1)\ (x - x_3) = x^2 - (x_1 + x_3)\ x + x_1\ x_3$$
$$(x - x_1)\ (x - x_4) = x^2 - (x_1 + x_4)\ x + x_1\ x_4$$
$$(x - x_2)\ (x - x_3) = x^2 - (x_2 + x_3)\ x + x_2\ x_3$$
$$(x - x_2)\ (x - x_4) = x^2 - (x_2 + x_4)\ x + x_3\ x_4$$
$$(x - x_3)\ (x - x_2) = x^2 - (x_3 + x_4)\ x + x_3\ x_4,$$

concluimos que na expressão $x^2 + mx + n$, o coefficiente n comporta seis valores distinctos, representados pelas sommas dos productos dois a dois das quatro raizes da equação proposta, a saber:

$$n_1 = x_1\ x_2,\ n_2 = x_1\ x_3,\ n_3 = x_1\ x_4,\ n_4 = x_2\ x_3,\ n_5 = x_2\ x_4,\ n_6 = x_3\ x_4;$$

de sorte que a equação final em n é do sexto grau.

Mas, sendo $x_1\ x_2\ x_3\ x_4 = s$, concluimos que

$$x_2\ x_3 = \frac{s}{x_1\ x_4},\ x_2\ x_4 = \frac{s}{x_1\ x_3} \text{ e } x_3\ x_4 = \frac{s}{x_1\ x_2},$$

donde

$$n_4 = \frac{s}{n_3},\ n_5 = \frac{s}{n_2} \text{ e } n_6 = \frac{s}{n_1};$$

isto é, as raizes da equação final, em n são:

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ \frac{s}{n_1},\ \frac{s}{n_2}\ \text{e}\ \frac{s}{n_3}.$$

A constituição algebrica de tal equação é portanto a seguinte:

$$(n-n_1)\,(n-n_2)\,(n-n_3)\left(n-\frac{s}{n_1}\right)\left(n-\frac{s}{n_3}\right)=0,$$

ou

$$(n-n_1)\left(n_1+\frac{s}{n_1}\right)(n-n_2)\left(n-\frac{s}{n_2}\right)(n-n_3)\left(n-\frac{s}{n_3}\right)=0$$

ou

$$\left[n^2-\left(n_1+\frac{s}{n_1}\right)n+s\right]\left[n^2-\left(n_2+\frac{s}{n_2}\right)n+s\right]$$

$$\left[n_3-\left(n_3+\frac{s}{n_3}\right)n+s\right]=0.$$

Dividindo ambos os membros desta equação por n^3, teremos:

$$\frac{n^2-\left(n_1+\frac{s}{n_1}\right)n+s}{n},\ \frac{n^2-\left(n_2+\frac{s}{n_2}\right)n+s}{n},$$

$$\frac{n^2-\left(n_3+\frac{s}{n_3}\right)n+s}{n}=0,$$

ou

$$\left[n-\left(n_1+\frac{s}{n_1}\right)+\frac{s}{n}\right]\left[n-\left(n_2+\frac{s}{n_2}\right)+\frac{s}{n}\right]$$

$$\left[n-\left(n_3+\frac{s}{n_3}\right)+\frac{s}{n}\right]=0,$$

ou ainda:

$$\left[\left(n+\frac{s}{n}\right)-\left(n_1+\frac{s}{n_1}\right)\right]\left[\left(n+\frac{s}{n}\right)-\left(n_2+\frac{s}{n_2}\right)\right]$$

$$\left[\left(n+\frac{s}{n}\right)-\left(n_3+\frac{s}{n_3}\right)\right]=0$$

Fazendo $n + \frac{s}{n} = y$, teremos:

$$\left[y - \left(n_1 + \frac{s}{n_1}\right)\right]\left[y - \left(n_2 + \frac{s}{n_2}\right)\right]\left[y - \left(n_3 + \frac{s}{n_3}\right)\right] = 0, \quad (10)$$

equação do 3º grau a que se reduz a equação final em n. Designando por y_1, y_2 e y_3 as raizes desta reduzida, teremos:

$$y_1 = n_1 + \frac{s}{n_1}, \quad y_2 = n_2 + \frac{s}{n_2} \quad \text{e} \quad y_3 = n_3 + \frac{s}{n_3}$$

Estas expressões nos mostram que qualquer das raizes da reduzida equivale a somma de duas raizes da equação final em n, cujo producto é igual ao termo conhecido da equação proposta (2). Em relação a esta reduzida, procederemos como no modo precedente.

Fica como vimos, por qualquer dos dois modos, reduzida a questão do quarto grau aos dois casos mais simples do 3º e 2º graus.

222 — Discutamos emfim a fórmula obtida pelo primeiro processo. O exame dos casos particulares da equação do 4º grau não offerece difficuldade alguma. As fórmulas (7) ou (8) nos mostram que, quando os coefficientes q, r e s da equação (2) são reaes, a natureza das raizes da reduzida (6) faz conhecer a das raizes da proposta.

Si as tres raizes da reduzida são reaes, e se succede que nenhuma dellas é negativa, as quatro raizes da proposta são reaes; si ao contrario a reduzida tem neste caso uma ou duas raizes negativas, as quatro raizes da proposta são imaginarias. Todavia duas destas raizes tornam-se reaes e iguaes quando a reduzida tem duas raizes negativas iguaes entre si. O ultimo termo da reduzida sendo essencialmente negativo, esta reduzida não poderá ter nenhuma raiz negativa, a não ser no caso em que ha uma raiz nulla.

Si a reduzida tem duas raizes imaginarias, a proposta terá duas raizes reaes e duas imaginarias.

As fórmulas (7) ou (8) nos deixam ainda ver as seguintes particularidades:

1ª. Si a reduzida tem duas raizes iguaes, differentes de zero, a proposta tem duas raizes iguaes, sendo as duas outras desiguaes differentes destas.

2ª. Si a reduzida tem duas raizes nullas, a proposta tem dois pares de raizes iguaes.

3ª. Si as tres raizes da reduzida são iguaes entre si e differentes de zero, a proposta tem tres raizes iguaes.

4ª. Si a reduzida tem tres raizes nullas, as quatro raizes da proposta são iguaes entre si.

223 — Apreciados sobre o ponto de vista logico, os resultados que temos obtido para a resolução do 3º e 4º graus devem ser considerados tão racionaes quanto os do 1º e 2º graus.

O mesmo porém não tem lugar sob o ponto de vista scientifico, porque a avaliação numerica das fórmulas obtidas é penosissima e quasi sempre pouco satisfactoria.

A expressão das raizes do 3º grau compõe-se de duas partes que, effectuando-se separadamente a extracção das raizes indicadas em cada uma, chega-se algumas vezes a valores sómente approximados, para raizes de valores inteiros.

Este inconveniente cresce ainda para o caso do 4º grau; porque si se quizesse exprimir immediatamente por seus coefficientes as raizes da equação deste grau, seria preciso, sob os radicaes do 2º grau que affectam as raizes da reduzida, escrever expressões que já contêm radicaes do terceiro grau sobre radicaes do segundo.

A difficuldade do caso irreductivel do 3º grau, apresentando-se então no quarto grau, e dando-se o mesmo nos graus superiores, comprehende-se que augmenta extraordinariamente na resolução litteral das equações desses graus.

De antemão podemos asseverar que quando mesmo se chegasse a resolver o quinto grau e seguintes, nada

mais teriamos que fórmulas algebricas, preciosas sob o ponto de vista logico, mas muito pouco uteis para a resolução effectiva das equações dos mesmos graus. (Lagrange).

Estas previsões geraes são verificadas comparando-se os tres primeiros graus: A fórmula do 2º grau só apresenta um radical do mesmo grau; a do 3º apresenta radicaes do 3º, complicado com radicaes do 2º, e finalmente a do 4º comprehende radicaes do 2º, abrangendo radicaes do 3º, abrangendo estes ainda radicaes do 2º grau. Estas combinações tornando inextricavel a fórmula do 4º grau, podemos sentir perfeitamente que a fórmula do 5º grau, e portanto as dos graus superiores, ficariam sempre inuteis (32 b).

(32 b) Como acabamos de vêr, os methodos empregados para resolver as equações do 3º e 4º graus, consistem essencialmente em transformar por substituições convenientes, á equação a resolver em uma outra, chamada reduzida, que possa ser resolvida por meio de equações de grau inferior. Ora, as raizes da proposta sendo obtidas por meio das raizes da reduzida, é visivel que são *formações* destas ultimas, e que assim as raizes da reduzida são por sua vez formações daquellas. Todos os methodos para resolver uma equação devem pois se reduzir á determinação de uma formação de suas raizes, que depende de uma equação de grau inferior em condições taes que forneça facilmente as raizes da proposta. Considerando sob este ponto de vista as diversas soluções das equações do 3º e 4º graus, chegou-se a um methodo directo para resolvel-as, oriundo da propria natureza dessas equações e que tem a vantagem logica de esclarecer estas soluções, de mostrar suas relações, fazendo ao mesmo tempo ver como se póde, por processos differentes, chegar entretanto a resultados identicos. Este methodo bem como a comparação dos methodos conhecidos para o mesmo fim, foi instituido da maneira a mais geral e mais luminosa pelo eminente Lagrange, em duas memorias da Academia de Berlim, relativas aos annos de 1770 e 1771; sobre o mesmo assumpto deve-se consultar a excellente memoria *Vandermonde*, impressa no volume da Academia de Sciencias de Paris para o anno de 1771 e a obra de Waring, intitulada *Meditationes algebraicæ*. Para expôr este methodo de um modo uniforme, retomemos a equação do 2º grau

$$x^2 + px + q = 0.$$

224 — No estudo que temos feito até aqui foram apreciadas as tres phases essenciaes da Algebra isolada ou directa, respectivamente instituidas pela antiguidade, pela idade média e pela transição moderna. Com as equações do 3º e 4º graus terminamos assim a terceira phase essen-

---

Chamando a e b as respectivas raizes, sua somma, é como vimos, $a + b = -p$. Portanto a resolução destas equações fica reduzida a conhecer o valor de uma formação das raizes, que, combinada com a precedente, determine cada uma das mesmas raizes por meio de equações do 1º grau. Para isto, é preciso que a formação procurada seja da fórma $la + mb$, isto é, formações lineares, nas quaes as quantidades são apenas elevadas á primeira potencia e não se acham multiplicadas umas pelas outras. Ora, a formação precedente é apenas susceptivel de duas combinações, mudando a em b, e reciprocamente, ella depende pois de uma equação do 2º grau excepto no caso em que $l = m$. Todavia, nesta hypothese esta formação dá sómente a somma das raizes já conhecidas. Mas, uma vez que somos forçados para determinar a formação $la + mb$ de que temos necessidade, a resolver uma equação do 2º grau será preciso que esta equação possa ser resolvida por uma simples extracção de raiz, e que portanto apenas encerre o quadrado da incognita. Neste caso, suas duas raizes são iguaes, e de signaes contrarios: E' preciso portanto determinar os dois coefficientes l e m, de maneira que a formação $la + mb$ não mude de valor, e tome um signal contrario, quando se muda a em b, e reciprocamente; o que dará

$$la - mb = -lb - ma,$$

ou

$$l = -m.$$

Si para simplificar, suppõe-se $l = 1$, a formação procurada será $m - b$; designando-a por 2, será dada pela equação

$$[z - (a - b)].\ [z - (b - a)] = 0,$$

ou

$$z^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Ora, tem-se

$$a^2 + b^2 = p^2 - 2q,\ ab = q:$$

Por conseguinte

$$z^2 = p^2 - 4q,$$

donde se tira z ou $a - b = \sqrt{(p^2 - 4q)}$. Combinando este resultado com a igualdade $a + b = -p$, acha-se para a e b as duas raizes que encontramos no paragrapho 28.

cial da Algebra Directa, sendo a primeira constituida pela resolução das equações do 1º grau reunida aos seus dois appendices naturaes (transformações algebricas e calculo indeterminado) e a segunda constituida pelo calculo determinado do 2º grau.

Consideremos agora a equação geral do 3º grau, que para maior simplicidade suppomos privada do segundo termo, e portanto da fórma

$$x^3 + px + q = 0.$$

Chamemos a b e c suas tres raizes e procuremos *a priori* uma *formação* dessas raizes que não dependa sinão de uma equação do 2º grau e que permitta determinal-as. A fórma mais simples que se póde admittir para essa formação, é $la + mb + nc$. Mudando o lugar das raizes a b e c é claro que se tem seis combinações differentes, de sorte que a equação de que depende esta formação é do 6º grau. Para utilisal-a é preciso que seja soluvel a maneira das equações do 2º grau, e que portanto o cubo desta formação apenas dependa de uma equação do 2º grau. Assim, chamando k e k' as duas raizes desta equação, e 1, α e α' as tres raizes cubicas da unidade, os seis valores da formação proposta serão

$$k,\ \alpha k,\ \alpha' k,\ k',\ \alpha k',\ \alpha' k'.$$

Si se tomar para k e k' dois destes valores, taes como $la + mb + nc$ e $lb + ma + nc$, e si attender-se que $\alpha' = \alpha^2$, é facil de vêr que os outros quatro valores não podem ser iguaes a estes, multiplicados respectivamente por α e α', a menos que os coefficientes l m e n não sejam as raizes cubicas da unidade; e reciprocamente, que si isto tiver lugar, os seis valores de $la + mb + nc$ não serão mais que os dois precedentes, multiplicados respectivamente por estas raizes cubicas. Suppondo pois l, m e n respectivamente iguaes a estas raizes, e representando por z a formação $la + mb + nc$, é evidente que z será dado pela equação

$$[z^3 - (a + \alpha b + \alpha' c)^3].\ [z^3 - (\alpha a + b + \alpha' c)^3] = 0,$$

na qual o coefficiente de z^3 e o termo independente de z, serão formações invariaveis das raizes a b e c, por isso que seis valores da formação $a + \alpha b + \alpha' c$ entram ahi da mesma maneira. E' com effeito, o que o calculo confirma *á posteriori* visto como si considerar-se que, pela natureza das raizes cubicas da unidade, se deve ter

$$1 + \alpha \pm \alpha' = 0,$$

Chega-se a reduzida $z^6 + 27q.\ z^3 - 27p^3 = 0$.

Universidade de S. Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

Na primeira phase algebrica resolve-se plenamente o problema geral que a caracterisa, embora, no caso de ser grande o numero de equações do 1º grau, a questão apresente calculos mui laboriosos. Na segunda phase a questão já fica reduzida ao caso de uma só equação do 2º grau a

---

As raizes desta equação são

$$3.\sqrt[3]{\left[-\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}\right]},$$

$$3.\sqrt[3]{\left[-\frac{1}{2}q-\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}\right]};$$

chamando, pois, z e z' estas raizes, ter-se-á

$$a+\alpha b+\alpha' c=z,$$

$$\alpha a+b+\alpha' c=z'.$$

A condição de ser nullo o segundo termo da proposta, deixa vêr que

$$a+b+c=0,$$

de sorte que ter-se-á

$$a=\frac{z+\alpha'.z'}{3},\quad b=\frac{\alpha'.z+z'}{3},\quad c=\frac{\alpha(z+z')}{3}$$

Sendo z e z' raizes cubicas, são ellas susceptiveis de tres valores cada uma o que dá ao todo nove valores differentes para as raizes a b e c. Esta multiplicidade de valores resulta de que z e z' sómente contêm o cubo de p; de modo que os valores precedentes de a b e c, resolvem, além da proposta, as duas equações,

$$x^3+\alpha px+q=0,\quad x^3+\alpha' px+q=0;$$

são portanto as raizes da equação do 9º grau, resultante do producto destas tres equações. Mas, entre estas raizes deve-se, apenas, tomar as tres que, substituidas por a b e c satisfaçam a condição

$$ab+ac+bc=p;$$

esta equação dá $zz'=-3\alpha p$. Assim, pois, designando por $3i$ e $3i'$ os valores de z e z', quando se toma a unidade para raiz cubica da unidade, basta suppôr $z=3i$ e $z'=3\alpha i'$, e desde então se terá

$$a=i+i',\quad b=\alpha' i+\alpha i',\quad c=\alpha i+\alpha' i'.$$

Substituindo α, $\alpha' i$ e i' pelos valores acima, chegaremos as fórmulas já obtidas.

uma incognita, ficando excluidos os casos complexos do calculo determinado e tambem do indeterminado.

Finalmente, como acabamos de vêr, na terceira phase os recursos da algebra só permittem ir até o quarto grau a uma incognita, onde as fórmulas são inextricaveis.

Consideremos emfim a equação do 4° grau

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

e chamando $a\ b\ c$ e d suas quatro raizes. Para determinal-as, procuremos, como nos casos precedentes do 3° e 2° graus, uma formação destas raizes que as dê facilmente, e que não dependa sinão de uma equação inferior ao 4°. Suppondo ainda que esta formação encerra as raizes sob uma fórma linear, podemos represental-a deste modo: $fa + mb + nc + ld$. Esta formação é susceptivel de vinte e quatro combinações differentes; depende, pois, de uma equação do 24° grau. Mas é facil de vêr que suppondo $f = m$, as vinte e quatro combinações reduzir-se-ão a doze, e que suppondo além disto $l = n$, as doze combinações se reduzirão a seis; de sorte que a formação $m.(a + b) + n.(c + d)$ depende apenas de uma equação do 6° grau. Emfim, suppondo ainda $n = -m'$, esta ultima equação terá suas raizes iguaes duas a duas, mas affectas de signaes contrarios; não encerrará pois, sinão as potencias pares da incognita, e como tal poderá ser resolvida a maneira das equações do 3° grau. Segue-se dahi que, admittindo para maior simplicidade ser $m = 1$, e representando por $4z$ a formação $(a + b - c - d)^2$, será z fornecido por uma equação do 3° grau: Ora, tem-se

$$(a + b - c - d)^2 = -4p + 4.(ab + cd);$$

a equação em z será, pois,

$$[z + p - (ab + cd)].[z + p - (ad + bc)]....$$

$$[z + p - (ac + bd)] = 0,$$

donde se tira

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4z)z - q^2 = 0$$

Tal é a *reduzida* das equações do 4° grau. Sejam z, z' e z'' suas tres raizes; ter-se-á

$$a + b - c - d = 2.\sqrt{(z)},$$

$$a + c - b - d = 2.\sqrt{(z')},$$

$$a + d - b - c = 2.\sqrt{(z'')}.$$

E' verdade que poderiamos, dispondo dos recursos apresentados por estas tres phases, resolver muitas equações de graus superiores ao quarto; mas semelhante estudo seria necessariamente relativo a equações de mais a mais excepcionaes, o que o torna ocioso e illusorio. Entretanto,

---

Combinando estas tres equações com $a + b + c + d = 0$, que resulta de não haver o segundo termo na equação proposta do 4º grau, ter-se-á

$$a = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{(z)} + \sqrt{(z')} + \sqrt{(z'')}\right],$$

$$b = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{(z)} - \sqrt{(z')} - \sqrt{(z'')}\right],$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{(z)} - \sqrt{(z')} - \sqrt{(z'')}\right],$$

$$d = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{(z)} - \sqrt{(z')} - \sqrt{(z'')}\right].$$

Cada um dos radicaes $\sqrt{(z)}$, $\sqrt{(z')}$, $\sqrt{(z'')}$, podendo ser affecto ao duplo signal + ou —, resultam, portanto, oito valores differentes, para as raizes a, b, c e d. Isto é devido a que a reduzida em z não encerrando sinão o quadrado de q, os valores que dá para a, b, c e d, devem igualmente satisfazer á proposta, suppondo nesta q negativo; de sorte que estes valores resolvem uma equação do 8º grau, do mesmo modo que a reduzida do 3º grau resolve uma equação do 4º grau. Mas, estes valores reduzem-se a quatro, fazendo-os preencher a condição que a somma dos productos tres a tres, das raizes a, b, c e d, seja igual a $a - q$. Esta somma é igual a

$$\sqrt{(z)} \cdot \sqrt{(z')} \cdot \sqrt{(z'')};$$

é preciso por conseguinte dar aos radicaes um signal tal, que este producto seja de signal contrario a q, e, isto determinará os quatro valores que se deve tomar para as raizes da equação proposta.

« Esta uniformidade dos methodos imaginados para resolver as equações de graus inferiores ao quinto, deu alguma esperança de os estender a este grau; mas, todas as tentativas feitas para este fim foram até o presente infructiferas ». (Laplace. — Leçons a l'École Normale, de 1795, *Journal de lÉcole Polytechnique)*.

Inaccessivel aos nossos esforços, a resolução geral do 5º grau é o *limite intransponivel* dos meios normaes da deducção algebrica; isto não impede, entretanto, que o estudo das propriedades geraes

em cumprimento aos programmas officiaes, devemos examinar alguns desses casos, e é o que faremos no paragrapho seguinte.

§ 33

Impossibilidade da resolução de equações algebricas superiores ao 4° grau, salvo em casos excepcionaes, exame desses casos.

225 — Fizemos vêr que as equações de grau superior ao 4° não são resolvidas algebricamente. Não temos necessidade de demonstrar pelo calculo essa impossibilidade, como fizeram Wantzel e Abel, porque as tentativas seculares de todos os geometras ahi estão para attestal-a. Accresce ainda que, quando mesmo se chegasse a uma fórmula para as equações do 5° grau, e tambem para as seguintes, de nada nos serviriam em vista da impossibilidade de avallal-as numericamente.

226 — Entretanto, vamos mostrar que em todos os graus ha classes particulares de equações para as quaes a resolução algebrica é possivel. Esta possibilidade dá-se quando em casos particulares póde reduzir as equações de graus superiores ao 4°, mediante transformações apropriadas, á outras de graus menos elevados. Nas mesmas condições acha-se tambem toda a equação dita *reductivel* na qual duas raizes quaesquer estão ligadas entre si de modo que uma possa ser racionalmente expressa pela outra, ou ainda quando todas podem ser expressas racionalmente por meio de uma dellas e em outros casos particulares.

As transformações relativas ás equações reductiveis pertencem ao dominio da Algebra superior onde as estu-

---

das equações permitta induzir processos especiaes de resolução das equações numericas de graus mais elevados conforme veremos na Algebra Superior.

Ferrari

daremos. Por isso nos occuparemos sómente das outras, limitando-nos aos casos mais importantes.

Comquanto semelhante estudo não offereça interesse logico em virtude de se tornarem cada vez mais raras as equações susceptiveis de solução, precisamos consignal-o aqui para satisfazer os programmas officiaes.

Vamos pois mencionar as classes particulares de equações cuja solução póde depender de outras dos quatro primeiros graus.

227 — Rarissimas vezes, póde-se resolver as equações algebricas completas além do 4º grau. Isto sómente é possivel nos casos em que os coefficientes da equação têm entre si relações particulares que resultam de outras relações entre suas raizes.

Estão nestes casos as equações *reciprocas*, assim chamadas porque se póde substituir a incognita x pela sua reciproca $\frac{1}{x}$, sem que fiquem alteradas. Gosam desta propriedade todas as equações completas em que são iguaes entre si os coefficientes dos termos equidistantes dos extremos, tal como as do typo

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + qx^2 + px + 1 = 0.$$

Com effeito, substituindo x por $\frac{1}{x}$, ella torna-se

$$\frac{1}{x^m} + \frac{p}{x^{m-1}} + \frac{q}{x^{m-2}} + \ldots + \frac{q}{x^2} + \frac{p}{x} + 1 = 0,$$

donde multiplicando por x^m e invertendo a ordem dos termos, resulta

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots qx^2 + px + 1 = 0$$

equação identica a proposta.

Esta propriedade permitte resolver as equações reciprocas até o 9º grau, reduzindo-as a outras de grau inferior ao 5º.

Para mostral-o, precisamos porém fixar precisamente a fórma de taes equações, visto como o caracter enunciado

é insufficiente, porque podem variar os signaes dos termos e serem estes em numero impar, de sorte a não haver paridade em relação ao termo do meio.

Devemos pois distinguir dois casos principaes conforme é impar ou par o grau da equação considerada.

1° caso. Seja uma equação qualquer do grau impar.

$$x^{2n+1} + px^{2n} + qx^{2n-1} + \ldots + sx^2 + tx + u = 0 \quad (1)$$

Para que esta equação seja reciproca, é preciso, por definição que não se altere quando se substitue x por $\frac{1}{x}$, o que dá

$$\frac{1}{x^{2n+1}} + \frac{p}{x^{2n}} + \frac{q}{x^{2n-1}} + \ldots + \frac{s}{x^2} + \frac{t}{x} + u = 0;$$

donde, multiplicando por x^{2n+1}, dividindo por u e invertendo a ordem dos termos, virá

$$x^{2n+1} + \frac{t}{u}x^{2n} + \frac{s}{u}x^{2n-1} + \ldots + \frac{q}{u}x^2 + \frac{p}{u}x + \frac{1}{u} = 0 \quad (2)$$

Ora para que as equações (1) e (2) sejam identicas é preciso que os coefficientes da mesma potencia de x sejam iguaes, isto é, que se tenha as relações

$$\frac{t}{u} = p,\ \frac{s}{u} = q,\ \ldots\ \frac{q}{u} = s,\ \frac{p}{u} = t,\ \frac{1}{u} = u;$$

da ultima deduz-se $u^2 = 1$, donde resulta que $u = \pm 1$.

Tomando a principio $u = +1$, resulta $t = p$, $s = q$, $\ldots\ q = s$, $p = t$; tomando em seguida $u = -1$, acha-se, $t = -p$, $s = -q$, $\ldots\ q = -s$, $p = -t$.

Vê-se, portanto, que uma equação do gráo impar é *reciproca* quando os coefficientes dos termos equidistantes dos extremos são iguaes e do mesmo signal, ou tambem iguaes e de signaes contrarios.

2º caso. Seja uma equação qualquer de grau par,

$$x^{n\,2} + px^{2\,n-1} + qx^{2\,n-2} + \ldots + rx^n + \ldots + sx^2 + tx + u = 0 \qquad (3)$$

Neste caso, por ser o numero de termos igual a $2n + 1$, o termo rx^n acha-se a igual distancia dos dois extremos.

Substituindo x por $\frac{1}{x}$, teremos

$$\frac{1}{x^{2\,n}} + \frac{p}{x^{n\,2-1}} + \frac{q}{x^{2\,n-2}} + \ldots + \frac{r}{x^n} + \ldots + \frac{s}{x^2} + \frac{t}{x} + u = 0;$$

donde multiplicando por $x^{2\,n}$, dividindo por u e invertendo a ordem dos termos, resulta

$$x^{2\,n} + \frac{t}{u}x^{2\,n-1} + \frac{s}{u}x^{2\,n-2} + \ldots + \frac{r}{u}x^n + \ldots + \frac{q}{u}x^2 + \frac{p}{u}x + \frac{1}{u} = 0. \qquad (4)$$

Ora, para que as equações (3) e (4) sejam identicas entre si é preciso que se tenham as relações

$$\frac{t}{u} = p,\ \frac{s}{u} = q,\ \ldots\ \frac{r}{u} = r,\ \ldots\ \frac{q}{u} = s.\ \frac{p}{u} = t,\ \frac{1}{u} = u,$$

A ultima torna-se $u^2 = 1$, donde $u = \pm 1$. Isto posto, para o primeiro valor $u = +1$, acha-se $t = p$, $s = q$, $\ldots\ r = r$, $\ldots\ q = s$, $p = t$; e para o segundo, $u = -1$ tem-se $t = -p$, $s = -q$, $\ldots\ r = -r$, $\ldots\ q = -s$, $p = -t$, igualdades nas quaes a do meio $r = -r$, não póde existir a menos que se supponha $r = 0$. Portanto, toda equação do grau par é *reciproca* quando os coefficientes dos termos equidistantes dos extremos são iguaes e do mesmo signal, e tambem quando, faltando o termo do meio, os coefficientes dos termos a igual distancia dos extremos são iguaes e de signaes contrarios.

Passemos agora a resolução desta especie de equações, e supponhamos a principio que se trata de uma equação de grau par, em que os coefficientes dos termos equidistantes dos extremos sejam iguaes e do mesmo signal. Tomemos para fixar as duas uma equação do 8º grau, a saber :

$$x^8 + px^7 + qx^6 + rx^5 + sx^4 + rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0 \quad (1)$$

Devemos fazer nesta equação, $x + \frac{1}{x} = z$, e esta transformação resulta das seguintes considerações: As raizes sendo reciprocas duas a duas, é evidente que o producto de cada par é igual a 1, isto é $x \times \frac{1}{x} = 1$; de sorte que bastará conhecer sua somma, $x + \frac{1}{x}$, para determinal-as por uma simples equação do 2º grau. Para tornar possivel a substituição basta dividir a equação (1) por x^4 e reunir os termos affectos dos mesmos coefficientes. o que dará

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + p\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + q\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \\ + r\left(x + \frac{1}{x}\right) + s = 0 \quad (3)$$

A difficuldade fica assim reduzida a exprimir por meio de $z = x + \frac{1}{x}$ as outras quantidades que se acham nos parentheses.

Ora, sendo

$$\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}} + x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}},$$

é claro que substituindo $x + \frac{1}{x}$ por z, se deduz

$$x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}} = \left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)z - \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right),$$

fórmula que nos dá a expressão

$$x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}}$$

por meio das duas expressões semelhantes de grau immediatamente inferior, m e $m-1$.

Com effeito, fazendo successivamente $m = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots$, acha-se

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right) z - \left(x^0 + \frac{1}{x^0}\right) = z^2 - 2;$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) z - \left(x + \frac{1}{x}\right) = z^3 - 3z;$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) z - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = z^4 - 4z^2 + 2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e assim por diante.

Só nos resta pois substituir na equação (3) os valores que acabamos de obter em lugar de

$$x^2 + \frac{1}{x^2},\ x^3 + \frac{1}{x^3},\ x^4 + \frac{1}{x^4},$$

o que nos dá finalmente a equação

$$(z^4 - 4z^2 + 2) + p(z^3 - 3z) + q(z^2 - 2) + rz + s = 0,$$

ou deduzindo e ordenando em relação a z,

$$z^4 + pz^3 + (q - 4)z^2 + (r - 3p)z + (s - 2q + 2) = 0,$$

equação de um grau sub-duplo do da proposta.

Consideremos em segundo lugar a equação de grau impar

$$x^{2n+1} + px^{2n} + qx^{2n-1} + \ldots\ldots + qx^2 + px + 1 = 0,$$

na qual os coefficientes dos termos equidistantes dos extremos são iguaes e do mesmo signal.

E' a principio visivel que -1 é a raiz desta equação, visto como ella se annulla pela substituição de x por -1, portanto o seu primeiro membro é divisivel por $x + 1$.

Effectuando a divisão verifica-se, além disto, que o quociente obtido é um polynomio de grau par em que os coefficientes equidistantes dos extremos são iguaes e do mesmo signal; de sorte que basta igualar a zero este quociente para obter-se uma equação reciproca de grau par da mesma fórma que a precedente, e que será resolvida do mesmo modo.

Resta-nos ainda considerar as equações reciprocas de grau par ou impar, cujos termos equidistantes dos extremos têm coefficientes iguaes e de signaes contrarios. Seja a equação

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots . - qx^2 - px - 1 - 0.$$

Não ha aqui termo médio porque se m é impar o numero total dos termos, $m + 1$, é par, e se m é par, o termo do meio deve faltar, conforme vimos, para que a equação seja reciproca.

Isto posto, é ainda visivel, que a equação proposta é satisfeita por $x = 1$, de sorte que seu primeiro membro é divisivel por $x - 1$. Ora, effectuando a divisão, obtem-se para quociente um polynomio cujos termos equidistantes dos extremos têm coefficientes iguaes e do mesmo signal. Igualando a zero este polynomio, a questão recáe portanto num dos dois casos precedentemente examinados.

Notemos ainda que na hypothese considerada, si suppozermos que m seja par, dividindo o primeiro membro da proposta por $x - 1$, obtem-se um quociente de grau impar, que é por sua vez divisivel por $x + 1$; de sorte que o primeiro membro da proposta será divisivel pelo producto $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$. Assim effectuando esta divisão, obtem-se para quociente um polynomio de grau par, e a questão recairá num dos casos precedentes.

Resumindo tudo que acaba de ser dito, vê-se: 1° que, si a equação reciproca dada é de grau par, tendo os coefficientes dos termos equidistantes dos extremos iguaes e do mesmo signal, sua resolução póde ser reduzida á de uma

equação de grau sub-duplo; 2° que se a equação é de grau impar, sendo os coefficientes dos termos equidistantes dos extremos iguaes e do mesmo signal, o seu primeiro membro é divisivel por $x + 1$, e effectuada esta divisão, a equação resultante póde ser reduzida a uma outra de grau sub-duplo; 3° que, si a equação de grau impar, tendo os coefficientes dos termos equidistantes dos extremas iguaes e de signaes contrarios, o seu primeiro membro é divisivel por $x - 1$, e effectuada esta divisão, a equação obtida póde ainda se reduzir a outra de grau sub-duplo; 4° que, si a equação é de grau par sendo os coefficientes equidistantes dos extremos iguaes e de signaes contrarios, o seu primeiro membro é divisivel por $x^2 - 1$, e effectuada a divisão, a equação resultante póde deduzir-se tambem a uma outra de grau sub-duplo.

Resolvamos, por exemplo, a equação

$$y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0.$$

Para reduzir sua resolução a do 2° grau, basta dividil-a por y^2 e reunir os termos equidistantes, o que dará:

$$y^2 + \frac{1}{y^2} + y + \frac{1}{y} + 1 = 0;$$

fazendo

$$y + \frac{1}{y} = z,$$

teremos

$$\left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = z^2$$

ou

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2.$$

Substituindo estes valores na equação precedente, virá

$$z^2 + z - 1 = 0,$$

donde

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

A relação

$$y + \frac{1}{y} = z,$$

dá por sua vez

$$y^2 - zy + 1 = 0,$$

donde

$$y = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2}.$$

Substituindo z pelo seu valor na expressão de y, virá emfim:

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 \mp 2\sqrt{5}}}{4},$$

onde os signaes de $\sqrt{5}$, devem se corresponder fóra e dentro do segundo radical no desdobramento que fornece as 4 raizes da equação proposta.

Tomemos ainda a equação

$$y^6 + py^5 + qy^4 + ry^3 + qy^2 + py + 1 = 0$$

Teremos dividindo ambos os seus membros por y^3:

$$y^3 + py^2 + qy + r + \frac{q}{y} + \frac{p}{y^2} + \frac{1}{y^3} = 0$$

ou ordenando

$$\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) + p\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + q\left(y + \frac{1}{y}\right) + r = 0;$$

e como vimos ser

$$y + \frac{1}{y} = z,\ y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2 \text{ e } y^3 + \frac{1}{y^3} = z^3 - 3z,$$

teremos por substituição:

$$z^3 - 3z + p(z^2 - 2) + qz + r = 0$$

ou effectuando

$$z^3 - 3z + pz^2 - 2p + qz + r = 0$$

ou ordenando

$$z^3 + pz^2 + (q - 3)z + r - 2p = 0.$$

Resolvendo esta equação e substituindo a expressão de z assim obtida na de y, deduzida da relação

$$y + \frac{1}{y} = z,$$

ou

$$y^2 + zy + 1 = 0,$$

isto é:

$$y = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2},$$

obtem-se as 6 raizes da equação proposta.

Relativamente á equação

$$y^8 + py^7 + qy^6 + ry^5 + sy^4 + ry^3 + qy^2 + py + 1 = 0$$

vimos que se chega a sua equivalente

$$z^4 + pz^3 + (q - 4)z^2 + (r - 3p)z + (s - 2q + 2) = 0,$$

mediante a substituição de

$$y^4 + \frac{1}{y^4} \text{ por } z^4 - 4z^2 + 2, \text{ e etc...}$$

Resolvendo esta equação do 4º grau, e substituindo a expressão obtida em

$$y = \frac{z}{2} \pm \frac{\sqrt{z^2 - 4}}{2},$$

obtêm-se as 8 raizes da proposta.

Si a equação dada fosse do 9º grau, sua resolução reduzir-se-ia á precedente, dividindo o seu primeiro membro pelo binomio $y \pm 1$, conforme os termos equidistantes dos extremos fossem do mesmo signal, ou de signaes contrarios.

Emfim, do decimo grau em diante, a resolução das equações reciprocas não é mais possivel, visto como fica dependendo de equações superiores ao 4º grau.

228 — Resolve-se tambem as equações quatrinomias da fórma

$$x^{3m} + Ax^{2m} + Bx^m + C = 0,$$

onde m é um numero inteiro qualquer.

Com effeito, ellas ficam dependendo de uma equação geral do 3º grau, pela hypothese $x^m = z$, o que dá:

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0.$$

Resolvendo esta equação, obtêm-se as tres expressões de z, as quaes permittem determinar todos os valores de x na proposta, mediante as raizes da equação $x^m = z$, de que adiante trataremos.

229 — As equações trinomias do typo $x^{2m} + Ax^m + B = 0$, nas quaes m é um numero inteiro qualquer, podem tambem ser resolvidas.

Com effeito, a hypothese $x^m = Z$ as transforma numa outra de segundo grau

$$Z^2 + Az + B = 0,$$

que dá

$$Z = -\frac{A}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4B},$$

e portanto para a proposta,

$$x = \sqrt[m]{\left(-\frac{A}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4B}\right)},$$

obtendo-se assim tantos valores para a expressão de x quantas forem as raizes da equação $x^m = Z$, de que adiante trataremos.

No numero destas equações trinomias em que os expoentes dos dois termos affectos da incognita são duplos, um do outro, acham-se as equações chamadas *biquadradas*. Basta suppôr $m = 2$ para obter-se o typo geral de taes equações, isto é:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

E' como se vê uma equação do 4º grau que só contém as potencias pares da incognita. Para reduzir sua resolução ao 2º grau, basta fazer $x^2 = y$ e por conseguinte $x^4 = y^2$, de sorte que se tem

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Deduz-se pois

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

mas, de $x^2 = y$, tira-se $x = \pm \sqrt{y}$; e por conseguinte

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Vê-se, portanto, que ha para x quatro valores, dois a dois iguaes e de signaes contrarios, a saber:

$$x' = +\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x'' = -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

$$x''' = +\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x'''' = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Seja por exemplo $x^4 - 12{,}49\,x^2 + 23{,}04 = 0$.

Applicando a fórmula geral tem-se immediatamente

$$x = \pm \sqrt{\frac{12{,}49 \pm \sqrt{12{,}49^2 - 4.23{,}04}}{2}}$$

donde

$$x = \pm \sqrt{\frac{12{,}49 \pm 7.99}{2}},$$

isto é

$$x = \pm \sqrt{10{,}24} = \pm 3{,}2$$

e

$$x = \pm \sqrt{2{,}23} = \pm 1{,}5$$

230 — Resolve-se emfim as equações binomias isto é da fórma $x^m \pm A = 0$ (1) sendo A uma quantidade qualquer positiva ou negativa.

Com effeito, esta equação nos dá immediatamente $x^m = \mp A$, donde $x = \sqrt[m]{A}$.

O valor de uma das raizes póde pois ser obtido mui simplesmente extrahindo de A a raiz de indice m.

Para obter as outras, designemos por a o valor desta isto é $\sqrt[m]{A} = a$, donde $A = a^m$, e façamos $x = ay$, suppondo y uma indeterminada capaz de fornecer os valores das raizes restantes.

Teremos nesta hypothese, em lugar da proposta (1), a equação

$$a^m y^m \pm a^m = 0$$

ou dividindo ambos os membros por a^m, resulta

$$y^m \pm 1 = 0. \qquad (2)$$

Calculando pois as raizes desta equação (2) é claro que obteremos as da proposta (1) por meio da relação $x = ay$.

1°. Supponhamos, por exemplo, $m = 2$.

Teremos assim as equações

$$y^2 - 1 = 0 \text{ e } y^2 + 1 = 0,$$

cuja resolução nos dá

$$y = \pm 1 \text{ e } y = \pm \sqrt{-1} = \pm i \qquad (1)$$

representando para abreviar $\sqrt{-1}$ pela letra i.

2°. Seja $m = 3$.

Tem-se a principio de resolver a equação

$$y^3 - 1 = 0$$

Para isto dividamos o seu primeiro membro por $y - 1$, o que dá para quociente

$$y^2 + y + 1.$$

Podemos pois dar a proposta a fórma

$$(y - 1)\ (y^2 + y + 1) = 0,$$

de sorte que ellas se decompõem em duas outras equações, isto é

$$y - 1 = 0$$

donde

$$y = 1 \text{ e } y^2 + y + 1 = 0,$$

donde

$$y = \frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{-3}}{2}$$

A equação $y^3 - 1 = 0$ admitte pois tres raizes, sendo, uma real e duas imaginarias, isto é,

$$y = 1 \text{ e } y = \frac{-1 + i\sqrt{-3}}{2} \text{ e } y = \frac{-1 - i\sqrt{-3}}{2} \quad (2)$$

devendo-se notar que cada uma destas raizes imaginarias é o quadrado da outra, como é facil verificar.

A equação considerada transformando-se em $y = \sqrt[3]{1}$, póde-se dizer que a unidade tem tres raizes cubicas, 1, α e α^2, representando α a expressão imaginaria

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Tomemos agora a equação

$$y^3 + 1 = 0$$

Ella não differe evidentemente de

$$y^3 - 1 = 0$$

sinão pela mudança de y em $-y$; de sorte que as suas raizes são as mesmas com signaes trocados, isto é -1

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ e } \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

3°. Seja $m = 4$.

Tomemos a principio a equação

$$y^4 - 1 = 0$$

Póde ser escripta sob a fórma

$$(y^2 - 1)\ (y^2 + 1) = 0,$$

de sorte que se decompõe em duas outras equações

$$y^2 - 1 = 0,\ y^2 + 1 = 0,$$

já resolvidas. Suas raizes são pois

$$y = 1,\ y = -1,\ y = +i \text{ e } y = -i \qquad (3)$$

Seja agora a equação

$$y^4 + 1 = 0$$

Para resolvel-a, podemos empregar o artificio que consiste em ajuntar e subtrahir no seu primeiro membro o termo $2y^2$ e virá

$$y^4 + 2y^2 + 1 - 2y^2 = 0$$

ou

$$(y^2 + 1)^2 - 2y^2 = 0,$$

ou ainda, decompondo em factores,

$$(y^2 + 1 + y\sqrt{2})\ (y^2 + 1 - y\sqrt{2}) = 0$$

As raizes da proposta são pois as mesmas destas duas equações do 2° grau, isto é

$$y = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \qquad y = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \text{ e } y = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \qquad (4)$$

4°. Seja $m = 5$.

Tomemos a principio a equação $y^5 - 1 = 0$. Seu primeiro membro dividido por $y - 1$ nos dá o quociente exacto

$$y^4 + y^3 + y^2 + y + 1,$$

de sorte que se póde pol-a sob a fórma

$$(y - 1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1) = 0$$

Suas raizes são por conseguinte as de

$$y - 1 = 0 \text{ e de } y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0,$$

isto é (443)

$$1 \text{ e } \frac{-1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 \mp 2\sqrt{5}}}{4},$$

de sorte que desdobrando-se esta ultima expressão, obtem-se cinco raizes da equação proposta.

Seja agora a equação $y^5 + 1 = 0$. Ella só differe de $y^5 - 1 = 0$ pelo signal de y; admitti, pois, as mesmas raizes com signaes trocados.

5°. Seja $m = 6$.

Tomemos a principio a equação $y^6 - 1 = 0$; ella se decompõe immediatamente nas duas equações já resolvidas (2) $y^3 - 1 = 0$ e $y^3 + 1 = 0$, que forneceram por conseguinte as suas seis raizes.

Seja agora a equação

$$y^6 + 1 = 0.$$

Si substituirmos nesta equação y por yi, virá

$$y^6 i^6 + 1 = 0,$$

ou ainda, por ser $i^6 = -1$, será

$$-y^6 + 1 = 0 \text{ ou } y^6 - 1 = 0.$$

Ora as equações $y^6 - 1 = 0$ e $y^6 + 1 = 0$ apenas differindo pela mudança de y em yi, as seis raizes da segunda

são iguaes ás da primeira, multiplicadas pelo symbolo i; suas expressões são pois:

$$i,\ \frac{-i-\sqrt{3}}{2},\ \frac{-i+\sqrt{3}}{2},\ -i,\ \frac{i+\sqrt{3}}{2}\ \text{e}\ \frac{i-\sqrt{3}}{2}\quad (5)$$

6º. Seja $m = 7$.

Tomando a principio a equação $y^7 - 1 = 0$, vê-se immediatamente que é satisfeita para $y - 1$, obtêm-se para quociente exacto:

$$y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0;$$

de sorte que a resolução da proposta fica dependendo da resolução desta equação reciproca já considerada.

Considerando, agora, a equação $y^7 + 1 = 0$, vê-se que é satisfeita para $y = -1$, e dividindo-a por $y + 1$, obtem-se ainda, para quociente, uma equação reciproca, do mesmo grau que a precedente e soluvel como ella.

7º. Seja $m = 8$.

Tomemos a principio a equação $y^8 + 1 = 0$.

Ajuntando e subtrahindo $2y^4$ ao seu primeiro membro, teremos:

$$y^8 + 2y^4 + 1 - 2y^4 = 0$$

ou

$$(y^4 - 1)^2 - 2y^4 = 0$$

Decompondo o primeiro membro em factores, obtêm-se ainda

$$(y^4 + 1 + y^2\sqrt{2})\ (y^4 + 1 - y^2\sqrt{2}) = 0$$

A resolução da equação proposta reduz-se, pois, á de duas equações biquadradas

$$y^4 + y^2\sqrt{2} + 1 = 0 \text{ e } y^4 - y^2\sqrt{2} + 1 = 0$$

que tem para raizes conforme vimos

$$y = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}} \text{ e } y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}}.$$

Universidade de S. Paulo
Escola Politécnica
Biblioteca

8°. Seja $m = 9$.

Tomando a principio a equação $y^9 - 1 = 0$, vê-se immediatamente que é satisfeita para $y = 1$, e dividindo-a por $y - 1$ obtem-se para quociente uma equação reciproca do 8° grau, soluvel como vimos.

Tomando agora a equação $y^9 + 1 = 0$, vê-se que é satisfeita para $y = -1$, e dividindo por $y + 1$, obtêm-se ainda uma equação reciproca do 8° grau, de termos alternadamente positivos e negativos, a qual tambem é soluvel.

9°. Seja $m = 10$.

Tomemos a principio a equação $y^{10} - 1 = 0$.

Ella se decompóe immediatamente nas duas equações já resolvidas (4°).

$$y^5 - 1 = 0 \text{ e } y^5 + 1 = 0,$$

que fornecem, portanto, as suas dez raizes.

Quanto á equação $y^{10} + 1 = 0$, não differe da precedente, senão pela mudança de y por yi, tendo pois, as mesmas raizes multiplicadas por i.

10°. Seja $m = 12$.

Tomemos a principio a equação $y^{12} - 1 = 0$. Seu primeiro membro decompõe-se immediatamente em dois factores, e tem para raizes as obtidas (5°) para as equações

$$y^6 - 1 = 0 \text{ e } y^6 + 1 = 0.$$

Quanto a equação $y^{12} + 1 = 0$, sua resolução reduz-se á de duas equações *trinomias*; porque addicionando e subtrahindo ao seu primeiro membro o termo $2y^6$, virá

$$y^{12} + 2y^6 + 1 - 2y^6 = 0 \text{ ou } (y^6 + 1)^2 - 2y^6 = 0$$

ou ainda, decompondo em factores,

$$(y^6 + 1 + y^3\sqrt{2})\ (y^6 + 1 - y^3\sqrt{2}) = 0.$$

A questão está pois reduzida á resolução de duas equações trinomias.

Considerando a primeira,

$$y^6 + y^3\sqrt{2} + 1 = 0,$$

façamos $y^3 = z$, donde $y^6 = z^2$. Tem-se então

$$z^2 + z\sqrt{2} + 1 = 0,$$

donde

$$z = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$$

Se designarmos por a^3 e b^3 os dois valores de z, resultará

$$y^3 - a^3 = 0 \text{ e } y^3 - b^3 = 0;$$

fazendo successivamente $y = au$ e $y = bv$, deduz-se das equações precedentes

$$u^3 - 1 = 0 \text{ e } v^3 - 1 = 0.$$

Os valores de u e de v tendo para expressão 1, α, e α^2, conclue-se que as seis raizes da primeira equação trinomia são finalmente a, $a\alpha$, $a\alpha^2$, b, $b\alpha$, $b\alpha^2$, ou

$$\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}},\ \alpha\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}},\ \alpha^2\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}},\ \alpha\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}},\ \alpha^2\sqrt{\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}}$$

Obtem-se do mesmo modo as raizes da segunda equação trinomia

$$y^7 - y^6\sqrt{2} + 1 = 0;$$

que só differem das precedentes pela mudança do signal do termo $-\sqrt{2}$, sob o radical cubico.

A não ser comprovar a complexidade das fórmulas além do 4º grau, a marcha que temos seguido para resolver as equações binomias só offerece utilidade como exercicio de calculo. Ella será substituida por um processo mais uniforme e mais geral, que não é do dominio da Algebra elementar.

231 — «Inaccessivel a todos os esforços dos geometras ha mais de tres seculos, a equação geral do 5º grau marca o limite intransponivel dos meios normaes da deducção algebrica. Mas uma judiciosa apreciação da complicação necessaria das fórmulas seguintes, deve finalmente nos dispôr a pouco lamentar este fraco alcance do entendimento humano no mais simples dos dominios abstractos.

A pluralidade normal das raizes corresponde a obrigação de se achar na fórmula de cada grau, radicaes da especie correspondente, por isso que os outros elementos algebricos apenas admittem um unico valor. Gradualmente obrigada a abranger tambem cada um dos gráos precedentes, esta fórmula deve pois conter, sob seus radicaes proprios, todos os de menor indice.

Verifica-se estas previsões geraes, comparando os tres primeiros graus, cuja combinação se torna já inextricavel para o 4º grau, o que faz sentir assás que a fórmula do 5º ficaria sempre inutil.

Emfim, combinando cada vez mais as tres phases algebricas, poderiamos instituir nos gráos superiores muitas equações especulativamente susceptiveis de uma verdadeira resolução, pela substituição successiva das fórmulas sempre adaptadas aos graus já resolvidos.

Mas, deve-se finalmente olhar um tal progresso como cioso, e mesmo illusorio, por isto que este successo menos real que apparente, não poderia aliás concernir sinão á equações cada vez mais excepcionaes, em vista do excesso crescente de seu grau sobre o numero de suas constantes.»

NOTA D — A resolução das equações biquadradas conduz, como vemos á expressão da fórma

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}},$$

isto é que correspondem á extracção da raiz quadrada de uma quantidade em parte racional e em parte irracional. Convém, em certos casos, transformar essas expressões em uma somma ou uma differença de dois radicaes simples do 2º grau, e esta transformação facilita a avaliação da fórmula. Supporemos a principio que A e B sendo quantidades racionaes, B é além disso positivo. Escrevemos então

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

impondo ás incognitas x e y a condição de seres racionaes. Si admittirmos que os dois membros da equação assim estabelecida só encerram quantidades positivas, temos o direito de eleval-as ao quadrado e virá: $A + \sqrt{B} = x + 2\sqrt{xy} + y$, isto é $(A - x - y) + \sqrt{B} = 2\sqrt{xy}$. Elevando-se de novo ao quadrado acha-se $(A - x + y)^2 + 2(A - x - y)\sqrt{B} + B = 4xy$.

O segundo membro desta equação sendo racional segundo a hypothese adoptada, é preciso que o primeiro membro seja-o tambem. O termo que contém $\sqrt{B}$ deve pois desapparecer, qualquer que seja B, o que exige que o coefficiente $(A - x - y)$ seja igual a zero. Tem-se assim $A - x - y = 0$ ou $x + y = A$; dahi resulta, em vista da equação considerada $B = 4xy$ ou $xy = \frac{B}{4}$. Conhece-se portanto, a somma e o producto das duas incognitas x e y, que são pois as raizes da equação do 2º grau

$$z^2 - Az + \frac{B}{4} = 0, \text{ donde } z = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Os valores de x e de y devem ser racionaes, como suppozemos, para que a transformação effectuada tenha utilidade pratica; ora, para que assim seja é preciso que a quantidade $\sqrt{A^2 - B}$ collocada sob o radical da expressão de z, seja um quadrado perfeito. Si representarmos esse quadrado por C^2, teremos separando as raizes da equação em z, as igualdades

$$x = \frac{A + C}{2} \text{ e } y = \frac{A - C}{2};$$

por conseguinte

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} + \sqrt{\frac{A - C}{2}} \qquad (1)$$

Si quizermos transformar a expressão

$$\sqrt{A - \sqrt{B}},$$

faremos do mesmo modo

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y},$$

suppondo $x > y$. Os mesmos raciocinios e os mesmos calculos conduzirão ao resultado

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} - \sqrt{\frac{A - C}{2}}. \qquad (2)$$

Póde-se emfim mudar ao mesmo tempo os signaes dos dois membros nas equações (1) e (2), de sorte que se tem

$$-\sqrt{A + \sqrt{B}} = -\sqrt{\frac{A + C}{2}} - \sqrt{\frac{A - C}{2}}, \qquad (3)$$

$$-\sqrt{A - \sqrt{B}} = -\sqrt{\frac{A + C}{2}} + \sqrt{\frac{A - C}{2}}. \qquad (4)$$

As fórmulas, (1), (2), (3), (4) estão evidentemente comprehendidas na fórmula geral

$$\pm\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \pm\left(\sqrt{\frac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - C}{2}}\right).$$

Deve-se tomar nesta ultima igualdade os mesmos signaes *exteriores* nos dois membros assim como os mesmos signaes *interiores*, sem que exista aliás nenhuma correlação entre a escolha adoptada para os signaes exteriores e a feita para os signaes interiores.

Seja por exemplo transformar a expressão

$$+\sqrt{5 + \sqrt{21}}.$$

Tem-se $A = 5$, $B = 21$; e por conseguinte $A^2 - B = C^2 = 25 - 21 = 4$ ou $C = 2$. Dahi resulta immediatamente

$$+\sqrt{5 + \sqrt{21}} = +\sqrt{\frac{5 + 2}{2}} + \sqrt{\frac{5 - 2}{2}}$$

ou

$$+\sqrt{5 + \sqrt{21}} = +\sqrt{3{,}5} + \sqrt{1{,}5}.$$

(Comberousse. — *Ob. cit.*).

Esta transformação tem uma utilidade mais geral: Ella nos deixa ver quanto é difficil converter as expressões irracionaes em

outras racionaes. Nem o methodo directo, por elevação a potencias successivas, nem o emprego de Incognitas auxiliares são sufficientes para conduzir ao resultado desejado na maioria dos casos. Estas difficuldades mostram ainda quão deficientes são os recursos da Algebra. Só podendo resolver as equações algebricas dos quatro primeiros graus, acha-se restricto ao caso em que estas equações são racionaes e não sabe transformal-o nestas, o mais das vezes, as quaes são irracionaes. E' verdade que por meio da eliminação se póde algumas vezes chegar ao resultado; mas isto só tem lugar em casos excepcionaes.

CAPITULO XII

DAS PROGRESSÕES EM GERAL E ESPECIALMENTE GEOMETRICAS. SEU CONFRONTO COM AS ARITHMETICAS, DONDE A INSTITUIÇÃO DOS LOGARITHMOS; CONSTRUCÇÃO E USO DAS TABOAS DE LOGARITHMOS. CONCEPÇÃO ALGEBRICA DOS LOGARITHMOS: SEU EMPREGO PARA RESOLVER AS EQUAÇÕES EXPONENCIAES. APPLICAÇÕES.

§ 34

Theoria das progressões em geral e especialmente geometricas

232 — «Da parte verdadeiramente usual do calculo das relações directas, necessaria ao estudo da Geometria, só nos resta considerar a theoria das progressões geometricas, seguida da apreciação connexa da instituição logarithmica e do calculo exponencial, bem como das series que lhes são proprias». Com semelhante complemento fica exposto tudo aquillo que deve ser comprehendido no dominio da Algebra ordinaria, para preparar a base indispensavel ao estudo da Geometria. E' verdade que a concepção cartesiana tornou necessario uma maior extensão do dominio algebrico. Mas esta extensão, que consiste essencialmente na resolução numerica das equações, exige por isso mesmo conhecimentos geometricos e deve portanto ser apreciada como um complemento algebrico da Geometria moderna para servir de base a sua parte transcendente. Vamos, pois, iniciar este estudo complementar, começando pelo que se refere ás progressões geometricas.

Susceptiveis de duas distincções geraes, as progressões quaesquer podem ser classificadas a principio segundo o grau, depois segundo o modo de subordinação mutua dos seus termos consecutivos. Além das progressões usuaes, em que cada termo apenas depende do precedente combinado a uma quantidade constante, podemos

com effeito aggrupar todas as outras tomando por base este duplo criterio. Todas aquellas em que cada termo não depende sinão dos dois precedentes, constituem a ordem mais simples a qual succede ao caso em que a dependencia abraça tres termos e assim por diante. Mas cada uma destas ordens póde ainda ser dividida em classes caracterisadas algebricamente pelo modo por que os termos são combinados.

Vê-se assim o quanto é vasto esse dominio das progressões, e não deve surprehender que a Algebra se limite ás *progressões geometricas* usuaes. O estudo das *progressões arithmeticas* já nos manifesta sufficientemente as difficuldades insuperaveis desta questão. Para ter-se dellas uma idéa precisa, basta observar que a mais simples das *progressões de 1ª classe*, em que cada termo é igual a somma dos dois precedentes, não poude ainda ser sommada especialmente. Póde-se assim apreciar mais uma vez a fraqueza de nossos meios theoricos e a necessidade de reservar seu uso para os casos verdadeiramente uteis.

233 — Estudada convenientemente a theoria das progressões geometricas deve pois ficar restricta ao seu caso usual e ás questões verdadeiramente uteis que a ella se prendem. Antes porém de abordal-as devemos recordar ligeiramente os problemas relativos ás progressões arithmeticas que podem receber aqui uma solução mais geral. Estas progressões podem ser expressas de um modo geral sob a fórma

$$a\ b\ c\ d\ e\ \ldots\ k\ l$$

Chamando r a razão e n o numero de termos, sabemos que um termo qualquer l póde ser expresso pela fórmula $l = a \pm (n-1)r$; e que a somma de um numero qualquer de termos é representada por

$$S = \frac{(a+l)n}{2}, \text{ ou } S = \frac{[2a \pm (n-1)r]}{2} n = an \pm \frac{n(n-1)r}{2},$$

conforme a progressão fôr crescente ou decrescente.

Vimos em Arithmetica que as progressões por differença podem ser de diversas ordens, chamando-se de *1ª ordem* as progressões usuaes ou aquellas em que a differença entre dois termos consecutivos é constante; de *2ª ordem*, quando taes differenças successivas formam entre si uma progressão de 1ª ordem, ou quando as segundas differenças são constantes; de *3ª ordem* quando as segundas differenças formam uma progressão de 2ª ordem, ou quando as terceiras differenças são constantes, e assim por diante.

Designando por b o primeiro termo da serie, por a a differença constante de cada termo, a progressão de 1ª ordem póde ser expressa por

$$b \quad b+a \quad b+2a \quad b+3a \quad b+4a \ldots.$$

A progressão arithmetica de 2ª ordem terá, pois, para 1º termo um numero qualquer c; sua primeira differença será b, primeiro termo da progressão de 1ª ordem donde resultou; e sua segunda differença será a, primeira differença desta ultima.

Primeira ordem	Segunda ordem	Sommas
	$c.$	$c.$
$b.$	$c+b$	$2c+b$
$b+a$	$c+2b+a$	$3c+3b+a$
$b+2a$	$c+3b+3a$	$4c+6b+4a$
$b+3a$	$c+4b+6a$	$5c+10b+10a$
$b+4a$	$c+5b+10a$	$6c+15b+20a.$

O termo geral da progressão por differença de 2º ordem é pois igual ao 1º, mais o termo sommatorio da progressão de 1ª ordem, que constitue a serie de suas primeiras differenças. Mas, como esta ultima só começa no 2º termo da outra, será preciso substituir nas fórmulas

precedentes a letra n por $n - 1$. Assim o termo geral de uma progressão arithmetica de 2ª ordem será

$$c + (n - 1)\, b + \frac{(n - 1)\,(n - 2)}{1.\ 2}\, a;$$

e ter-se-á para a somma de seus n primeiros termos, a fórmula seguinte:

$$nc + \frac{n(n - 1)}{1.\ 2}\, b + \frac{n.\ n - 1\ .\ n - 2}{1.\ 2.\ 3}\, a.$$

Emfim, reduzindo ao mesmo denominador 6, os tres termos desta fórmula, desenvolvendo os productos e dispondo-os segundo as potencias de n, que designa o numero dos termos, a somma dos n primeiros termos da progressão será igual a

$$\frac{n^2 a + 3n(b - a) + (6c - 3b + 2a)}{6}.\ n$$

Por exemplo seja dada a progressão $1, 4, 9, 16, 25$, etc., para achar a somma de um numero qualquer de seus termos.

Faremos $c = 1$ primeiro termo da progressão; as primeiras differenças $3, 5, 7, 9$, etc., que formam uma progressão por differença de 1ª ordem darão: $b = 3$; as segundas differenças $2, 2, 2$, etc., dão $a = 2$ e sua igualdade indica uma progressão por differença de 2ª ordem. Assim tem-se $a = 2$; $3b - 3a = 3$; e $6c - 3b + 2a = 1$; o termo sommatorio pedido será $\frac{1}{6}$ do producto $n(2n^2 + + 3n + 1)$ ou $n(n + 1)(2n + 1)$. Supponhamos ainda que se dá a progressão $1, 9, 25, 49, 81$, etc., para achar a fórmula sommatoria. Tem-se $c = 1$; as primeiras differenças $8, 16, 24, 32$, etc., nos dão $b = 8$; as segundas differenças $8, 8, 8$, etc., nos dão $a = 8$ e sua igualdade indica uma progressão por differença de 2ª ordem. Por-

tanto tendo $c = 1$; $b - a = 0$, e $6c - 3b + 3a = -2$, a somma pedida será igual a

$$\frac{n(8n^2 - 2)}{6} \text{ ou } \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$$

que se reduz a

$$\frac{n(2n + 1)(2n - 1)}{3}.$$

Seja ainda proposto determinar a somma dos quadrados dos termos successivos de uma progressão por differença de 1ª ordem, tendo a para primeiro termo, e b por differença. Os termos desta ultima progressão sendo a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, etc., seus quadrados serão a^2, $a^2 + 2ad + d^2$, $a^2 + 4ad + 4d^2$; $a^2 + 6ad + 9d^2$, etc. As primeiras differenças destes quadrados serão $2ad + d^2$; $2ad + 3d^2$; $2ad + 5d^2$, etc.: e suas segundas differenças serão todas iguaes entre si, a saber $2d^2$. Portanto tendo $c = a^2$; $b = 2ad + d^2$, $a = 2d^2$, tira-se facilmente $b - a = 2ad - d^2$, e $6c - 3b + 2a = 6a^2 - 6ad + d^2$. O termo sommatorio será pois igual a $2n^2d^2 + 3n(2ad - d^2) + (6a^2 - 6ad + d^2)$, multiplicado pelo numero de termos n, e dividido por 6.

A progressão por differença de 3ª ordem sendo aquella cujas differenças successivas, tomadas de um termo a outro formam entre si uma progressão de 2ª ordem, permitte determinar por meio desta a expressão do seu termo geral e do termo sommatorio. O termo geral da progressão por differença de 3ª ordem torna-se igual ao 1º mais a somma dos termos da progressão de 2ª ordem, que é a serie de suas 1as differenças: sómente será preciso substituir na expressão geral deste termo, o numero dos termos n por $n - 1$, porque a serie a que elle pertence só começa no 2º termo da outra. Portanto, si designarmos por d o primeiro termo da progressão de 3ª ordem, por c, b, a, os 1os termos das series de suas 1as, 2as e 3as differenças, entre as quaes estas ultimas são

iguaes entre si, e por n o numero de termos contado depois do 1°, o termo geral de uma progressão arithmetica de terceira ordem será

$$d + (n-1)c + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}b + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}a;$$

e a somma de todos estes termos, desde o 1° d até o ultimo inclusive, será igual a

$$nd + \frac{n(n-1)}{1.2}c + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}b + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a.$$

Porque para ter esta somma, será necessario a principio tomar n vezes o 1° termo d, e juntar os termos c, b, a respectivamente multiplicados pelos termos sommatorios de $(n-1)$, de

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}, \text{ de } \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}.$$

Estes termos são os que tornam-se

$$\frac{n(n+1)}{1.2}, \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}, \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4},$$

e substituindo ahi a letra n, successivamente por $n-1$, $n-2$, $n-3$. A somma pedida será, pois,

$$nd + \frac{n(n-1)}{1.2}c + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}b + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a.$$

E se reduzirmos ao denominador commum 24; e desenvolvermos os productos dispondo os termos segundo as potencias descendentes da letra n, esta fórmula tornar-se-á igual a n, multiplicado por $n^3a - (6a + 4b)n^2 + (11a - 12b + b\,12c)n - (6a - 8b + 12c - 24d)$, e dividido por 24.

Para applicar esta fórmula, supponhamos por exemplo que se pede a somma geral dos cubos dos numeros

naturaes, que são *1, 8, 27, 64* .... até n^3 inclusive. Tem-se a principio $d = 1$. A serie das 1as differenças *7, 19, 37, 61*, etc., dá $c = 7$. A serie das 2as differenças *12, 18, 24*, etc., faz conhecer $b = 12$. As 3as differenças são iguaes entre si, a saber: *6*, e assim $a = 6$. Dahi se tira $6a - 4b = 12$; em seguida $11a - 12b + 12c = 6$; emfim $6a - 8b + 12c - 24d = 0$. A somma pedida será pois

$$\frac{n(6n^3 + 12n^2 + 6n)}{2.4};$$

ou então

$$\frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4};$$

é pois o quadrado do numero

$$\frac{n(n+1)}{2},$$

que é por sua vez o numero triangular de indice n. A somma dos dez primeiros cubos da serie natural, a saber *1, 8, 27, ... 1000* será pois igual ao quadrado de *55* que é *3025*.

Supponhamos ainda que se pede a somma dos n cubos dos numeros impares, *1, 3, 5, 7* .... até o de $2n - 1$. Da serie dos cubos *1, 27, 125, 343, 729*, etc., tira-se a principio $d = 1$; suas primeiras differenças *26, 98, 218, 386*, etc., dão $c = 26$; suas segundas differenças *72, 120, 168*, etc., fazem conhecer $b = 72$. Emfim suas 3as differenças sendo todas iguaes entre si, e a 48, tem-se $a = 48$, Assim $6a - 4b = 0$, em seguida $11a - 12b + 12c = -24$, e $6a - 8b + nc - 24d = 0$. Dahi resulta depois de haver dividido por *24* de um lado e do outro o termo sommatorio muito simples $n^2(2n^2 - 1)$. Para $n = 10$, acha-se que a somma dos cubos dos numeros impares *1, 3, 5, 7*, etc., até o de *19*, é igual a *19900*.

O mesmo raciocinio é applicavel a todas as progressões em que, depois daquellas subtracções successivas,

chega-se a uma serie de differenças iguaes entre si. Designando por a o primeiro termo da progressão; por b o primeiro termo da serie de suas primeiras differenças; por c o 1º termo da serie das 2as differenças; por d o 1º das 3as differenças; por e o 1a das 4as differenças e assim por diante; a expressão geral do termo de indice n, será

$$a + \frac{(n-1)}{1} b + \frac{(n-1)\ (n-2)}{1.\ 2} c + \frac{(n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{1.\ 2.\ 3} d + \text{etc.};$$

e a somma dos n primeiros termos termos da serie será igual a

$$\frac{na}{1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} b + \frac{n(n-1)\ (n-2)}{1.\ 2.\ 3} c +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} d + \text{etc.}$$

No caso de uma progressão por differença de 1a ordem, as duas expressões terminam no 2º termo. Na de 2a ordem é preciso tomar 3; e na de 3a ordem tomar 4. A primeira ordem comprehende as simples progressões arithmeticas. Os termos de progressões de 2a ordem podem ser considerados como resultando da multiplicação dos termos correspondentes de duas progressões arithmeticas de 1a ordem, e multiplicando os termos correspondentes de tres progressões semelhantes, resultará uma progressão arithmetica de 3a ordem.

No caso em que estas progressões são iguaes entre si, resultará á das potencias dos termos de uma progressão arithmetica ordinaria; os quadrados formarão uma progressão de 2a ordem; os cubos, uma de 3a. (34 a).

(34 a) Uma apreciação mais profunda nos forneceria um meio de simplificar neste caso a regra que ensina a achar o termo sommatorio, e de generalisal-a estendendo-a aos expoentes negativos e fraccionarios, dos quaes uma analyse fundada sobre os simples conhecimentos dos numeros figurados não teria mais applicações. (C. KRAMP — *Éléméns d'Arithmétique Universelle*: Cologne, imp. Th. F. Thiriart, 1808.

234 — Vejamos ainda como póde a sommação das potencias, bem como a dos numeros figurados receber uma outra solução mais directa e mais geral pelo emprego da lei de Newton.

Consideremos a principio a sommação das potencias semelhantes dos termos de uma progressão arithmetica. Seja esta progressão

$$a,\ b,\ c,\ d\ \ldots.\ i\ k\ l \qquad (1)$$

sendo r a base e n o numero de termos considerados. Trata-se de obter a somma da progressão

$$a^m\ b^m\ c^m\ d^m\ e^m\ \ldots.\ i^m\ k^m\ l^m \qquad (2)$$

cujos termos são uma potencia qualquer inteira e positiva dos termos da primeira.

A expressão do termo geral da progressão (1) nos indicando que um qualquer dos seus termos é igual ao precedente sommado a base, teremos:

$$b = a + r,\ c = b + r,\ d = c + r,\ \ldots.\ k = l + r,\ l = k + r;$$

donde elevando á potencia m e desenvolvendo pela fórmula do binomio, teremos:

$$b^m = (a + r)^m = a^m + mra^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} r^2 a^{m-2} + \ldots. + r^m a^0.$$

$$c^m = (b + r)^m = b^m + mrb^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} r^2 b^{m-2} + \ldots. + r^m b^0.$$

. . . . . .

. . . . . .

$$k^m = (i + r)^m + i^m + mri^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} r^2 i^{m-2} + \ldots. r^m i^0,$$

$$l^m = (k + r)^m = k^m + mrk^{m-1} + \frac{m(m=l)}{1.\ 2} r^2 k^{m-2} + \ldots. + r^m k^0.$$

Sommando estas igualdades, membro a membro, teremos:

$$b^m + c^m + \ldots + k^m + l^m = a^m + b^m + c^m + \ldots + i^m + k^m +$$

$$+ mra^{m-1} + mrb^{m-1} + \ldots + mri^{m-1} + mrk^{m-1} +$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.\ 2} r^2 a^{m-2} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} r^2 b^{m-2} + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-2)}{1.\ 2} r^2 i^{m-2} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} r^2 k^{m-2} + \ldots +$$

$$+ r^m a^0 + r^m b^0 + \ldots + r^m i^0 + r^m k^0.$$

Passando $a^m + b^m + c^m + \ldots + i^m + k^m$ para o primeiro membro e pondo em evidencia

$$mr,\ \frac{m(m-1)}{1.\ 2} r^2,\ \frac{m(m-1)\ (m-2)}{1.\ 2.\ 3} r^3,\ \text{etc.}$$

virá:

$$l^m - a^m = mr\,(a^{m-1} + b^{m-1} + \ldots + i^{m-1} + k^{m-1}) +$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.\ 2} r^2 (a^{m-2} + b^{m-2} + c^{m-2} + \ldots i^{m-2} + k^{m-2}) +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ (m-2)}{1.\ 2.\ 3} r^3 (a^{m-3} + b^{m-3} + c^{m-3} + \ldots +$$

$$+ i^{m-3} + k^{m-3}) + \ldots + r^m (a^0 + b^0 + c^0 + \ldots i^0 + k^0).$$

Fazendo

$$a^0 + b^0 + c^0 + \ldots + i^0 + k^0 = S_0,\ a^1 + b^1 + c^1 + \ldots +$$

$$+ i^1 + k^1 = S_1,\ a^2 + b^2 + \ldots + i^2 + k^2 = S_2,\ \ldots a^{m-2} +$$

$$+ b^{m-2} + c^{m-2} + \ldots + i^{m-2} k^{m-2} = S^{m-2},$$

$$a^{m-1} + b^{m-1} + c^{m-1} + \ldots i^{m-1} + k^{m-1} = S^{m-1}$$

e substituindo essas expressões na precedente, teremos:

$$l^m - a^m = mr\,(S_{m-1} - l^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} r^2 (S_{m-2} - l^{m-2}) +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ (m-2)}{1.\ 2.\ 3} r^3 (S_{m-3} - l^{m-3}) + \ldots + r^m (S_0 - l^0) \quad (3)$$

Esta fórmula permitte effectuar a somma de uma progressão (2) cujos termos são a mesma potencia dos de uma progressão arithmetica (1). Vê-se pela ligação que existe entre as sommas S_0, S_1, S_2 .... S_{m-1}; que só se conhecerá cada uma dellas quando as que a precedem forem conhecidas; de modo que a somma representada por S_{m-1} vem expressa por meio das sommas representadas por S_{m-2}, S_{m-3}, ... S_0.

Para fazer applicação desta fórmula (3) não temos mais do que dar valores a indeterminada m: Para cada valor de m obteremos a somma dos termos da progressão (2), elevados todos a potencia $(m-1)$. E' assim que fazendo $m-1$, obteremos (3): $l-a=r(S_0-l^0)$, donde

$$S_0=\frac{l-a+r}{r}.$$

Como porém $l=a+(n-1)r$, teremos

$$S_0=\frac{a+(n-1)r-a+r}{r}=\frac{a+nr-r-a+r}{r}=n,$$

como já sabiamos.

Fazendo $m=2$, virá (3)

$$l^2-a^2=2r(S_1-l)+(S_0-l^0)r^2.$$

Como porém acabamos de vêr que $S_0=n$ (4) teremos por isso tambem que $l^0=1$:

$$l^2-a^2=2r(S_1-l)+(n-1)r^2,$$

donde

$$S_1-l=\frac{l^2-a^2}{2r}-\frac{r^2(n-1)}{2r}=\frac{l^2-a^2}{2r}-\frac{(n-1)r}{2},$$

donde

$$S_1=l+\frac{l^2-a^2}{2r}-\frac{(n-1)r}{2}=l+\frac{l^2-a^2}{2}-\frac{l-a}{2},$$

por isso que $l=a+(n-1)r$ e $l-a=(n-1)r$.

Transformando, teremos:

$$S_1 = \frac{l^2 - a^2}{2r} + l - \frac{l-a}{r} = \frac{l^2 - a^2}{2r} + \frac{2l - (l-a)}{2} = \frac{l^2 - a^2}{2r} +$$

$$+ \frac{2l - l + a}{2} = \frac{l^2 - a^2}{2r} + \frac{l+a}{2} = \frac{l^2 - a^2}{2r} + \frac{(l+a)}{2r} r =$$

$$= \frac{l^2 - a^2 + (l+a)\,r}{2r} = \frac{(l+a)\,(l-a) + (l+a)\,r}{2r} =$$

$$= \frac{(l+a)\,(l-a+r)}{2r}.$$

Attendendo que $l - a + r = nr$, virá

$$S_1 = \frac{(l+a)\,n}{2} \qquad (5)$$

como já sabiamos

Fazendo $m = 3$, teremos (3)

$$l^3 - a^3 = 3r\,(S_2 - l^2) + 3r^2\,(S_1 - l) + r^3\,(S_0 + l^0)$$

Substituindo aqui as expressões de S_0 e S_1, e resolvendo a equação relativamente a S_2, virá

$$S_2 = \frac{2\,(l^3 - a^3) + 3r\,(l^2 + a^2) + r^2\,(l-a)}{6r} \qquad (6)$$

Se suppozermos $m = 4$, virá

$$l^4 - a^4 = 4r\,(S_3 - l^3) + 6r^2(S_2 - l^2) + 4r^3(S_1 - l) + r^4(S_0 - l^0),$$

substituindo S_0, S_1, S_2 pelas suas expressões, teremos resolvendo a equação resultante relativamente a S_3:

$$S_3 = \frac{l^4 - a^4 + 2r\,(l^3 + a^3) + r^2\,(l^2 + a^2)}{4r} \qquad (7)$$

Se fizermos $m = 5$, teremos:

$$l^5 - a^5 = 5r\,(S_3 + l^4) + 10r^2\,(S_3 - l^1) + 10r^3\,(S_2 - l^2) +$$

$$+ 5r^4\,(S_1 - l) + r\,5\,(S_0 - l^0);$$

Universidade de S. Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

que torna-se depois das substituições S_0 S_1 S_2 e S_3:

$$l^5 - a^5 = 5rS_4 - 5rl^4 +$$

$$+ \frac{5rl^4 - 5ra^4 + 10r^2l^3 + 10r^2a^3 + 5r^3l^2 - 5r^3a^2}{2} -$$

$$- 10r^2l^3 +$$

$$+ \frac{20r^2l^3 - 20r^2a^3 + 30r^3l^2 + 30r^3a^2 + 10r^4l - 10r^4a}{6} -$$

$$- 10r^3l^2 + \frac{5r^3l^2 - 5r^3a^2 + 5r^4l + 5r^4a}{2} - 5r^4l + r^4l - r^4a:$$

o que dá

$$S_4 = \frac{6(l^5 - a^5) + 15r(l^4 + a^4) + 10r^2(l^3 - a^3) - r^4(l - a)}{30r} \quad (8)$$

Do mesmo modo acharemos as sommas seguintes S_5, S_6, S_7, etc., dos termos das progressões:

$$a^5\ b^5\ c^5\ \ldots\ ;\ a^6\ b^6\ c^6\ \ldots\ a^7\ b^7\ c^7\ \ldots$$

O methodo que acabamos de seguir apresenta um inconveniente de ser-se obrigado, para calcular cada somma, a conhecer já as sommas precedentes, além de não permittir a indicação da lei geral propria a um expoente qualquer m.

Vamos expôr um outro methodo, que embora equivalente, é mais racional e não apresenta esse defeito. Attribuido a Thomaz Simpson, é fundado sobre a relação entre a somma e o termo geral de uma progressão, relação que elle desenvolve com auxilio dos coefficientes indeterminados.

A observação das fórmulas conhecidas,

$$S_0 = n,\ S_1 = \frac{(a + l)n}{2} = \frac{[a + a + (n - 1)r]n}{2} =$$

$$= \frac{r}{2}n^2 + \frac{2a - r}{2}n,$$

nos mostra que a primeira só contém a primeira potencia de n, e que a segunda contém a segunda e a primeira

potencia da mesma quantidade, desde que se tenha feito a substituição de l pela fórmula de termo geral.

A analogia leva a acreditar que para S_2 obteremos uma expressão contendo as 1ª, 2ª e 3ª potencias do numero de termos n; que para S_3 obteremos uma expressão contendo as 1ª, 2ª, 3ª e 4ª potencias e emfim que para a somma das potencias inteiras m obteremos uma expressão da fórma

$$S_m = An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + Dn^{m-2} + \ldots + Un \quad (9)$$

sendo $A, B, C, D \ldots U$, coefficientes independentes de n. Admittindo isso, vejamos como é possivel determinar esses coefficientes. Seja a progressão arithmetica (1), $a\ b\ c\ d \ldots k\ l$, já considerada; substituindo b por $a + r$, c por $b + r$, d por $c + r$, e etc., ella tomará a fórma:

$$a \quad a + r \quad a + 2r \quad a + 3r \quad a + 4r \ldots a + (n - 1)r.$$

Nestas condições virá tambem:

$$a^m (a + r)^m (a + 2r)^m (a + 3r)^m \ldots [a + (n - 1)r]^m,$$

e portanto

$$S_m = a^m + (a + r)^m + (a + 2r)^m + (a + 3r)^m \ldots + [a + (n - 1)r]^m$$

Assim, teremos:

$$An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + Dn^{m-2} + \ldots + Un =$$
$$= a^m + (a + r)^m + (a + 2r)^m \ldots [a + (n - 1)r]^m \quad (10$$

Si suppozermos a progressão acima augmentada do termo seguinte, $a + nr$, o numero de termos que era n tornar-se-á $n + 1$. Pondo, pois, $n + 1$ em lugar de n, teremos semelhantemente:

$$A(n + 1)^{m+1} + B(n + 1)^m + C(n + 1)^{m-1} +$$
$$+ D(n + 1)^{m-2} + \ldots + U(n + 1) = a^m + (a + r)^m +$$
$$+ (a + 2r)^m + \ldots + [a + (n - 1)r]^m + (a + nr)^m;$$

Subtraindo esta igualdade da precedente (10), virá:

$$A(n+1)^{m+1} - n^{m+1}) + B(n+1)^m - n^m) +$$
$$+ C(n+1)^{m-1} - n^{m-1}) + \ldots + U = (a+nr)^m. \quad (11)$$

Desenvolvendo os calculos e ordenando em relação a n, virá

$$\left\{\begin{array}{l} (m+1)An^m + \dfrac{(m+1)m}{1.\ 2} An^{m-1} + \dfrac{(m+1)m(m-1)}{1.\ 2.\ 3} An^{m-2} + \text{etc.} \\ \qquad + Bn^{m-1} + \dfrac{m(m-1)}{1.\ 2} Bn^{m-2} + \text{etc.} \\ \qquad\qquad + (m-1) \qquad\quad Cn^{m-2} + \text{etc.} \end{array}\right\} =$$

$$= r^m n^m + mar^{m-1} n^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} a^2 r^{m-2} n^{m-2} + \text{etc.}$$

Identificando os dois membros, teremos:

$$(m+1)A = r^n, \quad \frac{(m+1)}{1.\ 2} A + mB = mar^{m-1};$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)}{1.\ 2.\ 3} A + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} B + (m-1)C = \frac{m(m-1)}{1.\ 2} a^2 r^{m-2};$$

$$\frac{(m-1)\,m\,(m-1)\,(m-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} A + \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1.\ 2.\ 3} B +$$

$$+ \frac{(m-1)\,(m-2)}{1.\ 2} C + (m-2)D = \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1.\ 2.\ 3} a^3 r^{m-3} \text{ etc.}$$

Tirando destas equações as fórmulas de A, B, C e etc., virá

$$A = \frac{r^m}{m+1}$$

$$B = ar^{m-1} \frac{m+1}{2} A;$$

$$C = \frac{m}{a} a^2 r^{m-2} - \frac{m}{2} B - \frac{(m+1)m}{2.\ 3} A$$

$$D = \frac{m(m-1)}{2.\ 3} a^3 r^{m-3} - \frac{m-1}{2} C - \frac{m(m-1)}{2.\ 3} B - \frac{(m-1)m(m-1)}{2.\ 3.\ 4} A$$

. . . . . .

Fazendo nestas fórmulas $m = 1, 2, 3$, etc., e substituindo de cada vez as expressões de A, B, C e etc., na fórmula acima (9), teremos para somma das differentes potencias:

$$S_0 = n$$

$$S_1 = \frac{r}{2} n^2 + \frac{2a - r}{2} n$$

$$S_2 = \frac{r^2}{3} n^3 + r. \frac{2a - r}{2} n^2 + \frac{6a^2 - 6ar + r^2}{6} n$$

$$S_3 = \frac{r^3}{4} n^4 + r^2. \frac{2a - r}{2} n^3 + r. \frac{6a^2 - 6ar + r^2}{4} n^2 + \\ + \frac{2a^3 - 3a^2 r + ar^2}{2} n$$

$$S_4 = \frac{r^4}{5} n^5 + r^3. \frac{2a - r}{2} n^4 + r^2 \frac{6a^2 - 6ar + r^2}{3} n^3 + \\ + r \frac{2a^3 - 3a^2 r + ar^2}{10} + \frac{30a^4 - 60a^3 r + 30a^2 n^2 - r^3}{30} n$$

$S_5 =$ etc.

Fazendo applicação destas fórmulas, a serie natural dos numeros $1, 2, 3 \ldots . n$; para a qual $a = 1$, e $r = 1$, teremos:

$$S_0 = n = \frac{n}{1} \qquad (11)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n = \frac{n(n+1)}{1.\ 2} \qquad (12)$$

$$S_2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{6} n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.\ 2.\ 3} \qquad (13)$$

$$S_3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4} \qquad (14)$$

$$S_4 = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{2.\ 3.\ 4} \qquad (15)\ (34\ b)$$

(34 b) As fórmulas (11), (12), (13), (14) e (15) permittem mostrar que a somma das primeiras potencias ou dos quadrados ou dos cubos de todos os numeros que precedem um numero primo, é

Esses resultados estão de accôrdo com os que obteriamos applicando as fórmulas (4) (5) (6) (7) e (8). Si procurassemos, por exemplo, a somma dos doze primeiros quadrados *1, 4, 9*, etc., teriamos, fazendo $n = 12$:

$$S_2 = \frac{12.\ 13.\ 25}{6} = 650$$

A dos doze primeiros cubos seria:

$$S_3 = \frac{12^2 \times 13^2}{4} = 6084;$$

a das doze primeiras potencias quartas seria:

$$\frac{12.\ 13.\ 25467}{2.\ 3.\ 5} = 60710.$$

---

divisivel por esse numero. Para isso basta notar que a fórmula $6n \pm 1$ encerra, com excepção de 2 e 3, todos os numeros primos fazendo successivamente $n = o, -1 = 2 = 3$, etc. E como para um valor qualquer attribuido a n, os numeros que precedem o numero $6n \pm 1$ são $6n$ ou $6n - 2$, conforme se trata de $6n + 1$ ou de $6n - 1$, é claro que substituindo em logar de n, $6n$ ou $6n - r$ nas fórmulas alludidas, teremos:

$$S_1 = \frac{6n(6n + 1)}{2} = 3n(6n + 1)$$

ou

$$S_1 = \frac{(6n - 2)\ (6n - 1)}{2} = (3n - 1)\ (6n - 1)$$

$$S_2 = \frac{6n(6n + 1)\ (12n + 1)}{2.\ 3} = n(6n + 1)\ (12n + 1)$$

ou

$$S_2 = \frac{(6n - 2)\ (6n - 1)\ (12n - 3)}{2.\ 3} = (3n - 1)\ (6n - 1)\ (4n - 1)$$

$$S_3 = \frac{36n^2(6n + 1)^2}{4} = 9n^2(6n + 1)\ (6n + 1)^2$$

ou

$$S_3 = \frac{(6n - 2)^2\ (6n - 1)^2}{4} = (3n - 1)^2\ (6n - 1)^2.$$

Vê-se por estas fórmulas que os quocientes de S_1, S_2 e S_3 por $6n \pm 1$ serão sempre inteiros. Para tomar um exemplo, façamos $n = 2$; então $6n \pm 1$ será *11* ou *13*. Para o primeiro caso ter-se-á $S_1 = 78$, $S_2 = 650$ e $S_3 = 6084$ todos divisiveis sem resto por *13*. Para o segundo caso virá $S_1 = 55$, $S_2 = 385$ e $S_3 = 3025$ todos divisiveis exactamente por *11*.

Vamos agora applicar estas fórmulas ás series dos numeros figurados:

1ª ordem ou naturaes . .	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...
2ª ordem ou triangulares .	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45...
3ª ordem pyramidaes . .	1, 4, 10, 20, 25, 56, 84, 120...
4ª ordem	1, 5, 15, 35, 70, 126, 250...

. . . . . .

Como cada uma destas series se fórma pela addição dos termos da serie precedente, concluimos que a somma de n termos de cada uma dellas é a mesma cousa que o termo geral da seguinte. Isso posto, a somma dos n primeiros termos da primeira serie sendo (12)

$$\frac{n(n+1)}{1.\ 2},$$

concluimos que o termo geral da segunda é igual a

$$\frac{n(n+1)}{1.\ 2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

E como o termo geral desta serie nos deve dar todos os seus termos desde que substituamos n pela serie natural dos numeros inteiros, concluimos (em vista da constituição da fórmula precedente) que teremos todos os termos substituindo n por S_1 (12) e n^2 por S_2. Obteremos, portanto, para exprimir essa somma dos n primeiros numeros triangulares:

$$\frac{1}{2} S_2 + \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.\ 3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} n(n+1) \left[\frac{2n+1}{2.\ 3} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} n(n+1) \cdot \frac{2n+4}{6}$$

ou

$$\frac{1}{2} S_2 + \frac{1}{2} S_1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3} \qquad (16)$$

De resto a fórmula $6n \pm 1$ nos deixa vêr que todos os numeros primos com excepção de 2 e 3 se acham comprehendidos nas duas progressões por differença: $5, 11, 17, 23, 29$, etc. e $1, 7, 13, 19$, etc.

Esta somma é o termo geral da terceira serie. Decompondo este termo geral em tres partes, a saber

$$\frac{n(n+1)\ (n+2)}{6} = \frac{n^3}{6} + \frac{3n}{6} + \frac{2n}{6},$$

e attribuindo a n os valores $1, 2, 3, 4$, etc., teriamos, com effeito, todos os termos $1, 4, 10, 20$, etc., da serie dos numeros pyramidaes. A somma dos n primeiros termos desta serie será por conseguinte expressa por:

$$\frac{1}{6} S_3 + \frac{3}{6} S_2 + \frac{2}{6} S_1 = \frac{1}{6} S_3 + \frac{1}{2} S_2 + \frac{1}{3} S_1.$$

Mas sendo pelas fórmulas (12), (13) e (14)

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},\ S_2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{1.\ 2.\ 3} \text{ e } S_1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

é claro que teremos:

$$\frac{1}{6} S_3 + \frac{1}{2} S_2 + \frac{1}{3} S_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot$$

$$\frac{n(n+1)\ (n2+1)}{1.\ 2.\ 3} + \frac{1}{3} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6} \frac{n(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot$$

$$\frac{n(n+1)\ (2n+1)}{2.\ 3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{6} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6} \frac{n^2(n+1)^2}{2} -$$

$$- \frac{1}{6} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)\ (n+2)}{6} = \frac{1}{4} \left[\frac{n^2(n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{3}\right] +$$

$$+ \frac{n(n+1)\ (n+2)}{6} = \frac{1}{4} \left[\frac{n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)}{6}\right] + \frac{n(n+1)\ (n+2)}{6} =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{n^4 + 2n^3 + n^2 - 2n^2 - 2n}{6}\right] + \frac{n(n+1)\ (n+2)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)\ (n+2)}{6} \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n}{6} \times \frac{6}{n(n+1)\ (n+2)} + 1\right] =$$

$$= \frac{n(n+1)\ (n+2)}{6} \left[\frac{n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n}{4(n^3 + 3n^2 + 2n)} + 1\right] = \frac{n(n+1)\ (n+2)}{6} \cdot$$

$$\frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{4(n^3 + 3n^2 + 2n)} = \frac{n(n+1)\ (n+2)}{6} \cdot$$

$$\frac{n+3}{4} = \frac{n(n+1)\ (n+2)\ (n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \qquad (17)$$

Do mesmo modo póde-se verificar que o termo geral do quarta serie, *1, 5, 15....* é expresso por

$$\frac{m(n+1)\ (n+2)\ (n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = \frac{n^4}{24} + \frac{6\,n^3}{24} + \frac{11\,n^2}{24} + \frac{6\,n}{24},$$

e que portanto é a somma dos seus n primeiros termos expressa por

$$\frac{1}{24}\,S_4 + \frac{6}{24}\,S_3 + \frac{11}{24}\,S_2 + \frac{6}{24}\,S_1 =$$

$$= \frac{1}{24}\,S_4 + \frac{1}{4}\,S_3 + \frac{11}{24}\,S_2 + \frac{1}{4}\,S_1.$$

Mas, sendo pelas fórmulas (12) (13) (14) e (15):

$$\frac{1}{24}\,S_4 = \frac{1}{24}\cdot\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30};\ \frac{6}{24}\,S_3 = \frac{n^4+2n_3+n^2}{16};$$

$$\frac{11}{24}\,S_2 = \frac{22n^3+33n^2+11n}{6.\ 24}\ \text{e}\ \frac{6}{24}\,S_1 = \frac{n^2+n}{8},$$

concluimos que a somma procurada é:

$$\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n+45n^4+90n^3+45n^2+110n^3+165n^2+55n+90n^2+90n}{24\times 30} =$$

$$= \frac{n^5+10\,n^4+35\,n^3+50\,n^2+24\,n}{5.\ 24} =$$

$$= \frac{n(n+1)\ (n+2)\ (n+3)\ (n+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}; \qquad (18)$$

e assim por diante.

235 — É facil mostrar que todas estas fórmulas (16) (17) (18) e etc., que dão a somma dos n primeiros termos das series dos numeros figurados representam os coefficientes successivos do desenvolvimento de $(1-x)^{-n}$, isto é, da potencia negativa $(-n)$ de um binomio formado pela variavel (x) subtrahida da unidade. Fazendo o desenvolvimento pela lei de Newton, teremos com effeito:

$$(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{1.\ 2}\,x^2 + \frac{n(n+1)\ (n+2)}{1.\ 2.\ 3}\,x^3 +$$

$$+ \frac{n(+1)\ (n+2)\ (n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\,x^4 \ldots \qquad (19)$$

Fazendo nesta fórmula $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ etc., o segundo membro representará para cada caso o desenvolvimento das potencias $-2, -3, -4$ e os coefficientes em cada um dos desenvolvimentos correspondentes representarão, para $n = 2$, os termos da serie natural; para $n = 3$, os termos das series dos numeros triangulares; para $n = 4$, os da serie dos numeros pyramidaes e assim por diante.

Para comprehender isto mais facilmente, vejamos qual a dependencia que existe entre os coefficientes de uma potencia $-n$, e os da seguinte $-(n+1)$. Para isso multipliquemos a igualdade (19) por $(1-x)^{-1}$. Virá

$$(1-x)^{-n-1} = (1-x)^{-1} + nx(1-x)^{-1} + \\ + \frac{n(n+1)}{1.2}x^2(1-x)^{-1} + \ldots.$$

ou desenvolvendo:

$$(1-x)^{-n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. + nx + nx^2 + \\ + nx^3 + \ldots. + \frac{n(n+1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^3 + \ldots.,$$

ordenando virá:

$$(1-x)^{-n-1} = 1 + (n+1)x + \left(1 + n + \frac{n(n+1)}{1.2}\right)x^2 + \\ + \left(1 + n + \frac{n(n+1)}{1.2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\right)x^3 + \ldots.$$

Este desenvolvimento nos mostra que os coefficientes de um termo do desenvolvimento de $(1-x)^{-(n+1)}$ se fórma da somma dos coefficientes dos termos do desenvolvimento de $(1-x)^{-n}$, desde o primeiro até aquelle da ordem que se considera, inclusive. Fazendo, pois, em (19) $n = 1$, teremos para coefficientes do desenvolvimento de $(1-x)^{-1}$:

$$1.\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots.\ \text{etc.}$$

Segundo a lei de dependencia que acabamos de deduzir, os coefficientes dos termos da potencia $(-x)^{-2}$ devem ser:

$$1,\ 1+1=2,\ 1+1+1=3,\ 1+1+1+1=4,\ 5,\ 6,\ \text{etc.},$$

que constituem a serie dos numeros naturaes. Para a potencia $(1-x)^{-3}$, teriamos os coefficientes:

$$1,\ 1+2=3,\ 1+2+3=6,\ 1+2+3+4=10,$$
$$1+2+3+4+5=15,\ \text{etc.},$$

que representam a serie dos numeros triangulares; para $(1-x)^{-4}$, teremos:

$$1,\ 1+3=4,\ 1+3+6=10,\ 1+3+6+10=20,\ \text{e etc.},$$

que é a serie dos numeros pyramidaes, e assim para as demais potencias negativas.

236 — Mostremos emfim como a lei binominal permitte ainda apreciar a subordinação das series das potencias dos *numeros naturaes* á estas series dos *numeros figurados*. Para isto basta desenvolver, pela lei de Newton, o termo geral de cada uma das series das potencias semelhantes dos numeros inteiros e positivos.

1°. A serie dos quadrados dos numeros naturaes é, symbolicamente,

$$1,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ \ldots\ (n+1)^2\ \ldots.$$

Mas

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1 = \frac{2n^2+4n+2}{2} =$$

$$= \frac{(n^2+2n+n+2)+(n^2+n)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)+n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

onde se vê que

$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ e } \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

são dois numeros triangulares consecutivos.

2º. A serie dos cubos dos numeros naturaes é, symbolicamente,

$$1,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 5^3,\ \ldots.\ (n+1)^3\ \ldots.$$

Mas

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = \frac{6n^3 + 18n^2 + 18n + 6}{2.\ 3} =$$

$$= \frac{1}{2.\ 3}\left[(n^3 + 6n^2 + 11n + 6) + 4(n^3 + 3n^2 + 2n) + (n^3 - 1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2.\ 3}\left[(n+1)\ (n+2)\ (n+3) + 4n(n+1)\ (n+2) + (n-1)\ n(n+1)\right] =$$

$$= n\,\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{2.\ 3} + \frac{n(n+1)\ (n+2)}{2.\ 3} +$$

$$+ \frac{(n+1)\ (n+2)\ (n+3)}{2.\ 3}$$

onde se vê que

$$\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{2.\ 3},\ \frac{n(n+1)\ (n+2)}{2.\ 3}$$

e

$$\frac{(n+1)\ (n+2)\ (n+3)}{2.\ 3}$$

são tres numeros pyramidaes consecutivos; logo, a serie dos cubos dos numeros naturaes é

$$1,\ 4,\ 1+4.\ 4+10,\ 4+4.\ 10+20,\ 10+4.$$

$$20+35,\ 20+4.\ 35+56,\ \ldots.$$

Cada termo desta série, exclusão feita dos dois primeiros, é pois a somma de tres numeros pyramidaes consecutivos, multiplicado o intermediario por 4. (34 c).

3º. As series das quatro potencias dos numeros naturaes é symbolicamente

$$1,\ 2^4,\ 3^4,\ 4^4,\ 5^4,\ \ldots.\ (n+1)^4,\ \ldots.$$

(34 c) A equação $1 + 4x + 10 = 27$ nos dá $x = 4$.

Mas

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 =$$

$$= \frac{1}{2.\ 3.\ 4}\,(24n^4 + 96n^3 + 144n^2 + 96n + 24) =$$

$$= \frac{1}{2.\ 3.\ 4}\,[(n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 24) +$$

$$+ 11\,(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) + 11(n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n) +$$

$$+ (n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n)] = \frac{1}{2.\ 3.\ 4}\,[(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4) +$$

$$+ 11\,n(n+1)\,(n+2)\,(n+3) + 11\,(n+1)\,n(n+1)\,(n+2) +$$

$$+ (n-2)\,(n-1)\,n(n+1)] = \frac{(n-2)\,(n-1)\,n\,(n+1)}{2.\ 3.\ 4} +$$

$$+ 11\,\frac{(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)}{2.\ 3.\ 4} + 11\,\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{2.\ 3.\ 4} +$$

$$+ \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}{2.\ 3.\ 4}$$

onde se vê que

$$\frac{(n-2)\,(n-1)\,n\,(n+1)}{2.\ 3.\ 4},\ \frac{(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)}{2.\ 3.\ 4},$$

$$\frac{n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{2.\ 3.\ 4}\ \text{e}\ \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}{2.\ 3.\ 4}$$

são quatro numeros figurados consecutivos da terceira especie, logo a serie das quartas potencias dos numeros naturaes é

$$1,\ 16,\ 81,\ 1 + 11.\ 5 + 11.\ 15 + 35,\ 5 + 11.\ 15 + 11.\ 35 + 70,$$

$$15 + 11.\ 35 + 11.\ 70 + 126,\ \ldots.$$

Cada termo desta serie, exclusão feita dos tres primeiros, é, pois, a somma de quatro termos consecutivos da terceira serie de numeros figurados, multiplicados os dois intermediarios por 11 (34 d).

(34 d) Das equações

$$1 + 5x + 15y + 35 = 256,\ x + y + 2 = 24$$

ou

$$5x + 15y = 220,\ x + y = 22$$

teriamos com effeito

$$x = 11,\ y = 11.$$

4º, A serie das quintas potencias dos numeros naturaes é, symbolicamente,

$$1,\ 2^5,\ 3^5,\ 4^5,\ 5^5,\ \ldots\ (n+1)^5,\ \ldots$$

Mas

$$(n+1)^5 = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 =$$

$$= \frac{1}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\,(120n^5 + 600n^4 + 1200n^3 + 1200n^2 + 600n + 120) =$$

$$= \frac{1}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\,[(n^5 + 15n^4 + 85n^3 + 225n^2 + 274n + 120) +$$

$$+ 26\,(n^5 + 10n^4 + 35n^3 + 50n^2 + 24n) +$$

$$+ 66\,(n^5 + 5n^4 + 5n^3 - 5n^2 - 6n) + 26\,(n^5 - 5n^3 + 4n) +$$

$$+ (n^5 - 5n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 6n)] =$$

$$= \frac{1}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\,[(n+1)\ (n+2)\ (n+3)\ (n+4)\ (n+5) +$$

$$+ 26\,n\,(n+1)\ (n+2)\ (n+3)\ (n+4) +$$

$$+ 66\,(n-1)\,n\,(n+1)\ (n+2)\ (n+3) +$$

$$+ 26\,(n-2)\ (n-1)\,n\,(n+1)\ (n+2) +$$

$$+ (n-3)\ (n-2)\ (n-1)\,n\,(n+1)] =$$

$$= \frac{(n+1)\ (n+2)\ (n+3)\ (n+4)\ (n+5)}{2.\ 3.\ 4.\ 5} +$$

$$+ 26\,\frac{(n-2)\ (n-1)\,n\,(n+1)\ (n+2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.} +$$

$$+ \frac{(n-3)\ (n-2)\ (n-1)\,n\,(n+1)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

onde se vê que

$$\frac{(n-3)\ (n-2)\ (n-1)\,n\,(n+1)}{2.\ 3.\ 4.\ 5},\quad \frac{(n-2)\ (n-1)\,n\,(n+1)\ (n-2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5},$$

$$\frac{(n-1)\,n\,(n+1)\ (n+2)\ (n+3)}{2.\ 3.\ 4.\ 5},\quad \frac{n\,(n+1)\ (n+2)\ (n+3)\ (n+4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

e

$$\frac{(n+1)\ (n+2)\ (n+3)\ (n+4)\ (n+5)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

são cinco numeros figurados consecutivos da quarta especie; logo as series das quintas potencias dos numeros naturaes é

$$1,\ 32,\ 243,\ 1024,\ 1 + 26.\ 6 + 66.\ 21 + 26.\ 56 + 126,$$

$$6 + 26.\ 21 + 66.\ 56 + 26,\ 126 + 252,$$

. . . . . .

Cada termo desta serie, exclusão feita dos quatro primeiros, é pois, a somma de cinco termos consecutivos da quarta serie de numeros figurados, multiplicados os tres intermediarios respectivamente por 26, 66 e 26 (34 e).

E assim por diante.

(34 e) As equações

$$1 + 6x + 21y + 56z + 126 = 3125,$$

$$x + y + z + 2 = 120$$

ou

$$6x + 21y + 56z = 2998,\quad x + y + z = 118 \qquad (1)$$

nos dão pela eliminação de z

$$10x + 7y = 722$$

Busquemos as fórmulas que fornecem as soluções inteiras de x e y; Da equação precedente tiramos

$$y = 103 - x + \frac{1 - 3x}{7}$$

Fazendo

$$\frac{1 - 3x}{7} = t,$$

temos

$$3x + 7t = 1,$$

donde

$$x = -2t + \frac{1 - t}{3}$$

Fazendo

$$\frac{1 - t}{3} = n,$$

temos

$$1 - t = 3n,$$

donde

$$t = 1 - 3n.$$

237 — O PROBLEMA DA SOMMAÇÃO DAS PROGRESSÕES GEOMETRICAS. — A sommação das progressões geometricas, apesar de sua apparente simplicidade, tem resistido até aqui não só aos artificios empregados para a sommação das *potencias* e dos *numeros figurados* como

---

Assim, pois,

$$x = -2(1-3n) + \frac{1-(1-3n)}{3}$$

ou

$$x = 7n - 2 \qquad (2)$$

e

$$y = 103 - (7n - 21) + \frac{1-3(7n-2)}{7}$$

ou

$$y = 106 - 10n \qquad (3)$$

Substituindo esses valores de x e y na fórmula

$$z = 118 - x - y$$

temos

$$z = 14 + 3n \qquad (4)$$

As soluções inteiras e positivas das equações (1) são conseguintemente dadas pelas fórmulas (2) (3) e (4).

Para

$n = 1$, temos $x = 5$, $y = 96$, $z = 17$;
$n = 2$, » $x = 12$, $y = 86$, $z = 20$;
$n = 3$, » $x = 19$, $y = 76$, $z = 23$;
$n = 4$, » $x = 26$, $y = 66$, $z = 26$;
$n = 5$, » $x = 33$, $y = 56$, $z = 29$;
$n = 6$, » $x = 40$, $y = 46$, $z = 32$;
$n = 7$, » $x = 47$, $y = 36$, $z = 35$;
$n = 8$, » $x = 54$, $y = 26$, $z = 38$;
$n = 9$, » $x = 61$, $y = 16$, $z = 41$;
$n = 10$, » $x = 63$, $y = 6$, $z = 44$.

Como vemos, o systema (1) comporta dez soluções inteiras e positivas, a quarta das quaes é a unica que convém. (R. TROMPOWSKY. — *Revista Didactica*).

tambem ao methodo mais geral dos coefficientes indeterminados. Entretanto, desde a mais remota antiguidade, foi a questão resolvida para as progressões geometricas usuaes em que *cada termo equivale ao precedente multiplicado por uma quantidade constante chamada razão, base ou escala da relação* (34 f). Representando por r esta quantidade por a o primeiro termo da progressão geometrica $a\ b\ c\ d\ \ldots\ k\ l$ ella póde ser expressa sob a fórma

$$a\ \ ar\ \ ar^2\ \ ar^3 \text{ etc.,}$$

de sorte que designando l um termo qualquer, e n a sua ordem, será elle expresso pela fórmula

$$l = ar^{n-1}$$

que mediante valores inteiros dados a n nos deixa conhecer um termo qualquer quando se tem o primeiro e a base da progressão, sem que seja necessario formar-se os que o precedem. Si a razão r é maior do que a unidade, a progressão será crescente, no caso contrario, será decrescente.

A propriedade caracteristica destas progressões geometricas é que o *producto de dois termos quaesquer equidistantes dos extremas é sempre igual ao producto dos extremos.*

(34 f) Foi Archimedes, o maior geometra dos antigos, quem primeiro realisou a sommação desta classe de progressões. Effectuando a quadratura da parabola pelo methodo geometrico, elle inscreveu a principio um triangulo no segmento parabolico, em seguida um outro em cada segmento immediato, e assim por diante: deste modo obteve a progressão geometrica $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16} \ldots$ cuja somma achou ser $\frac{4}{3}$ por ~~processo~~ excesso e seu methodo foi justamente qualificado de maravilhoso: Veremos com effeito em geometria que a área do segmento considerado é igual a somma de todos esses triangulos, e, portanto, equivale a $\frac{2}{3}$ da do parallelogrammo circumscripto.

Com effeito, consideremos a progressão de m termos e a de razão r

$$a\ b\ c\ d\ \ldots\ x\ \ldots\ y\ \ldots\ k\ l\ \ldots,$$

designando por x o termo que tem n antes de si, e por y o que tem n depois, em virtude da fórmula acima (1), será:

$$x = ar^{n-1}$$

para avaliar y podemos considerar a progressão que começa por y e que acaba por l e na qual este termo tem n outros antes de si, de sorte que obteremos

$$l = y \times r^{n-1},$$

donde

$$y = \frac{l}{r^{n-1}}$$

Multiplicando membro a membro esta igualdade pela ante-precedente, será

$$xy = al$$

Este resultado que não depende como se vê do logar dos termos considerados, nos deixa vêr que o producto de dois termos quaesquer equidistantes dos extremos é constantemente o mesmo.

Esta propriedade permitte determinar o producto de todos os termos da progressão geometrica, sem que seja necessario effectual-o successivamente. Porque chamando P este producto, será evidentemente

$$P = a \times b \times c \times d \times \ldots \times g \times h \times k \times l$$

$$P = l \times k \times h \times g \times \ldots \times d \times c \times b \times a;$$

multiplicando membro a membro estas duas igualdades, teremos

$$P^2 = (a \times l) \times (b \times k) \times (c \times h) \times (d \times g) \times \ldots \times$$
$$\times (g \times d) \times (h \times c) \times (k \times b) \times (l \times a),$$

resultados que, por serem iguaes aos productos binarios, se reduz a

$$P^2 = (al)^m,$$

donde

$$P = \sqrt{al^m} = (al)^{\frac{m}{2}} \qquad (2)$$

Passemos agora a indicar o modo pelo qual Archimedes conseguiu obter a sommação desta especie de progressões.

Observando que multiplicados pela *base* conservavam os termos a mesma successão, o grande geometra teve a idéa de subtrair a progressão inicial da outra, assim transformada, e desde logo fez surgir a lei de sommação.

Para obtel-a, consideremos a progressão

$$a\ b\ c\ \ldots\ k\ l\ \ldots$$

e representemos por S_n a somma dos n primeiros termos que se trata de obter.

Teremos

$$S_n = a + b + c + \ldots + k + l$$

Multiplicando por r ambos os membros desta igualdade, virá

$$S_n r = ar + br + cr + \ldots + kr + lr;$$

Como, porém, ar, br, cr. dr .... kr, são respectivamente iguaes a b, c, d, ... l, a igualdade precedente transformar-se-á em

$$S_n r = b + c + d + \ldots + l + lr;$$

subtrahindo desta a igualdade ante-precedente, teremos ainda

$$S_n r - S_n = lr - a$$

ou

$$S_n (r - 1) = lr - a$$

donde se deduz finalmente

$$S_n = \frac{lr - a}{r - 1}. \qquad (3)$$

Tal é a fórmula que nos dá a somma de um numero limitado de termos por meio do primeiro, do ultimo considerado e da razão.

Applicando-a, por exemplo, á determinação da somma dos cinco primeiros termos da progressão

$$1 \quad 5 \quad 25 \quad 125 \quad 625 \quad \ldots.$$

teremos

$$S_5 = \frac{3125 \times 5 - 1}{5 - 1} = \frac{15624}{4} = 3.906.$$

Si o ultimo termo não fôr conhecido, poder-se-á tambem determinar a somma. Basta para isto substituir, na fórmula precedente, o termo incognito l pela expressão respectiva (1), o que dará

$$S_n = \frac{ar^{n-1} \times r - a}{r - 1} \text{ ou } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \qquad (4)$$

Esta fórmula nos dá a somma de um numero qualquer de termos, conhecendo apenas o primeiro e a razão.

Appliquemol-a, por exemplo, á determinação da somma dos quatro primeiros termos da progressão $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{3}$ etc. Sendo preciso conhecer a *razão*, podemos obtel-a pela fórmula (1) que nos dá immediatamente:

$$\frac{4}{3} = \frac{3}{2} \times r,$$

donde se deduz que

$$r = \frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{8}{9}.$$

Applicando agora a fórmula (4), virá

$$S_4 = \frac{\frac{3}{2}\left[\left(\frac{8}{9}\right)^3 - 1\right]}{\frac{8}{9} - 1} = \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{512}{729} - 1\right)}{-\frac{1}{9}} = \frac{-\frac{3}{2} \times \frac{217}{729}}{-\frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{651}{1458} \times \frac{9}{1} = \frac{5859}{1458} = \frac{217}{54}.$$

Si a progressão fôr decrescente, esta fórmula nos deixa vêr que a somma total dos seus termos tende para um limite representado pela relação geometrica entre o termo inicial e o complemento da base para a unidade.

Com effeito, multiplicando por -1 ambos os termos da fracção precedente, póde ella ser escripta sob a fórma

$$S = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \times r^n.$$

Ora, por isso que a progressão é decrescente, sua razão r é menor que a unidade, e por conseguinte sel-o-á tambem r^n, que será tanto menor quanto maior fôr n. Assim, quanto maior fôr o numero de termos considerados na progressão, tanto menor será

$$\frac{a}{1-r} \times r^n,$$

e por conseguinte a somma destes termos se approximará cada vez mais de $\frac{a}{1-r}$, sem jámais attingir esta grandeza que é portanto o seu limite.

A expressão $\frac{a}{1-r}$ póde, pois, ser tomada para representar approximadamente a somma indefinida de toda serie. Ella nos fornece historicamente o primeiro exemplo numerico da noção de *limite* que só mais tarde emanou do estudo arithmetico das fracções.

Applicando a fórmula assim obtida

$$S = \frac{a}{1-r}. \qquad (5)$$

ás *dizimas periodicas*, chega-se novamente á expressão de sua fracção geratriz, já obtida no Calculo dos valores.

Com effeito, consideremos a principio, o caso mais simples em que a periodica é *plena*, e seja esta

0,666 ....

Podemos escrevel-a do seguinte modo:

$$\frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots.$$

que sob esta fórma se apresenta claramente como uma progressão geometrica decrescente, cuja base é $\frac{1}{10}$. A fórmula acima (5) nos dá, portanto,

$$S = \frac{\frac{6}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{10}{10} - \frac{1}{10}} = \frac{6}{10 - 1}.$$

No systema decimal, esta geratriz seria, pois, $\frac{6}{9}$, e de modo analago se obteria a geratriz de qualquer outra *periodica simples.*

Si a periodica fôr composta, por exemplo,

$$0{,}5666 \ldots$$

a questão reduz-se ao caso precedente, porque se póde pol-a sob a fórma

$$0{,}5 + 0{,}0666 \ldots.$$

ou

$$0{,}5666 \ldots. = 0{,}5 + \frac{1}{10} \times 0{,}666 \ldots.;$$

de sorte que será

$$S = \frac{5}{10} + \frac{1}{10} + \frac{6}{10 - 1} = \frac{5(10 - 1) + 6}{10(10 - 1)} = \frac{56 - 5}{10(10 - 1)},$$

geratriz procurada. No systema decimal seria esta

$$\frac{56 - 5}{90} = \frac{51}{90},$$

e no septimal

$$\frac{5}{60}.$$

Se quizermos simplesmente chegar a somma já conhecida dos dez primeiros termos da progressão.

$$\frac{6}{10} \quad \frac{6}{100} \ldots.$$

bastaria applicar a fórmula (4) e teriamos então

$$S_{10} = \frac{\frac{6}{10}\left[\left(\frac{1}{10}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{10} - 1} =$$

$$= \frac{-\frac{6}{10} \times \frac{9.999.999.999}{10.000.000.000}}{-\frac{9}{10}} = \frac{6 \times 9.999.999.999}{100.000.000.000} \times \frac{10}{9} =$$

$$= \frac{6 \times 0,9.999.999.999}{9} = 0,6.666.666.666.$$

Infelizmente o artificio empregado por Archimedes para obter a sommação é unicamente proprio ao typo de progressões geometricas que temos considerado. Para as outras progressões não póde ser applicado, salvo em casos muito raros. Estes casos são aquelles em que a progressão de que se trata póde ser decomposta em duas ou mais progressões deste typo, como succede com todas aquellas que são chamadas *series recurrentes*, de que adiante nos occuparemos. Está, por exemplo, neste caso a serie

$$1 + 2x + 8x^2 + 28x^3 + 100x^4 + 560x^5 + \ldots.$$

em que cada termo é igual á somma dos dois precedentes, multiplicados respectivamente por $2x$ e $3x$ (escala de relação), e que por isso se denomina tambem *progressão geometrica de 1ª ordem*.

Acha-se tambem nas mesmas condições a serie

$$3 + 5x + 7x^2 + 13x^3 + 23x^4 + \ldots.$$

em que cada termo é igual á somma algebrica dos tres precedentes, multiplicados respectivamente por $-2x^3$, x^2 e $2x$ (escala de relação), e que por isso é chamada *progressão geometrica de 2ª ordem*, e assim por diante.

238. — SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS A QUE DÃO LUGAR AS PROGRESSÕES GEOMETRICAS; INSERÇÃO DE MEIOS E OUTRAS QUESTÕES. — As fórmulas que temos obtido permittem resolver diversas questões. Assim é que a expressão (1) $l = a\ r^{n-1}$ encerrando quatro quantidades, permitte determinar uma dellas quando são conhecidas as tres outras. Dahi as tres questões seguintes :

1ª. Determinar l, conhecendo a, r e n, que são immediatamente resolvidas pela fórmula considerada.

2ª. Determinar a, conhecendo l, r e n.

Teremos

$$a = \frac{l}{r^{n-1}}$$

3ª. Determinar n, conhecendo l, a e r.

Esta questão será resolvida no paragrapho seguinte.

4ª. Determinar r, conhecendo l, a e n.

Da fórmula proposta deduz-se

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$$

Esta expressão permitte inserir entre dois termos consecutivos de uma progressão geometrica tantos termos intermediarios quantos se quizer, e este problema tem uma grande importancia historica por haver permittido a instituição arithmetica dos logarithmos. Para resolvel-os, supponhamos que a e b representam dois termos consecutivos de uma progressão geometrica e que se quer inserir m meios.

Isto importa evidentemente em formar uma progressão por quociente que tenha por termo a e b e m outros intermediarios. O numero dos termos desta progresão será, pois, $m + 2$, e o numero dos que precedem o ultimo será $m + 1$; de sorte que designando por r a razão desconhecida, teremos $b = a\ r^{m+1}$, donde se tira

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Vê-se, portanto, que *se determina a razão dividindo um extremo pelo outro e extrahindo do quociente a raiz do grau indicado pelo numero dos meios a inserir mais 1.*

Conhecida a razão, facil é formar os meios procurados multiplicando successivamente por ella o termo precedente.

Pelos methodos elementares sómente se póde determinar a razão em casos particulares; mas a *theoria dos logarithmos* dar-nos-á um meio geral de resolver esta questão.

Se fizermos inserções successivas do mesmo numero de meios proporcionaes entre os termos consecutivos de uma progressão geometrica, usual, as progressões parciaes resultantes formarão uma só progressão.

Com effeito, considerando a progressão

$$:: a\ b\ c\ d\ \ldots.$$

e inserindo m meios entre a e b, formaremos uma progressão cuja razão é como vimos

$$r' = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Inserindo m meios entre b e c forma-se outra progressão cuja razão é

$$r'' = \sqrt[m+1]{\frac{c}{b\ \ldots.}}$$

Inserindo ainda m meios entre c e d forma-se terceira progressão cuja razão é

$$r''' = \sqrt[m+1]{\frac{d}{c}}$$

e assim por diante.

Ora, sendo

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \ldots = r,$$

segue-se que

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}} = \sqrt[m+1]{\frac{d}{c}} = \ldots = \sqrt[m+1]{r}$$

Sendo pois a mesma a razão de todas as progressões parciaes, e sendo o ultimo termo de cada uma o primeiro da seguinte é claro que formam uma só progressão, cuja razão é raiz

$$\sqrt[m+1]{r},$$

isto é a raiz da razão da progressão dada que tem por indice o numero dos meios parcialmente inseridos mais 1.

Cada uma das outras fórmulas daria igualmente lugar a quatro questões semelhantes.

Se agora considerarmos conjunctamente as duas fórmulas (1) e (3), isto é

$$l = ar^{n-1} \text{ e } S_n = \frac{lr - a}{r - l},$$

vê-se que encerram cinco quantidades, de sorte que podemos nos propôr a conhecer duas dellas quando as tres outras forem dadas.

Surgem assim dez problemas distinctos, quatro dos quaes são susceptiveis de facil resolução, a saber:

1°. Suppondo conhecidos a, r e n determinar l e S. As fórmulas (1) e (3) dão lugar a (4) e resolvem immediatamente a questão.

2°. Suppondo conhecidos a, l e n, determinar r e s. A fórmula (1) nos dá dividindo ambos os membros por a e extraindo em seguida a raiz $n - 1$:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}} \text{ ou } r = \left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{1}{m-1}}; \qquad (6)$$

substituindo esta expressão na fórmula (4), virá:

$$S = \frac{a\left[\left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} - 1\right]}{\left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} - 1} = \frac{a \times \left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} - a}{\left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} - 1} =$$

$$= \frac{(l)^{\frac{n}{n-1}} - a}{\left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} - 1} = \frac{l^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{(l)^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$$

ou

$$S = \frac{\sqrt[n-1]{l^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l} - \sqrt[n-1]{a}}$$

3º. Sendo dados l, r e n, achar-se-á a e S. Da fórmula (1) nos dá

$$a = \frac{l}{r^{n-1}}.$$

Substituindo esta expressão na fórmula (4), virá

$$S = \frac{l}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{(r^n - 1)}{r^{n-1}(r - 1)}.$$

4º. Sendo dados r, n e S achar a e l. Da fórmula (4) deduz-se

$$a = \frac{S(r - 1)}{r^n - 1)};$$

substituindo esta expressão em (1), teremos

$$l = \frac{Sr^{n-1}(r - 1)}{r^n - 1}.$$

Dos seis problemas restantes nenhum póde ser resolvido com os recursos da Algebra até aqui expostos. Porque dois destes problemas dependem em geral da resolução de equações de grau superior ao 4º: São aquelles em que se dá l, n e S e pede-se a e r; ou dá-se a, n e S e pede-se l e r. Para o primeiro caso a fórmula (3) nos dá $a = lr - Sr + S$; esta expressão sendo substituida na

fórmula (1) com o fim de determinar r, dá lugar a uma equação cujo grau é de ordinario superior ao quarto:

$$(S - l)r^n - Sr^{n-1} + l = 0$$

Para o segundo caso a equação (3) dará

$$S(r - 1) = lr - a, \text{ donde } l = \frac{S(r-1)+a}{r};$$

substituindo esta expressão em (1), virá:

$$ar^{n-1} = \frac{S(r-1)+a}{r} \text{ ou } ar^n - Sr + S - a = o,$$

equação do grau n, sendo geralmente n superior a 4. E' obvio que se conhecessemos r se teria l, pela fórmula

$$l = \frac{S(r-1)+a}{r}$$

Emfim, os quatro problemas restantes em que n é uma das incognitas com qualquer das quatro quantidades restantes, conduzem á resolução de equações especiaes. Sendo conhecidos, por exemplo, l, r e S, e procurando-se n e a a incognita n será dada pela equação

$$l = ar^{n-1}, \text{ ou } r^n = \frac{lr}{a},$$

que é da fórma $a^x = b$; a e b sendo quantidades conhecidas. As equações desta fórma são chamadas *exponenciaes* por causa da formação a^x e foi João Bernouille quem primeiro dellas se occupou qualificando-as de equações *percurrentes*.

O estudo das progressões por quociente nos leva, pois, a resolver estas equações. Como, porém, semelhante resolução só póde ser feita por meio dos *logarithmos*, devemos nos occupar em primeiro lugar desta instituição que aliás precedeu historicamente ao advento das equações exponenciaes.

Tal será o assumpto do paragrapho seguinte.

CAPITULO XIII

THEORIA GERAL DAS SERIES. INSTITUIÇÃO DAS SERIES EXPONENCIAL E LOGARITHMICA. USO ALGEBRICO E ARITHMETICO DAS SERIES

§ 37

Theoria geral das series

511. — Completando naturalmente o estudo das progressões geometricas, a apreciação geral das series torna-se uma parte indispensavel da Algebra directa em virtude da efficacia que os desenvolvimentos em series offerecem como meios de transformação. Historicamente considerados, taes desenvolvimentos emanaram a principio da divisão, e depois da extracção das raizes, sobretudo applicada ao binomio mais simples.

A. Mercator, celebre geometra hollandez (1512-1594) deve-se o primeiro desenvolvimento em serie obtido por meio da divisão. Já sabemos que não sendo exactamente possivel a divisão algebrica, o quociente achado póde desenvolver-se numa serie infinita, ordenada segundo as potencias crescentes ou decrescentes de uma das quantidades do dividendo ou do divisor.

Assim, por exemplo, a unidade dividida por $1 + x$ conduz a serie infinita

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots.$$

A primeira serie originada por este modo e obtida por Mercator, resultou da divisão indicada por uma expressão da fórma

$$\frac{1}{a + bx},$$

que fornece immediatamente:

$$\frac{1}{a + bx} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}x + \frac{b^2}{a^3}x^2 - \frac{b^3}{a^4}x^3 + \ldots.$$

Cumprir

Esta operação é evidentemente analoga á conversão de uma fracção ordinaria em decimal, quando se chega a um quociente periodico, que tambem é uma serie ordenada segundo as potencias successivas e inversas da base numeral.

Como se vê, a conversão de uma fracção algebrica num desenvolvimento infinito é uma operação bem simples; entretanto, ella fez época na historia da mathematica, como tendo dado a primeira serie para a quadratura das curvas (byperbole).

512. — Um seculo não se havia decorrido depois da descoberta de Mercator quando foram divulgados alguns desenvolvimentos indefinidos obtidos por Newton. Calculando a expressão $\sqrt{a^2 + x^2}$, o geometra inglez chegou a uma serie ordenada do mesmo modo, isto é,

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \ldots.$$

Mais tarde Newton e Gregory obtiveram ainda as series notaveis em que se transformam as formações circulares sen. x e cos. x e etc., que apreciaremos em Geometria. Quasi ao mesmo tempo chegava Leibnitz ao desenvolvimento de um arco por meio de sua tangente, partindo de principios differentes, sendo levado á sua immortal descoberta pelos estudos sobre sommação das series. Desta época em diante vulgarisou-se o uso das transformações em series, sobretudo com o auxilio do fecundo methodo dos coefficientes indeterminados, que Descartes já instituira.

Embora a questão das series só possa ser tratada de modo conveniente com os recursos do calculo transcendente, os processos espontaneos permittem resolvel-a nos casos mais simples. Os dois processos, que temos indicado, a principio distinctos, foram depois resumidos pela lei binominal, quando se a estendeu aos expoentes nega-

tivos e fraccionarios; porque desde então os *quocientes* e as *raizes* poderam ser considerados como *potencias*.

Assim é, por exemplo, que as expressões acima são fornecidas tambem pela lei de Newton: considerando

$$\frac{1}{a+bx} = (a+bx)^{-1} =$$

$$= a^{-1} - a^{-2}bx + a^{-3}b^2x^2 - a^{-4}b^3x^3 + \ldots. =$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}x + \frac{b^2}{a^3}x^2 - \frac{b^3}{a^4}x^3 + \ldots.,$$

e de um modo analogo

$$\sqrt{a^2+x^2} = (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = a\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= a\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{x^4}{a^4} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{6}\,\frac{x^6}{a^6}\ldots.\right) =$$

$$= a + \frac{a}{2a^2}x^2 - \frac{a}{8a^4}x^4 + \frac{a}{16a^6}x^6 \ldots. =$$

$$= a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \ldots.$$

Mas os tres processos que temos mencionado offerecem o inconveniente de não serem applicaveis a expressões de uma natureza qualquer, o que não acontece com o processo cartesiano.

513.— METHODO DE DESCARTES.— Estudando as equações do 2º grau, já demos uma idéa do methodo cartesiano ou dos *coefficientes indeterminados*. Sem insistir mais sobre o modo de applical-o, apenas mostraremos sua efficacia quando se procura determinar os coefficientes de um polynomio que deve ser o desenvolvimento em serie de uma formação dada.

O methodo de Descartes constitue o methodo mais geral que possue a Algebra ordinaria para desenvolver as formações em series.

Supponhamos que se pede o desenvolvimento de $F(x)$ segundo as potencias ascendentes inteiras e positivas da variavel x.

Faremos $F(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$, sendo A, B, C .... coefficientes a determinar.

Para isto escolhe-se uma propriedade ou caracter simples de $F(x)$, que seja de facil verificação, e estabelece-se a comparação traduzida por esta propriedade na expressão precedente. As igualdades resultantes são equações do 1º grau que permittem determinar os valores procurados dos coefficientes.

O caracter ou propriedade escolhida deve reduzir-se a fixar a lei segundo a qual muda a variavel dependente ou formação dada, quando a variavel independente experimenta a mudança mais propria a simplificar uma tal relação.

Appliquemos por exemplo, o methodo de Descartes para desenvolver em serie a fracção

$$\frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2}$$

Faremos para isso

$$\frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$$

isto é, supporemos um desenvolvimento ordenado segundo as potencias ascendentes da variavel.

Expellindo o denominador, effectuando a multiplicação e identificando, obter-se-á

$$A = \frac{a}{a'},\ B = -\frac{b'}{a'}A + \frac{b}{a'},\ C = -\frac{b'}{a'}B - \frac{c'}{a'}A,$$

$$D = -\frac{b'}{a'}C - \frac{c'}{a'}B \ldots.$$

Substituindo estes valores na igualdade acima, em lugar de A, B, C, D ...., ter-se-á a serie procurada.

Seja ainda

$$\frac{a + bx + cx^2}{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3}$$

Façamos

$$\frac{a + bx + cx^2}{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3} =$$

$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^4 + Ex^4 + \ldots,$$

donde se deduz, expellindo os denominadores e transpondo

$$\left|\begin{array}{lllll} Aa' + Ba' & x + Ca' & x^2 + Da' & x^3 + Ea' & x^4 + \ldots. \\ -a + Ab' & + Bb' & + Cb' & + Db' & \\ -b & + Ac' & + Bc' & + Cc' & \\ & -c & + Ad' & + Bd' & \end{array}\right| = o$$

o que fornece as equações

$$Aa' - a = o, \text{ donde } A = \frac{a}{a'};$$

$$Ba' + Ab' - b = o, \; B = -\frac{b'}{a'}A + \frac{1}{a'}b = \frac{-ab' + ba'}{a'^2},$$

$$Ca' + Bb' + Ac' - c = o, \; C = -\frac{b'}{a'}B - \frac{c'}{a'}A + \frac{1}{a'}c$$

ou

$$C = \frac{ab'^2 - ba'b' - aa'c' + ca'^2}{a'^3},$$

$$Da' + Cb' + Bc' + Bd' = o, \; D = -\frac{b'}{a'}C - \frac{c'}{a'}B - \frac{d'}{a'}A,$$

$$Ea' + Db' + Cc' + Bd' = o, \; E = -\frac{b'}{a'}D - \frac{c'}{a'}C - \frac{d'}{a'}B,$$

. . . . . .

. . . . . .

Donde se vê que os tres primeiros coefficientes são obtidos a principio sem nenhuma lei; mas a partir do

quarto, cada coefficiente se fórma da somma dos tres coefficientes que o precede, multiplicados respectivamente por

$$-\frac{b'}{a'},\ -\frac{c'}{a'},\ -\frac{d'}{a'}$$

Resulta desta lei de formação dos coefficientes que o quarto termo da serie Dx^3, é igual a

$$-\frac{b'}{a'}\,Cx^3-\frac{c'}{a'}\,Bx^3-\frac{d'}{a'}\,Ax^3,$$

ou

$$-\frac{b'}{a'}\,x.\ Cx^2-\frac{c'}{a'}\,x^2.\ Bx-\frac{d'}{a'}\,x^3.\ A;$$

e assim por diante.

No paragrapho seguinte mostraremos que este methodo se applica tambem ao desenvolvimento em serie das formações transcendentes, tal como a exponencial e a logarithmica.

Em muitos casos elle permitte não só obter o desenvolvimento de uma formação qualquer segundo as potencias da respectiva variavel, como tambem o resultado inverso, isto é, o desenvolvimento da variavel segundo as potencias da formação.

Esta ultima pesquiza constitue o *methodo inverso das series*, descoberto por Newton. Julgamo-nos, porém, dispensados de tratar desta questão, visto como ao *calculo transcendente* é que cumpre instituir os methodos mais geraes para os desenvolvimentos em series, graças aos trabalhos de J. Bernouilli, Taylor Maclaurin, Euler e etc.

Ao lado da maior generalidade que os caracterisa, estes methodos offerecem uma plena uniformidade nos calculos a que dão lugar: Veremos que isto os prejudica até certo ponto, por não permittir utilisar as considerações especiaes que poderiam simplificar taes transformações, como succede no methodo de Descartes. Mas estes e outros defeitos são removidos pelo methodo de Lagrange,

que reconheceu « a necessidade de conceber de uma maneira menos uniforme e mais lata a applicação geral do calculo trancendente ás transformações em series ».

514. — PROBLEMAS GERAES DAS SERIES. SERIES RECURRENTES. — Sem confundir o ponto de vista arithmetico com o ponto de vista algebrico, tratemos agora das questões geraes a que dá lugar o estudo das series, dominio vastissimo apenas esboçado, em consequencia das difficuldades que offerece.

A serie sendo *uma expressão composta de um numero illimitado de termos que se succedem segundo uma certa lei*, torna-se evidente que a questão preliminar deve consistir na expressão algebrica desta lei, isto é, no conhecimento do termo geral da serie, o qual permitte obter um outro de ordem qualquer, sem ser preciso formar todos os precedentes.

Além disto, como succede nas progressões, a questão capital consiste tambem na determinação da *somma de um numero qualquer de termos*, isto é, da expressão que permitte obtel-a sem ser necessario addicional-os successivamente.

Limitadissimo é o numero de casos em que se tem podido resolver estas questões com os recursos da Algebra directa. Occupemo-nos delles deixando completamente de lado as classes particulares de algumas series cuja sommação só póde ser obtida mediante artificios especiaes e que, portanto, não têm importancia logica.

O termo geral de uma serie é a expressão que permitte obter, especialmente um termo qualquer quando é conhecida a sua ordem ou indice, sem ser obrigado a formar todos os que o precedem.

A sua determinação consiste, pois, em estabelecer as relações entre duas variantes, desde que se conhece valores que toma uma dellas, quando se attribue á outra valores determinados. E' o problema fundamental que prepara o da *sommação*, e tanto um como outro póde con-

duzir á descoberta de leis naturaes, conforme vimos em relação a lei de Galileu. Mas com os recursos que a Algebra offerece, estas duas questões só podem ser resolvidas de um modo geral para as progressões usuaes, arithmeticas ou geometricas; e para algumas outras de ordem mais elevada, conhecidas sob o nome de *series recurrentes*, e estudadas especialmente por Moivre e Laplace. Cada termo destas series é igual a somma algebrica de um mesmo numero de termos precedentes, multiplicados respectivamente por certas quantidades constantes; de sorte que o termo geral é uma formação racional daquelle numero de termos: = O conjunto das quantidades constantes pelas quaes se deve multiplicar um certo numero de termos consecutivos para formar o seguinte, chama-se escala de relação da serie.

Por exemplo a serie seguinte, ordenada em relação as potencias inteiras e crescentes da variavel x.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots . a_n x^n + \ldots .$$

será *recurrente* se suppozermos que para todos os valores de n superiores a um certo limite, o coefficiente de x^n póde ser expresso por uma e mesma formação linear dos coefficientes das potencias inferiores, tomados em numero fixo.

Diz-se que uma serie recurrente é de primeira ordem quando cada termo se fórma do precedente, como succede nas progressões geometricas; de segunda ordem quando cada termo se fórma dos dois precedentes, e assim por diante.

Por exemplo, as fracções

$$\frac{a}{a' + b'x}, \quad \frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2},$$

desenvolvidas em serie por qualquer dos processos que temos indicado, ou mais commodamente pelo ultimo

delles quando a fracção fôr mais complicada, nos fornecem, respectivamente series recurrentes de 1ª e de 2ª ordem.

A 1ª nos dá:

$$\frac{a}{a' + b'x} = \frac{a}{a'} - \frac{a}{a'} \cdot \frac{b'}{a'} x + \frac{a}{a'} \cdot$$

$$\frac{b'^2}{a'^2} x^2 - \frac{a}{a'} \cdot \frac{b'^3}{a'^3} x^3 + \ldots,$$

serie recorrente de 1ª ordem, porque cada termo se fórma do precedente multiplicando-se por $\frac{b'}{a'} x$, que é a escala de relação

Semelhantemente, desenvolvendo

$$\frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2}$$

em serie, obtem-se, como vimos, uma serie recurrente de 2ª ordem, visto como cada termo se fórma da somma algebrica dos dois precedentes multiplicados pelas quantidades constantes

$$-\frac{c'}{a'} x^2 \text{ e } -\frac{b'}{a'} x$$

que é a escala de relação.

Tomando outros exemplos, seria facil induzir que uma fracção racional da fórma

$$\frac{a + bx + cx^2 + \ldots . px^{n-1}}{a' + b'x + c'x^2 + \ldots . q'x^n}$$

transformada em serie, dá lugar a um desenvolvimento indefinido em que cada termo se fórma de tantos precedentes, quantas unidades existem no mais alto expoente da variavel x no denominador. Conclue-se tambem que

as quantidades pelas quaes é preciso multiplicar os termos que precedem ao que se quer avaliar, são neste caso :

$$-\frac{q'}{a'}x^n,\ -\ \ldots\ -\frac{\delta'}{a'}x^3,\ -\frac{c'}{a'}x^2,\ -\frac{b'}{a'}x$$

que é, portanto, a escala de relação da serie. Isto é, que para obter o coefficiente desejado é preciso multiplicar por $-\frac{b'}{a'}$ o coefficiente do termo que o precede immediatamente, por $-\frac{c'}{a'}$ o do que o precede de duas ordens e assim por diante, até multiplicar por $-\frac{q'}{a'}$ o coefficiente que preeede de n ordens ao que se quer constituir, de sorte que as fracções desta fórma produzem sempre series recurrentes.

Si o expoente da variavel no numerador fôr maior que no denominador, bastará effectuar a divisão, ordenando o quociente em relação as suas potencias ascendentes, para obter uma parte inteira em x e uma nova fracção semelhante a precedente, que poderá, desde então, ser desenvolvida em serie.

515. — RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA SOMMA DAS SERIES RECURRENTES.— O problema da sommação das series recurrentes póde ser encarado sob dois aspectos : no primeiro se procura a somma de todos os termos da serie proposta, *sua fracção geratriz*, e no segundo se busca a somma de um numero limitado de termos.

1°. Suppondo conhecida a lei de formação dos termos A, B, C, D .... da serie dada, vejamos qual o processo que nos conduz á somma ou á geratriz procurada.

Para maior facilidade, admittamos que *a escala de relação* seja sómente composta das tres quantidades (p, q, r), isto é que a serie recurrente seja de terceira ordem.

Por definição, tem-se:

$$D = Cr + Bq + Ap$$

$$E = Dr + Cq + Bp$$

$$F = Er + Dq + Cp$$

$$G = Fr + Eq + Dp$$

. . . . . .

Sommando-se ordenadamente estas relações em numero infinito, obtem-se:

$$S - A - B - C = r(S - A - B) + q(S - A) + pS$$

donde se deduz que

$$S = \frac{r(A + B) + qA - (A + B + C)}{p + q + r - 1}$$

Como se vê, este processo é inteiramente analogo ao que se emprega para determinar a somma dos termos de uma progressão geometrica decrescente.

Applicado a uma serie recurrente de 4ª ordem, cuja escala de relação seja (p, q, r, s), fornece

$$S = \frac{(A + B + C) + r(A + B) - qA - (A + B + C + D)}{p + q + r + s - 1}$$

e assim por diante.

2º. No caso em que se procura a somma de um numero determinado de termos, é indispensavel conhecer previamente os ultimos termos da serie proposta.

Para apreciar a marcha a seguir, consideremos a serie recurrente de que já nos occupamos, cuja escala de relação é (p, q, r), e representemos os seus ultimos termos por K, L, M, N.

Por definição, tem-se:

$$D = Cr + Bq + Ap$$

$$E = Dr + Cq + Bp$$

$$F = Er + Dq + Cp$$

. . . . . .

$$N = Mr + Lq + Kp$$

Sommando ordenadamente estas relações em numero igual ao de termos menos tres, obtem-se

$$S - A - B - C = r(S - A - B - N) + q(S - A - N - M) + \\ + p(S - N - M - L)$$

donde se tira:

$$S = \frac{r(A + B - N) + q(A + N + M) + p(N + M + L) - (A + B + C)}{p + q + r - 1}$$

Esta fórmula dependendo do conhecimento dos ultimos termos da serie proposta, exige que se determine o termo geral da mesma serie, afim de que se possa calcular esses termos sem ter necessidade de passar por todos aquelles que os precedem. E porque semelhante circumstancia sempre tem lugar, devemos nos occupar desta questão.

516. — INSTITUIÇÃO DO TERMO GERAL DAS SERIES RECURRENTES. — Para resolver este problema quando é dada uma serie recurrente, basta que se determine sua fracção geratriz e que se saiba decompôr esta em fracções mais simples da fórma

$$\frac{a}{a' + b'x}.$$

Porque desenvolvendo cada uma destas fracções em serie, obtem-se, como vimos

$$\frac{a}{a'} - \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{a'} x + \frac{a}{a'} \frac{b'^2}{a'^2} x^2 - \ldots.$$

que não é sinão uma progressão geometrica usual cujo termo geral se póde sempre determinar. E' pois, effectuando a decomposição da fracção geratriz em fracções daquella natureza, ou em fracções taes, que se possa determinar o termo geral do seu desenvolvimento, que se consegue conhecer o termo geral de uma serie recurrente.

Mas, embora semelhante decomposição esteja resolvida theoricamente, é poucas vezes susceptivel de ser praticada em virtude da extrema imperfeição da Algebra.

Supponhamos, por exemplo, que se trata de determinar o termo geral da serie proveniente da fracção

$$\frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2}.$$

Dividindo ambos os termos por c', e representando

$$\frac{a}{c'}, \frac{b}{c'}, \frac{a'}{c'} \text{ e } \frac{b'}{c'},$$

respectivamente por α e β, α' e β', virá

$$\frac{\alpha + \beta x}{\alpha' + \beta' x + x^2}$$

Admittamos que se tenha decomposto esta fracção em duas fracções simples; representemos por A e B os seus numeradores e por p e q as raizes da equação que se obtem igualando a zero o denominador da fracção, isto é,

$$\alpha + \beta' x + x^2 = 0.$$

Teremos então

$$\frac{\alpha + \beta x}{\alpha' + \beta' x + x^2} = \frac{A}{x - p} + \frac{B}{x - q}$$

Determinando os valores de A e B pelas regras relativas á decomposição das fracções racionaes, obtem-se

$$A = \frac{\beta p + \alpha}{p - q}, \; B = \frac{-\beta q - \alpha}{p - q};$$

substituindo-se estes valores naquellas fracções, ficam ellas da fórma

$$\frac{a}{a' + b'x},$$

e, portanto, sendo desenvolvidas em series dão origem a series recurrentes de primeira ordem, cujo termo geral póde ser determinado para cada uma.

Afim de tornar mais facil essa determinação, substitue-se em

$$\frac{a}{a'}\left(-\frac{b'}{a'}x\right)^{n-1},$$

termo geral da serie proveniente de

$$\frac{a}{a'+b'x},\ a,\ a'\ \text{e}\ b'$$

respectivamente por A, $-p$, 1, e em seguida substitue-se tambem a, a' e b' respectivamente por $-B-q$, 1.

Deste modo obtem-se para termo geral da primeira serie

$$-\frac{A}{p}\left(\frac{1}{p}x\right)^{n-1},$$

e para termo geral da segunda serie,

$$-\frac{B}{q}\left(\frac{1}{q}x\right)^{n-1}$$

Sommando-se estes dois termos, obtem-se o termo geral da serie cuja fracção geratriz é a proposta, e chega-se emfim a

$$-\left(\frac{A}{p^n}+\frac{B}{q^n}\right)x^{n-1}$$

Casos ha em que a fracção geratriz da serie não se póde decompôr em fracções da fórma

$$\frac{a}{a'+b'x}$$

ou, o que é o mesmo, da fórma

$$\frac{A}{x-p}$$

E' o que acontece, por exemplo, quando o denominador da fracção geratriz igualando a zero admitte raizes iguaes.

Entretanto, é possivel determinar o termo geral da serie correspondente e por conseguinte a somma de um numero limitado de seus termos. Para isto decompõe-se a fracção geratriz em fracções da fórma

$$\frac{A}{(x-p)^m},$$

de cujo desenvolvimento em serie se póde ainda determinar o termo geral; porque

$$\frac{A}{(x-p)^m} = \alpha \times \frac{1}{(x-p)^m} = \alpha(x-p)^{-m}$$

que se desenvolve pela fórmula do binomio, e cujo termo geral se póde sempre determinar.

Do exposto deduz-se a regra seguinte para obter o termo geral de uma serie recurrente:

« Determina-se primeiramente a fracção geratriz

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

de que provém a serie dada e decompõe-se esta fracção em fracções da fórma

$$\frac{A}{x-p}, \text{ ou } \frac{A}{(x-p)^m};$$

em seguida determina-se o termo geral de cada uma das series que resultariam dos desenvolvimentos das fracções sob aquella primeira fórma, empregando a lei do termo geral de uma progressão por quociente, e o termo geral de cada uma das series provenientes do desenvolvimento das fracções sob a segunda fórma, pela fórmula do termo geral do desenvolvimento da potencia de um binomio: Effectua-se a somma algebrica destes termos geraes, a qual representará o termo geral da serie proposta ». (37 a).

(37 a) P. B. GALVÃO. — These de concurso no Collegio de Pedro II no Rio de Janeiro, da qual extraimos o assumpto deste paragrapho.

520. — REPRESENTAÇÃO ALGEBRICA DA SOMMA DE UM CERTO NUMERO DE TERMOS DA SERIE RECURRENTE. — Para todas as series, cujo termo geral fôr expresso por uma formação racional e inteira do numero de termos que se considera, é possivel determinar a somma de um numero limitado de seus termos.

Supponhamos, por exemplo, que o termo geral seja expresso por $an^p + bn^q \pm cn^r$ sendo a uma quantidade conhecida, p um numero inteiro e positivo e n a ordem do ultimo termo que se considera. A somma dos termos até a ordem n, será

$$a(1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p) \pm b(1^q + 2^q + 3^q + \ldots + n^q) \pm$$
$$\pm c(1^r + 2^r + 3^r + \ldots + n^r) = aS_p + bS_q + cS_r$$

onde representamos por S_p, S_q, S_r as sommas comprehendidas nos parentheses.

A fórmula do binomio permitte, como vimos, obter as sommas das potencias semelhantes dos termos da serie natural S_p, S_q, S_r; portanto a somma procurada ficará deste modo conhecida.

Devemos-nos limitar ás considerações que ahi ficam sobre o estudo geral das series, que ha de receber no calculo transcendente uma maior amplitude. Ellas nos deixam vêr que o problema capital desta theoria, representado pelo vasto dominio da sommação, só póde ser resolvido em casos mui restrictos, como sejam os das series recurrentes e de outras progressões mais simples. No numero destas se acham as series dos figurados e das *potencias* de que já nos occupamos na Arithmetica.

Os numeros figurados podem ser vistos como um caso particular das *series recurrentes*, visto como o termo geral daquellas series numericas é sempre uma formação racional do numero de termos que se considera. Dest'arte a questão arithmetica que lhes diz respeito recebe em Algebra uma extensão e generalidade consoante o espirito desta parte do dominio mathematico.

§ 38

Instituição das series exponencial e logarithmica. Uso algebrico das series

521. — Da lei binominal póde-se deduzir indirectamente a principio o desenvolvimento em serie da formação exponencial, e depois o da logarithmica.

Para obter a serie exponencial, o artificio consiste em substituir a base a da formação a^x, por um binomio cujo primeiro tempo é a unidade.

Com effeito, fazendo $a = 1 + b$, teremos

$$a^x = (1 + b)^x = 1 + \frac{x}{1} b + \frac{x(x-1)}{1.\ 2} b^2 +$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3} b^3 + \ldots;$$

ordenando em relação a x, virá

$$a^x = (1 + b)^x = 1 + \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \ldots\right) x +$$

$$+ \left(\frac{b^2}{2} - \frac{3\,b^3}{6} + \ldots\right) x^2 + \ldots$$

Fazendo

$$b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \ldots = k, \qquad (1),$$

$$\frac{b^2}{2} - \frac{3\,b^3}{6} + \ldots = l \ldots,$$

teremos

$$a^x = 1 + kx + lx^2 + mx^3 + nx^4 + \ldots$$

Este resultado nos mostra que o desenvolvimento da formação exponencial, obtida pela lei de Newton, tem o inconveniente de apresentar como coefficientes fórmulas indefinidas, de modo que se torna impossivel apanhar nitidamente o modo de independencia que existe entre elles. Mas, este methodo de deducção offerece a vantagem de dar a conhecer a expressão do mais simples dentre esses

coefficientes, representado por k, ficando a questão simplesmente reduzida a obter-se o modo de dependencia de todos os outros para com este. E' o que facilmente se consegue com o emprego do methodo cartesiano, mesmo sem assistencia dos meios de generalisação que a Algebra indirecta lhe fornece.

522. — EMPREGO DO METHODO DOS COEFFICIENTES INDETERMINADOS. — Para obter por este meio o desenvolvimento de a^x, já sabemos qual a marcha a seguir. ( )

Consiste, como vimos, em desenvolver, para uma serie hypothetica de coefficientes indeterminados, a comparação resultante de um caracter sufficientemente simples da formação a transformar. «Deve-se reduzir este caracter a fixar a lei segundo a qual se modifica a variavel dependente quando a variavel independente experimenta a modificação mais propria a simplificar uma tal dependencia.

Façamos, pois,

$$a^x = A + Bx + Cx^2 + \ldots;$$

suppondo $x = 0$, temos $a^0 = A = 1$, e o desenvolvimento deve por conseguinte ser

$$a^x = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots \qquad (2)$$

A propriedade ou caracter mais simples que podemos traduzir nesta igualdade é que *a formação exponencial fica elevada ao quadrado quando se duplica a variavel independente*, o que se exprime algebricamente por $(a^x)^2 = a^{2x}$.

Traduzida na igualdade acima, (2) esta propriedade nos fornecerá dois desenvolvimentos que, sendo identificados, dar-nos-ão um numero de equações do 1° grau sufficiente para a determinação successiva dos valores especiaes dos coefficientes B, C, D, etc.

Com effeito, elevando ao quadrado a igualdade (2) virá, em virtude da lei do quadrado de um polynomio qualquer:

$$(a^x)^2 = 1 + 2Bx + (B^2 + 2C)x^2 + (2BC + 2D)x^3 + \\ + (2BD + 2E)x^4 + \ldots.$$

Substituindo na mesma igualdade x por $2x$, teremos ainda:

$$a^{2x} = 1 + 2Bx + 4Cx^2 + 8Dx^3 + 16Ex^4 + \ldots.$$

Igualando os dois ultimos desenvolvimentos, resulta, pois,

$$1 + 2Bx + 4Cx^2 + 8Dx^3 + 16Ex^4 + \ldots. = \\ = 1 + 2Bx + (B^2 + 2C)x^2 + (2BC + 2D)x^3 + \\ + (2BD + 2E)x^4 + \ldots.$$

identificando os termos affectos da mesma potencia da variavel nos dois membros, virá:

$$2B = 2B,\ 4C = B^2 + 2C,$$

$$2BC + 2D = 8D,\ 2BD + 2E = 16E, \ldots.,$$

donde se deduz

$$C = \frac{B^2}{2},\ D = \frac{B^3}{3.\ 2},\ E = \frac{B^4}{2.\ 3.\ 4},\ \text{etc.}$$

Substituindo estes valores em (2), obteremos:

$$a^x = 1 + \frac{B}{1}x + \frac{B^2}{1.\ 2}x^2 + \frac{B^3}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \frac{B^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^4 + \ldots. \quad (3),$$

serie que nos deixa induzir facilmente a lei de formação dos coefficientes por meio do primeiro B (38 a). *Cada um delles é igual a uma potencia deste ultimo, cujo expoente*

(38 a) A lei geral dos coefficientes é aqui de facil inducção em virtude de sua simplicidade. « A este respeito, os diversos modos proprios á Algebra indirecta têm notavelmente multiplicado os casos favoraveis, permittindo melhor induzir segundo comparações

é indicado pelo lugar que occupa, dividido pelo numero de permutações correspondentes.

A questão está, pois, reduzida a determinar o coefficiente B a que todos os outros estão subordinados directamente.

Ora, este coefficiente já foi por nós obtido desenvolvendo a exponencial pela lei de Newton: Sua expressão resulta de (1), isto é, do coefficiente do 2º termo,

$$k = \frac{(a-1)}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots, \qquad (4)$$

mediante a substituição de k por B, e de b pelo seu valor $a-1$, tirado da equação $a = 1 + b$.

Portanto, substituindo na expressão (3) o coefficiente B pelo seu valor k (4), obteremos o desenvolvimento pedido da formação exponencial.

Como se vê, semelhante serie é ainda complexa em virtude da constituição do coefficiente B.

523. — Vejamos como é possivel simplificar o desenvolvimento. Para isto basta ter em vista a maneira pela qual o coefficiente B entra na fórmula (3) o que permitte obter o seu valor de um modo simples.

Com effeito, fazendo $x = 1$ na serie (3), teremos

$$a = 1 + \frac{B}{1} + \frac{B^2}{2} + \frac{B^3}{2.3} + \frac{B^4}{2.3.4} + \ldots$$

Suppondo ainda neste desenvolvimento que $B = 1$, e representando por e o valor obtido, virá

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots \qquad (5)$$

que é a base dos logarithmos neperianos.

---

mais simplificadas. Nada póde, entretanto, assegurar que a lei do desenvolvimento seja sempre apreciavel, e a maior parte das series algebricas resiste aos processos mais aperfeiçoados, embora todos permittam avaliar especialmente cada coefficiente». A. COMTE.— *Synthèse subjective, Chap II).*

Fazendo em (3) $Bx = 1$ ou $x = \frac{1}{B}$, teremos

$$a^{\frac{1}{B}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.\ 2} + \frac{1}{1.\ 2.\ 3} + \ldots.$$

Comparando esta expressão com a igualdade (5), resulta immediatamente que $a^{\frac{1}{B}} = e$, ou $a = e^{B}$. Tomando os logarithmos de ambos os membros desta igualdade, virá $lg.\ a = B lg\ e$, donde resulta

$$B = \frac{log.\ a}{log.\ e}$$

que é o valor procurado do coefficiente B.

Substituindo este valor em (3), teremos

$$a^{x} = 1 + \frac{lg.\ a}{lg.\ e}x + \left(\frac{lg.\ a}{lg.\ e}\right)^{2}\frac{x^2}{1.\ 2} + \left(\frac{lg.\ a}{lg.\ e}\right)^{3}\frac{x^3}{1.\ 2.\ 3} + \ldots. \quad (6),$$

serie obtida pela primeira vez por Euler.

Si na igualdade, $a = e^{B}$, os logarithmos forem tomados em um systema de base a, o valor de B, será

$$B = \frac{1}{lg.\ e},$$

e a serie exponencial tornar-se-á :

$$a^{x} = 1 + \left(\frac{1}{log.\ e}\right)\frac{x}{1} + \left(\frac{1}{lg.\ e}\right)^{2}\frac{x^2}{1.\ 2} + \left(\frac{1}{lg.\ e}\right)^{2}\frac{x^3}{1.\ 2.\ 3} + \ldots. \quad (7)$$

524. — EMPREGO DA BASE NEPERIANA; SUAS VANTAGENS ALGEBRICAS. — Si na mesma igualdade $a = e^{B}$, os logarithmos forem tomados no systema de base e, o valor de B será $B = l.\ a$. Resultará assim o desenvolvimento seguinte para a formação exponencial

$$a^{x} = 1 + l.\ a\,\frac{x}{1} + (l.\ a)^{2}\frac{x^2}{1.\ 2} + (l.\ a)^{3}\frac{x^3}{1.\ 2.\ 3} + \ldots.$$

Emfim, fazendo na serie (7) $a = e$, isto é, adoptando a base de Neper, teremos:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.\ 2} + \frac{x^3}{1.\ 2.\ 3} + \ldots . \qquad (8)$$

fórmula que nos dá o desenvolvimento em serie de um numero qualquer, em formação do seu logarithmo neperiano. Basta comparar esta serie (8) com as series (6) e (7) para immediatamente verificar-se o quanto a adopção da base de Neper simplifica os resultados.

Vê-se que o desenvolvimento de e^x é com effeito muito mais simples que os já obtidos; de sorte que a base neperiana deve ser preferida a qualquer outra, por facilitar as transformaçõcs algebricas.

Esta base resultou, como vimos, da serie (3), fazendo-se successivamente igual á unidade cada um dos factores do producto Bx de que ella depende. A expressão (5) nos dá o seu valor numerico.

Vê-se assim surgir a explicação do que dissemos no § 35 a respeito do contraste entre a Arithmetica e a Algebra quanto á escolha da constante exponencial ou logarithmica. Bem apreciada, a serie (3) faz directamente reconhecer que a melhor base é algebricamente a neperiana, cujo valor della resulta (5).

«Assim instituida, uma tal base (espontaneamente emanada do admiravel instincto do inventor dos logarithmos) equivale ao numero dois augmentado das reciprocas de todas as avaliações successivas da fórmula das permutações. Esta memoravel constante constitue, apesar de sua incommensurabilidade, o modo a que se deve habitualmente reduzir as formações exponencial e logarithmica, mudando nella convenientemente a base adoptada. Uma igual transformação deve tambem simplificar a elaboração arithmetica, pelo menos para a sua principal operação, comtanto que se refira á base usual os logarithmos calculados segundo aquella.»

525. — Relativamente á serie exponencial, devemos notar ainda que ella faz surgir indirectamente, mas de modo espontaneo a serie logarithmica. Para mostral-o, basta comparar as duas expressões geraes do coefficiente fundamental, uma obtida em serie de potencias (4), a outra como logarithmo neperiano da base, isto é, $B = l.\,a$. Estendida da constante á variavel, esta approximação é bastante para fornecer em toda a sua nitidez a lei da nova serie.

Com effeito, comparando com (4) a igualdade precedente, teremos:

$$l.\,a = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots;$$

suppondo $a = 1 + x$, teremos a serie logarithmica:

$$l.\,(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots \qquad (9),$$

serie obtida pela primeira vez por Cauffmann (verdadeiro nome de Mercator).

Si o logarithmo não fôr tomado no systema neperiano, será

$$B = \frac{lg.\,a}{lg.\,e},$$

e a serie logarithmica tornar-se-á então $lg.\,(1+x) = lg.\,e$

$$\left[\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right],$$

que evidentemente é menos simples que a anterior.

Póde-se ainda deduzir esta serie da serie exponencial por uma inversão dos coefficientes indeterminados. Esta questão é uma applicação do methodo *inverso das series* cuja primeira idéa se deve a Newton.

O problema resume-se geralmente no seguinte: dada a serie

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots, \qquad (1)$$

sendo $a, b, c \ldots$ conhecidos, obter a serie

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + \ldots \qquad (2)$$

Seja, com a applicação dada a serie

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

que representa, como vimos, o desenvolvimento da exponencial e^x.

Fazendo $y - 1 = z$, teremos

$$z = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots; \qquad (I)$$

trata-se neste caso de obter

$$x = Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots; \qquad (II)$$

Elevando-se successivamente a igualdade (I) ao quadrado, ao cubo, etc., virá

$$z^2 = x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \ldots,$$

$$z^3 = x^3 + \frac{3x^4}{2} + \frac{3x^5}{4} + \ldots,$$

$$z^4 = x^4 + \frac{4x^5}{2} + \frac{4x^7}{8} + \ldots;$$

. . . . . .

substituindo estes valores bem como o de z (I), no desenvolvimento de x, teremos

$$x = Ax + \frac{Ax^2}{2} + \frac{Ax^3}{6} + \frac{Ax^4}{24} + \ldots + Bx^2 + Bx^3 +$$

$$+ Bx^2 + \frac{Bx^4}{4} + \frac{Bx^4}{3} + \ldots + Cx^3 +$$

$$+ \frac{3Cx^4}{2} + \ldots + Dx^4 + \ldots;$$

donde resulta, comparando os coefficientes do primeiro e segundo membros, depois de ordenados:

$$A - 1 = 0, \quad \frac{A}{2} + B = 0,$$

$$\frac{A}{6} + B + C = 0, \quad \frac{A}{24} + \frac{7B}{12} + \frac{3C}{2} + D = 0 \ldots.$$

e por conseguinte

$$A = 1, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{3}, \quad D = -\frac{1}{4} \ldots,$$

Substituindo estes valores em (II), virá:

$$x = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots.$$

ou

$$x = \frac{(y-1)}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \ldots.$$

O segundo membro da serie dada sendo o valor de e^x, resulta que $y = e^x$; tomando os logarithmos neperianos, virá $l.\ y = x$, donde resulta

$$l.\ y = \frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \ldots. \qquad \text{(III)}$$

serie que representa o desenvolvimento do logarithmo neperiano.

526. — ESTABELECIMENTO DIRECTO DA SERIE LOGARITHMICA. — Esta serie póde ainda ser obtida directamente pela applicação do methodo fundamental de Descartes ao desenvolvimento da formação *lg. x*.

O desenvolvimento hypothetico neste caso não póde ser $log.\ x = A + Bx + Cx^2 +$ etc., nem tão pouco $lg.\ x = Ax + Bx^2 +$ etc., porque, na primeira hypothese, fazendo-se $x = o$, resulta o absurdo $lg.\ o = A$, pois o logarithmo de zero é infinito; na segunda hypothese, resulta $lg.\ o = 0$, o que tambem é impossivel.

Neste caso para tornar o desenvolvimento supposto compativel com a natureza da formação, usa-se de um simples artificio que consiste em considerar não a formação $lg.\ x$, mas $lg.\ (1 + x)$, o que para a annullação da variavel nos dá $lg.\ 1 = 0$; a igualdade será, pois,

$$lg.\ (1 + x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots . \quad (IV)$$

A propriedade mais simples e que deve ser traduzida nesta igualdade é a seguinte: para um binomio onde a variavel está sommada á unidade, a formação logarithmica duplica-se quando a variavel é substituida pelo seu dobro sommado ao seu quadrado, o que se traduz algebricamente pela equação

$$lg.\ (1 + x)^2 = lg.\ (1 + 2x + x^2) = 2\,lg.\ (1 + x)$$

Substituindo, pois, na serie (IV) a variavel x por $2x + x^2$, virá:

$$lg.\ (1 + 2x + x^2) = 2Ax + (A + 4B)x^2 + (4B + 8C)x^3 + \\ + (B + 12C + 16D)x^4 + \ldots .;$$

tomando o dobro da mesma serie, teremos:

$$2\,lg.\ (1 + x) = 2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + \ldots .$$

estabelecendo a comparação entre as duas series precedentes, virá

$$2Ax + (A + 4B)x^2 + (4A + 8C)x^3 + \ldots . = \\ = 2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + \ldots .$$

Identificando, teremos

$$2Ax = 2Ax,\quad A + 4B = 2B,\quad 4B + 8C = 2C,\ \text{etc.}$$

donde se deduz

$$A = A,\quad B = -\frac{A}{2},\quad C = \frac{A}{3}\ \text{e etc.}$$

Substituindo estes valores em (IV), obteremos

$$lg.(1+x) = A\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right) \quad (V)$$

serie já obtida anteriormente.

Vê-se que o coefficiente A, ao qual todos os outros se acham subordinados, fica indeterminado nesta serie, desde que a *base do systema de logarithmos* não é especificada; mas facilmente póde ser obtido quando se fixa esta base, cujo logarithmo é sempre igual á unidade. O coefficiente A é o *modulo* do systema de logarithmos adoptado: igual a 1 no systema de Neper, a $\frac{1}{l.10}$ no systema de Brigs... etc. Taes são as applicações caracteristicas a que se deve limitar o emprego do methodo de Descartes no estudo da Algebra isolada. (38 b).

530. — Só nos resta, para completar a apreciação das series, caracterisar de um modo geral o seu uso algebrico e especialmente o que se refere aos dois desenvolvimentos obtidos.

1°. Importante exemplo da efficacia de taes transformações foi dado por Lagrange deduzindo da serie exponencial a lei geral das potencias de um polynomio qualquer, já estabelecida pela fórmula do binomio.

Para mostral-o, consideremos a serie

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots;$$

substituindo x por $i(p+q+\ldots)$, teremos

$$e^{i(p+q+\ldots)} = 1 + i(p+q+\ldots) +$$

$$+ \frac{i^2}{1.2}(p+q+\ldots)^2 + \frac{i^3}{1.2.3}(p+q+\ldots)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{i^m}{1.2\ldots m}(p+q+\ldots)^m + \ldots;$$

(38 b) Moraes Rego — Ob. cit.

como porém

$$e^{i(p+q+\ldots.)} = e^{ip} \times e^{iq} \times e^{ir} \times \ldots. =$$

$$= \left(1 + ip + \frac{i^2p^2}{1.\ 2} + \frac{i^3\,p^3}{1.\ 2.\ 3} + \ldots.\right)$$

$$\left(1 + iq + \frac{i^2q^2}{1.\ 2} + \frac{i^3\,q^3}{1.\ 2.\ 3} + \ldots.\right)$$

$$\left(1 + ir + \frac{i^2\,r^2}{1.\ 2} + \frac{i^3\,r^3}{1.\ 2.\ 3} + \ldots.\right) \times \ldots.$$

resulta

$$1 + (p+q+\ldots.)i + \frac{(p+q+\ldots.)^2\,i^2}{1.\ 2} + \ldots. +$$

$$+ \frac{(p+q+\ldots.)^m\,i^m}{1.\ 2.\ \ldots.\ m} + \ldots. = \left(1 + iq + \frac{i^2q^2}{1.\ 2} + \ldots.\right)$$

$$\left(1 + ip + \frac{i^2p^2}{1.\ 2} + \ldots.\right) + \ldots.$$

Para identificar estes dois desenvolvimentos é preciso determinar o termo affecto de x^m no segundo membro:

O coefficiente deste termo compor-se-á de tantos termos da fórma

$$\frac{p^a\,q^b\,r^c}{1.\ 2.\ 3\ \ldots.\ a \times 1.\ 2\ \ldots.\ b \times 1.\ 2\ \ldots.\ c \times \ldots.}$$

quantos são os valores differentes que podemos dar a a, b, c .... contanto que seja satisfeita a igualdade $a+b+c\ldots. = m$; o conjuncto destes termos igualado ao coefficiente

$$\frac{(p+q+\ldots.)^m}{1.\ 2\ \ldots.\ m}$$

do termo x^m do primeiro membro, representará o desenvolvimento, e então multiplicando ambos os membros da igualdade por $1.\ 2\ \ldots.\ m$, o primeiro membro reduzir-se-á a $(p+q+\ldots.)^m$ e o segundo representará o seu desenvolvimento. Effectuada esta multiplicação, o segundo membro compor-se-á de termos da fórma:

$$\frac{1.\ 2.\ 3\ \ldots.\ (m-1)m}{1.\ 2.\ 3\ \ldots.\ a \times 1.\ 2\ \ldots.\ b \times 1.\ 2\ \ldots.\ c \times \ldots.} \times p^a\,q^b\,r^c\ldots.$$

ou ainda

$$\frac{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ a(a+1)\ \ldots\ (m-1)\,m}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ a \times 1.\ 2.\ 3\ \ldots\ b \times \ldots} \times p^a\, q^b\, r^c\ \ldots = $$

$$= \frac{m(m-1)\ (m-2)\ \ldots\ (a+2)\ (a+1)}{1.\ 2\ \ldots\ b \times 1.\ 2\ \ldots\ c \times \ldots} \times p^a\, q^b\ \ldots$$

Da igualdade $a + b \ldots = m$, tira-se $a = m - b - c \ldots$, donde a fórma do termo geral será:

$$\frac{m(m-1)\ (m-2)\ \ldots\ (m-b-c-\ldots+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ b \times 1.\ 2.\ 3\ \ldots\ c \times \ldots}\ p^b\, r^c\, p^{m-b-c-\ldots}$$

que traduz a lei geral do desenvolvimento da potencia m do polynomio $(p + q + \ldots)$.

2'. Emfim, o mais importante uso algebrico das series é sem duvida a instituição da dependencia entre os dois ultimos pares de formações transcendentes.

Semelhante ligação importou na descoberta de mais um laço fundamental entre o abstrato e o concreto, dando lugar ao aperfeiçoamento da Algebra pela connexão de seus elementos e pela generalisação de seus principios.

Este grande progresso foi sobretudo devido ao emprego das expressões imaginarias, notadas pela primeira vez por Cardan e introduzidas por Euler, graças aos trabalhos de seus antecessores e sobretudo de d'Alembert (38 c). O seu alcance scientifico manifesta-se principalmente nos estudos geometricos, onde veremos que a reacção da Algebra permitte transformar as formações circulares em series e comparal-as com as precedentes.

(38 c) Euler, occupando-se da quadratura da hyperbole equilatera cuja ordenada tem para expressão $y = \sqrt{x^2 - a^2}$ (sendo a o semi-eixo) emquanto que a ordenada do circulo de raio a é expressa por, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, notou que estas expressões só differiam pelo signal da quantidade sob o radical; e não hesitou desde logo em substituir na expressão do segmento do circulo y^2 por $-y^2$ e y por $y\sqrt{-1}$, afim de obter o segmento hyperbolico. Por outro lado, calculou directamente a área do ultimo segmento e igualou em seguida os dois resultados obtidos, achando assim a relação entre as funcções logarithmicas e circulares (E. B. Raja Gabaglia. — *These de concurso*. Rio, 1885).

Universidade de S. Paulo
Faculdade de
Filosofia, Ciências e Letras
Departamento de Matemática

APPENDICE

REGRA DE FALSA POSIÇÃO COMPOSTA

Vimos que, *na regra de falsa posição, se deve arbitrar á incognita um valor hypothetico e raciocinar sobre elle de accôrdo com o enunciado do problema. Depois, comparando o resultado falso com o verdadeiro, estabelecer a proporção* tal como foi indicado:

total falso : total verdadeiro :: nº. falso : x.

Póde ocontecer, porém, que sendo o problema mais complexo, não baste fazer uma unica hypothese para chegar ao resultado e sejam necessarias *duas ou mais.* Neste caso a *regra de falsa posição denomina-se composta.* Diz-se então que ella é *dobrada* ou *dupla,* si são necessarias *duas hypotheses; triplicada ou triplice,* si são precisas *tres hypotheses,* e assim por diante.

Em qualquer destes casos é sempre necessario que *as differenças entre as hypotheses feitas e o numero pedido sejam proporcionaes ás differenças correspondentes entre os resultados obtidos e o verdadeiro.*

Assim, suppondo que sejam a e b dois numeros hypotheticos, o *primeiro menor* e o *segundo maior* do que o numero procurado x, α o resultado verdadeiro, r e r' os resultados falsos, deve-se ter

$$x - a : b - x :: \alpha - r : r' - \alpha;$$

ou, representando por e e e' os erros commettidos $\alpha - r$ e $r' - \alpha$, ter-se-á

$$x - a : b - x :: e : e';$$

ou ainda, em virtude de uma propriedade conhecida das proporções:

$$x - a + b - x : b - x :: e + e' : e'$$

ou

$$b - a : b - x :: e + e' : e'$$

donde se tira

$$b - x = \frac{(b - a)\,e'}{e + e'}$$

e donde resulta que

$$x = b - \frac{(b + a)\,e'}{e + e'}$$

ou

$$x = \frac{b(e + e') - (b - a)\,e'}{e + e'} = \frac{be + be' - be' + ae'}{e + e'}$$

e finalmente

$$x = \frac{be + ae'}{e + e'}$$

onde se vê que, *para ter o numero pedido, basta multiplicar cada uma das duas hypotheses pelo erro correspondente á outra, e dividir a somma destes dois productos pela somma dos mesmos erros.*

EXEMPLO: *Pagar 100 francos com 29 moedas de 5 francos e de 2 francos.*

Tomemos para incognita x o numero de moedas de 5 francos, porque uma vez obtido basta subtrahil-o de 29 para ter o de moedas de 2 francos.

Tomando para *primeira* hypothese o n. 16, acha-se

$$16 \times 5 = 80\ fr.;$$

e sendo então 13 o numero de moedas de 2 francos, virá:

$$13 \times 2 = 26\ fr.;$$

o que dá para *primeiro resultado falso 106 francos, que excede em 6 francos o resultado verdadeiro.*

Tomando-se para *segunda* hypothese o n. 12, obtem-se

$$12 \times 5 = 60\ fr.$$

e sendo então 17 o numero de moedas de 2 francos, virá:

$$17 \times 2 = 34\ fr.$$

o que dá para *segundo resultado 94 francos, menor que o verdadeiro de 6 francos.*

Applicando a fórmula acima, teremos

$$x = \frac{16 \times 6 + 12 \times 6}{6 + 6} = \frac{96 + 72}{12} = \frac{168}{12} = 14 \text{ moedas de 5 fr.}$$

Verificação:

$$14 \times 5 + 15 \times 2 = 70 + 30 = \mathbf{100\ fr.}$$

Neste problema as duas hypotheses feitas deram resultados respectivamente *maior* e *menor* que o verdadeiro. Acontecendo que se chegue a resultados ambos maiores ou ambos menores que o verdadeiro, a fórmula acima deve ser substituida pela seguinte

$$x = \frac{be - ae'}{e - e'}$$

porque se tem, em vista da proporcionalidade a que acima alludimos, em vez da analogia

$$r - a : b - x :: \alpha - r : r' - \alpha$$

a seguinte

$$a - x : b - x :: r - \alpha : r' - \alpha \qquad \text{(resultados ambos maiores)}$$

ou

$$a - x : b - x :: e : e'$$

donde

$$a - x - b + x : b - x :: e - e' : e'$$

ou ainda

$$a - b : b - x :: e - e' : e'$$

donde se tira

$$b - x = \frac{(a - b)e'}{e - e'}$$

e

$$x = \frac{b(e - e') - (a - b)e'}{e - e'} = \frac{be - be' + ae' + be'}{e - e'}$$

e finalmente

$$x = \frac{be - ae'}{e - e'}.$$

No caso de resultados ambos menores, tem-se

$$x - a : x - b :: \alpha - r : \alpha - r'$$

ou

$$x - a : x - b :: e : e'$$

donde

$$x - a - x + b : x - b :: e - e' : e'$$

ou ainda

$$b - a : x - b :: e - e' : e'$$

donde se tira

$$x - b = \frac{(b - a)e'}{e - e'}$$

e

$$x = \frac{b(e - e') + (b - a)e'}{e - e'} = \frac{be - be' + be' - ae'}{e - e'}$$

e finalmente

$$x = \frac{be - ae'}{e - e'}$$

fórmula identica á obtida acima.

Appliquemos esta fórmula á solução do problema seguinte:

Tem-se vinhos ao preço de 1$000 e 1$500 o litro; pergunta-se quantos litros de um e de outro devem ser misturados para se obter 200 litros ao custo de 240$000?

Tomando para incognita o numero de litros do vinho a 1$000 o litro e suppondo seja este 150, teremos

$$150 \times 1000 + 50 \times 1500 = 150\$000 + 75\$000 = 225\$000$$

resultado menor que o verdadeiro.

Tomando para segunda hypothese o numero 140, virá

$$140 \times 1000 + 60 \times 1500 = 140\$000 + 90\$000 = 230\$000$$

resultado ainda menor que o verdadeiro.

Sendo o erro na 1ª hypothese 15$000 e na 2ª 10$000, ambos para menos, teremos

$$x = \frac{140 \times 15\$000 - 150 \times 10\$000}{15\$000 - 10\$000} = \frac{2{:}100\$000 - 1{:}500\$000}{5\$000} =$$

$$= \frac{600\$000}{5\$000} = \frac{600}{5} = 120$$

Verificação:

$$120 \times 1\$000 + 80 \times 1\$500 = 120\$000 + 120\$000 = 240\$000$$

resultado verdadeiro.

No caso em que o problema tivesse duas incognitas, seria preciso formular tres hypotheses; no caso de tres incognitas quatro hypotheses, e assim por diante.

Mas, em todas estas questões torna-se muito mais simples a solução pela Algebra dos Modernos. Assim é que no primeiro dos problemas acima, tem-se immediatamente:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 29 \\ 5x + 2y &= 100 \end{aligned}\right\}$$

donde

$$y = 29 - x$$

e portanto

$$5x + 2(29 - x) = 100$$

ou ainda

$$5x - 2x = 100 - 58$$

ou

$$3x = 42$$

donde

$$x = \frac{42}{3} = 14$$

numero de moedas de 5 francos, sendo portanto 15 o de moedas de 2 francos.

Verificação:

$$14 \times 5 + 15 \times 2 = 70 + 30 = \mathbf{100\ fr.}$$

Como se vê, a importancia da *regra de falsa posição* é apenas historica. Ella representa, com effeito, o maximo desenvolvimento a que podia attingir a Algebra dos Antigos.

Veremos, em todo o caso, que semelhante methodo foi utilisado pelos modernos na *resolução numerica das equações*, afim de obter por tentativas reiteradas o valor da incognita. Esta pesquiza bastarda, na qual o ponto de vista Arithmetico se combina com o Algebrico, resultou da imperfeição do *Calculo das Relações* que, conforme dissemos, não póde resolver algebricamente as equações cujo grau excede ao quarto.

TABELLAS

TABELLA 1

Valor no fim de *n* annos, de 1 posto a juros compostos

FÓRMULA $(1+r)^n$

ANNOS n	TAXA DOS JUROS, i; $r = \frac{i}{100}$						
	3	3 ½	4	4 ½	5	5 ½	6
1	1,030000	1,035000	1,040000	1,045000	1,050000	1,055000	1,060000
2	1,060900	1,071225	1,081600	1,092025	1,102500	1,113025	1,123600
3	1,092727	1,108718	1,124864	1,141166	1,157625	1,174241	1,191016
4	1,125509	1,147523	1,169859	1,192519	1,215506	1,238825	1,262477
5	1,159274	1,187686	1,216653	1,246182	1,276282	1,306960	1,338226
6	1,194052	1,229255	1,265319	1,302260	1,340095	1,378843	1,418519
7	1,229874	1,272279	1,315932	1,360862	1,407100	1,454679	1,503630
8	1,266770	1,316809	1,368569	1,422101	1,477455	1,534687	1,593848
9	1,304773	1,362897	1,423312	1,486095	1,551328	1,619094	1,689479
10	1,343916	1,410599	1,480244	1,552969	1,628895	1,708144	1,790848
11	1,384234	1,459970	1,539454	1,622853	1,710339	1,802092	1,898299
12	1,425761	1,511069	1,601032	1,695881	1,795856	1,901207	2,012196
13	1,468534	1,563956	1,665074	1,772196	1,885649	2,005774	2,132928
14	1,512590	1,618695	1,731676	1,851945	1,979932	2,116091	2,260904
15	1,557967	1,675349	1,800944	1,935282	2,078928	2,232476	2,396558
16	1,604706	1,733986	1,872981	2,022370	2,182875	2,355263	2,540352
17	1,652848	1,794676	1,947900	2,113377	2,292018	2,484802	2,692773
18	1,702433	1,857489	2,025817	2,208479	2,406619	2,621466	2,854339
19	1,753506	1,922501	2,106849	2,307860	2,528950	2,765647	3,025600
20	1,806111	1,989789	2,191123	2,411714	2,655298	2,917757	3,207135
21	1,860295	2,059431	2,278768	2,520241	2,785963	3,078234	3,399564
22	1,916103	2,131512	2,369919	2,633652	2,925261	3,247537	3,603537
23	1,973587	2,208114	2,464716	2,752166	3,071524	3,426152	3,819750
24	2,032794	2,283328	2,563304	2,876014	3,225100	3,614590	4,048935
25	2,093778	2,363245	2,665836	3,005434	3,386355	3,813392	4,291871
26	2,156591	2,445959	2,772470	3,140679	3,555673	4,023129	4,549383
27	2,221280	2,531567	2,883379	3,282010	3,734456	4,244401	4,822346
28	2,287928	2,620172	2,998703	3,229700	3,920129	4,477843	5,111687
29	2,356566	2,711878	3,118651	3,584036	4,116136	4,724124	5,418388
30	2,427262	2,805794	3,243328	3,745380	4,321942	4,983951	5,743491

OBSERVAÇÃO

Esta tabella dá calculado o valor de $(1+r)^n$, para os valores correspondentes de *n* e *r* indicados na tabella. Esse valor é a quantia produzida por 1 (qualquer que seja a unidade monetaria), empregado á taxa *r* e a juros compostos durante *n* annos.

Exemplo: *Qual é no fim de 20 annos o capital produzido por* 1:200$ *empregados a juros compostos á taxa de* 4 % *ao anno?*

Neste exemplo $n = 20$, $i = 4$ e $r = 0{,}04$. O numero que corresponde aos dados é 21,191123, e representa o valor de 1$ no fim de 20 annos, multiplicando-o por 1200 acha-se 2:629$350, valor definitivo do capital 1:200$ no fim de 20 annos.

TABELLA 2

Valor actual de 1 pagavel no fim de n annos

FÓRMULA $\frac{1}{(1+r)^n}$

ANNOS	TAXA DOS JUROS i; $r = \frac{i}{100}$						
n	3	3 ½	4	4 ½	5	5 ½	6
1	0,970873	0,966184	0,961538	0,956938	0,952381	0,947866	0,943396
2	942596	933511	924556	915730	907630	898452	889996
3	915142	901943	888996	876297	863838	851614	839619
4	888487	871442	854804	838561	822702	807216	792094
5	862609	841973	821927	802451	783526	765134	747258
6	837484	813501	790314	767896	746215	725246	704960
7	813091	785991	759918	734828	710681	687437	665057
8	789409	759412	730690	703185	676839	651599	627412
9	766417	733331	702587	672904	644609	617620	591898
10	744094	708919	675564	643928	613913	585431	558395
11	722421	684946	649581	616199	584679	554911	526788
12	701380	661783	624597	589664	556837	525982	496969
13	680951	639404	600574	564272	530321	498561	468839
14	661118	617782	577475	539973	505068	472560	442301
15	641862	596891	555264	516720	481017	447933	417265
16	623167	576706	533908	494469	458111	424581	393646
17	605016	557204	513373	473176	436297	402446	371364
18	587395	538361	493628	452800	415521	381466	350344
19	570286	520156	474642	433302	395734	361579	330513
20	553676	502566	456387	414643	376889	342729	311805
21	537549	485571	438834	396787	358942	324861	294155
22	521892	469151	421955	379701	348150	307926	277505
23	506692	453286	405726	363350	325571	291873	261797
24	491934	437957	390121	347703	310068	276657	246978
25	477606	423147	375107	332731	295303	262234	232998
26	463695	408838	360689	318402	281241	248562	219810
27	450189	395012	346817	304691	267848	235645	207368
28	437077	381654	333477	291571	255094	223322	195630
29	424346	368748	320651	279015	242946	211679	184557
30	411987	356278	308119	267000	231377	200644	174110

OBSERVAÇÃO

O devedor que tem a reembolsar um capital C no fim de n annos, póde querer exonerar-se da sua divida pagando um capital c que, empregado a juros compostos á taxa r durante n annos, possa produzir o capital C.

Ora, da fórmula $C = c\,(1+r)^n$, deduz-se

$$c = \frac{C}{(1+r)^n}.$$

Assim o valor actual c de um capital C pagavel no fim de n annos, obtem-se dividindo este capital por $(1+r)^n$; o valor actual de 1 é pois simplesmente $\frac{1}{(1+r)^n}$.

A taboa 2 dá em fracção decimal da unidade monetaria o valor de $\frac{1}{(1+r)^n}$, correspondente a n e r.

Exemplo: *Qual é a quantia que um devedor precisa pagar immediatamente para exonerar-se de uma divida de* 2:629$350 *pagaveis no fim de* 20 *annos, sendo a taxa dos juros* 4 %?

A fracção 0,456387 que corresponde a $n = 20$ e $i = 4$, é o valor actual de 1$000. Multiplicando-a por 2629,350 acha-se 1:200$ para o valor actual de 2:629$350 reembolsaveis no fim de 20 annos.

TABELLA 3

Capital produzido no fim de n annos pelo emprego de 1 a juros compostos no principio de cada anno

FÓRMULA $\frac{1+r}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$.

ANNOS	TAXA DOS JUROS — i; $r=\frac{i}{100}$						
n	3	3 ½	4	4 ½	5	5 ½	6
1	1,030000	1,035000	1,040000	1,045000	1,050000	1,055000	1,060000
2	2,090900	2,106225	2,121600	2,137025	2,152500	2,168025	2,183600
3	3,183627	3,214943	3,246464	3,278191	3,310125	3,342259	3,374616
4	4,309136	4,362466	4,416323	4,470710	4,525631	4,581098	4,637093
5	5,468410	5,550152	5,632975	5,716892	5,801913	5,888051	5,975319
6	6,662462	6,779408	6,898294	7,019152	7,142008	7,266897	7,393838
7	7,892336	8,051687	8,214226	8,380014	8,549109	8,721570	8,897468
8	9,159106	9,368496	9,582795	9,802114	10,026564	10,256269	10,491316
9	10,463879	10,731393	11,006107	11,288209	11,577893	11,875348	12,180795
10	11,807796	12,141992	12,486351	12,841179	13,206787	13,583489	13,971643
11	13,192030	13,601961	14,025805	14,464032	14,917127	15,385583	15,869941
12	14,617790	15,113030	15,626838	16,159913	16,712983	17,286789	17,882138
13	16,086324	16,676986	17,291911	17,932109	18,598632	19,292574	20,015066
14	17,598914	18,295881	19,023588	19,784054	20,578564	21,408654	22,275970
15	19,156881	19,971030	20,824531	21,719337	22,657492	23,641130	24,672528
16	20,761588	21,705016	22,697612	23,741707	24,840366	25,996408	27,212880
17	22,414435	23,499691	24,645413	25,855084	27,132385	28,481202	29,905653
18	24,116868	25,357180	26,671229	28,063562	29,539004	31,102666	32,759992
19	25,870374	27,279682	28,778079	30,371423	32,065954	33,868319	35,785591
20	27,676486	29,269471	30,969202	32,783137	34,719252	36,786066	38,992727
21	29,536780	31,328902	33,247098	35,303378	37,505214	39,864306	42,392290
22	31,452884	33,460414	35,617889	37,937030	40,430475	43,111846	45,995828
23	33,426470	35,666528	38,082604	40,689196	43,501999	46,538006	49,815577
24	35,459264	37,949857	40,645908	43,565210	46,727099	50,152589	53,864512
25	37,553042	40,313102	43,311745	46,570645	50,113451	53,955973	58,156383
26	39,709634	52,759060	46,084214	49,711324	53,669126	57,989110	62,705766
27	41,930923	45,290629	48,967583	52,993333	57,402583	62,233509	67,528112
28	44,218850	47,910799	51,966286	56,423033	61,322712	66,711351	72,639798
29	46,575416	50,622677	55,084938	60,007070	65,438847	71,435469	78,058186
30	49,002678	49,002678	58,328335	63,752388	69,760790	76,419423	83,801677

OBSERVAÇÃO

O emprego de um capital c a juros compostos no principio de cada anno dá no fim de n annos uma quantia representada pela fórmula

$$C=c\,\frac{1+r}{r}\left[(1+r)^n-1\right].$$

A tabella 3 dá o valor de $\frac{1+r}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$, quantia produzida no fim de n annos por 1 empregado a juros compostos a taxa r.

Exemplo: *Qual é no fim de 20 annos o capital produzido pelo emprego annual de 100$ a juros compostos, sendo a taxa 4 %?*

O numero da tabella que corresponde a $n=20$, $i=4$, é 30,969202. É elle a quantia produzida por 1$ no fim de 20 annos; multiplicando este numero por 100, acha-se 3:096$920, capital pedido.

TABELLA 4

Valor actual do capital produzido no fim de n annos pelo emprego de 1 a juros compostos no principio de cada anno

FÓRMULA $\frac{1+r}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]$

ANNOS	TAXA DOS JUROS — i ; $r = \frac{i}{100}$						
n	3	3 ½	4	4 ½	5	5 ½	6
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	1,970871	2,966184	1,961538	1,956938	1,952381	1,947875	1,943404
3	2,913458	2,899694	2,086095	2,872668	2,859410	2,846313	2,833397
4	3,828613	3,301637	3,775091	3,748964	3,723218	3,696949	3,673006
5	4,717091	4,673079	4,629895	4,587526	4,546150	4,505157	4,465208
6	5,579716	5,515052	5,451822	5,389075	5,329477	5,270281	5,212373
7	6,698090	6,328553	6,242137	6,157602	6,075692	5,995526	5,917326
8	7,230291	7,114544	7,002055	6,892701	6,786373	6,682964	6,582388
9	8,019683	7,873955	7,732745	7,595886	7,463213	7,334471	7,209802
10	8,786106	8,607636	8,435332	8,268792	8,107822	7,952097	7,801688
11	9,530212	9,316605	9,110896	8,912718	8,721735	8,537616	8,360078
12	10,252620	10,001551	9,760477	9,528917	9,306414	9,092527	8,986881
13	10,954015	10,663334	10,385074	10,118581	9,803252	9,618512	9,383844
14	11,634948	11,302738	10,985648	10,682852	10,393573	10,117085	9,852682
15	12,296071	11,920520	11,563123	11,222825	10,898641	10,589649	10,294452
16	12,937932	12,517411	12,118387	11,739546	11,379658	11,037582	10,712253
17	13,561117	13,094117	12,652290	12,234015	11,837770	11,462172	11,105902
18	14,166105	13,651321	13,165669	12,707191	12,707191	11,864607	11,477255
19	14,753514	14,189692	13,659297	13,159992	13,159992	12,246075	11,827603
20	15,323790	14,709837	14,133939	13,593269	13,593269	12,607653	12,158111
21	15,877484	15,212403	14,590326	14,007936	14,007936	12,950393	12,469928
22	16,415041	15,697974	15,029160	14,404724	14,404724	13,275237	12,764078
23	16,936908	16,167125	15,451115	14,784425	14,784425	13,583163	13,041586
24	17,443599	16,620310	15,056342	15,147775	15,147755	13,875034	13,303388
25	17,935527	17,058368	16,246963	15,495478	15,495478	14,151693	13,550368
26	18,413138	17,481515	16,622080	15,828209	15,828209	14,413947	13,743356
27	18,876544	17,890752	16,982769	16,146611	16,146611	14,661718	14,003165
28	19,327023	18,285354	17,329586	16,451303	16,451303	14,899096	14,210536
29	19,764120	18,667019	17,662263	16,742874	16,742874	15,121430	14,406159
30	20,188446	19,035767	17,983715	17,021889	17,021889	15,333101	14,590723

OBSERVAÇÃO

Quando se dividem os dois membros da fórmula da tabella precedente por $(1+r)^n$ obtem-se (representando o quociente de C por $(1+r)^n$ pela lettra V)

$$V = c\,\frac{1+r}{r}\left[(1-\frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

V representa o valor actual do capital C produzido pelo emprego de n quantias iguaes a c, postas a juros no principio de cada anno. Este capital V empregado só, a juros compostos produz em n annos o mesmo capital que o emprego successivo de n quantias iguaes a c.

A tabella 4 dá o valor de $\frac{1+r}{r}\left[(1-\frac{1}{(1+r)^n}\right.$, valor actual da quantia produzida por 1 empregado successivamente no principio de cada anno a juros compostos e durante n annos.

Exemplo: *Qual é o valor actual do capital produzido pelo emprego annual e durante* 20 *annos de* 100$ *á* 4 % ?

Vê-se na tabella que o valor actual de 1, empregado annualmente á taxa de 4 %, durante 20 annos, é 14,133939.

O valor actual de 100$ é pois $100 \times 14{,}133939 = 1{:}413\$393$.

Assim, em lugar de pagar annualmente 20 vezes 100$, póde-se pagar actualmente 1:413$390.

TABELLA 5

Capital produzido por n annuidades iguaes a 1, pagas no fim de cada anno

FÓRMULA $\frac{1}{r}[(1+r)^n - 1]$.

ANNOS	TAXA DOS JUROS i ; $r = \frac{i}{100}$.						
n	3	3 ½	4	4 ½	5	5 ½	6
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,030000	2,035000	2,040000	2,045000	2,050000	2,055000	2,060000
3	3,090900	3,106225	3,121600	3,137025	3,152500	3,168018	3,183600
4	4,183633	4,214943	4,246464	4,278971	4,310125	4,342273	4,374616
5	5,309133	5,362466	5,416323	5,470710	5,525631	5,581091	5,637100
6	6,468400	6,550152	6,632975	6,716892	6,801913	6,888054	6,975316
7	7,662466	7,779408	7,898294	8,019852	8,142008	8,266391	8,393833
8	8,892233	9,051687	9,214226	9,380014	9,549019	9,721582	9,897466
9	10,159100	10,368496	10,582795	10,802114	11,026564	11,256254	11,491316
10	11,463866	11,731393	12,006107	12,288209	12,577893	12,875345	13,180799
11	12,807800	13,141992	13,486351	13,841179	14,206787	14,583491	14,971649
12	14,192033	14,601962	15,025805	15,464632	15,917127	16,385582	16,869933
13	15,617800	16,113030	16,626838	17,159913	17,712983	18,286800	18,882133
14	17,086333	17,676986	18,291911	18,932109	19,598632	20,292563	21,015066
15	18,598903	19,295681	20,023588	20,784054	21,578564	22,408654	23,275966
16	20,156866	20,971030	21,824531	22,719337	23,657492	24,641145	25,672532
17	21,761600	22,705016	23,697512	24,741707	25,840366	26,996400	28,212882
18	23,414433	24,499691	25,645413	26,855084	28,132385	29,481200	30,905649
19	25,116866	26,357180	27,671229	29,063562	30,539004	32,102672	33,759999
20	26,870366	28,279682	29,778079	31,371423	33,065954	34,868309	36,785582
21	28,676500	30,269471	31,969202	33,783137	35,719252	37,786072	39,992732
22	30,536766	32,328902	34,247970	36,303378	38,505214	40,864309	43,392281
23	32,452900	34,460414	36,617889	38,937030	41,430475	44,111854	46,995831
24	34,426466	36,666528	39,082604	41,689196	44,501999	47,538000	50,815581
25	36,459266	38,949857	41,645908	44,565210	47,727099	51,152581	54,864514
26	38,533033	41,313102	44,311745	47,570645	51,113454	54,965981	59,156381
27	40,709633	43,759060	47,084214	50,711324	54,669126	58,989108	63,705764
28	42,930933	46,290627	49,967533	53,993333	58,402583	63,233508	68,528114
29	45,218866	48,910799	52,966286	57,423033	62,322712	67,711345	73,639797
30	47,575400	51,622677	56,084938	61,007070	66,438848	72,435472	79,058180

OBSERVAÇÃO

As annuidades sempre são pagaveis ou reembolsaveis no fim de cada anno. A fórmula que determina o capital produzido pela reunião das annuidades e dos seus juros compostos no fim de n annos é: $C = \frac{a}{r}[(1+r)^n - 1]$.

A tabella 5 dá o valor de $\frac{1}{r}[(1+r)^n - 1]$, isto é a quantia C produzida pela annuidade 1 paga durante n annos.

Exemplo: *Qual é no fim de 20 annos o capital produzido pela annuidade de 100$ á taxa de 4 %?*

O numero 29,778079 que corresponde a $n = 20$, $i = 4$, é a quantia produzida pela annuidade 1$ no fim de 20 annos. Multiplicando-a por 100, acha-se o capital pedido 2:977$807.

TABELLA 6

Valor actual do capital produzido no fim de n annos pela annuidade no fim de cada anno

FÓRMULA $\frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]$.

ANNOS	TAXA DOS JUROS i; $r=\frac{i}{100}$						
n	3	3 ½	4	4 ½	5	5 ½	6
1	0,970874	0,966184	0,961538	0,956938	0,952381	0,947867	0,943396
2	1,913467	1,899694	1,886095	1,872668	1,859410	1,846327	1,833400
3	2,828600	2,801637	2,775091	2,748964	2,723248	2,697927	2,673016
4	3,717100	3,673079	3,629895	3,587526	3,545950	3,505164	3,465100
5	4,579700	4,515052	4,451822	4,389977	4,329477	4,270291	4,212366
6	5,417200	5,328553	5,242137	5,157872	5,075692	4,995527	4,917333
7	6,230300	6,614544	6,002055	5,892701	5,786373	5,682963	5,582383
8	7,019700	6,873955	6,732745	6,595886	6,463213	6,334563	6,209800
9	7,786100	7,607686	7,435332	7,268790	7,107822	6,952200	6,801700
10	8,530200	8,316605	8,110896	7,912718	7,721735	7,537618	7,360083
11	9,252633	9,001551	8,760477	8,528917	8,306414	8,092527	7,886866
12	9,954000	9,663334	9,385034	9,118581	8,863252	8,618509	8,383850
13	10,634967	10,302738	9,985648	9,682852	9,393573	9,117073	8,852683
14	11,296066	10,920520	10,563123	10,222825	9,898641	9,589654	9,294983
15	11,937933	11,517411	11,118387	10,739546	10,37[illegible]658	10,037582	9,712250
16	12,561100	12,094117	11,652296	11,234015	10,837770	10,462163	10,105900
17	13,166133	12,651321	12,165669	11,707191	11,274066	10,864618	10,477226
18	13,753500	13,189682	12,659297	12,159992	11,689587	11,246073	10,827600
19	14,323800	13,709837	13,133939	12,593294	12,085321	11,607654	11,158116
20	14,877466	14,212403	13,590326	13,007936	12,462210	11,950382	11,469916
21	15,415033	14,697974	14,029160	13,404724	12,821153	12,275254	11,764083
22	15,936933	15,167125	14,451115	13,784425	13,163003	12,583163	12,041583
23	16,443600	15,620410	14,856842	14,147775	13,488574	12,875036	12,303383
24	16,935533	16,058368	15,246963	14,495478	13,789642	13,151691	12,550366
25	17,413133	16,481515	15,622080	14,828209	14,093945	13,413927	12,783366
26	17,876833	16,890352	15,982769	15,146611	14,375185	13,662509	13,003166
27	18,327033	17,285364	16,329586	15,451303	14,643034	13,897363	13,210533
28	18,764100	17,667019	16,663063	15,742873	14,898127	14,121418	13,406166
29	19,188466	18,035767	16,983715	16,021888	15,141074	14,333109	13,590716
30	19,600433	18,392045	17,292033	16,288888	15,372451	14,533745	13,764833

OBSERVAÇÃO

Dividindo os dois membros da fórmula das annuidades por $(1+r)^n$, e representando o quociente $\frac{C}{(1+r)^n}$ por A, temos:

$$A=\frac{a}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

A designa o valor actual do capital C produzido por n annuidades iguaes a a e pagas no fim de cada anno.

Este capital A é tal que, empregado só a juros compostos, produz em n annos a mesma quantia C que as n annuidades.

A tabella 6 dá o valor $\frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]$, valor actual do capital produzido por n annuidades iguaes a 1.

Exemplo: *Qual é o valor actual do capital produzido por* n *annuidades de* 100$ *á taxa de* 4 %?

Acha-se na tabella que o valor actual que corresponde a 20 annuidades iguaes a 1 é 13,590326. Multiplicando este numero por 100 temos a quantia pedida, 1:359$032. Assim, em vez de pagar successivamente 20 annuidades de 100$, póde-se pagar actualmente 1:359$032. Esta quantia empregada a juros compostos produz com effeito 2:971$807 no fim de 20 annos.

TABELLA 7

Tempo necessario para a amortisação de um capital, conhecendo as taxas *r* e *t* do juro e da amortisação

FÓRMULA $n = \frac{\log.(r+t) - \log.t}{\log.(1+r)}$

TAXA DE AMORTISAÇÃO *t*		TAXA DO JURO *i*							
		3		3 ½		4		4 ½	
1/10	0,001	116 an.	64 ds.	104 an.	61 ds.	94 an.	250 ds.	86 an.	358 ds.
1/5	0,002	93	292	84	298	77	228	71	264
1/4	0,0025	86	283	78	263	72	87	66	326
3/10	0,003	81	45	73	294	67	324	62	361
2/5	0,004	72	146	66	72	61	51	56	337
1/2	0,005	65	304	60	163	56	8	52	114
3/5	0,006	60	225	55	316	51	341	48	226
7/10	0,007	56	120	52	31	48	302	45	204
3/4	0,0075	54	164	50	155	47	23	44	76
4/5	0,008	52	261	48	324	45	250	42	350
9/10	0,009	49	222	46	48	43	76	40	258
1	0,01	46	329	43	264	41	13	38	266
1 1/10	0,011	44	187	41	216	39	40	36	355
1 1/5	0,012	42	140	39	251	37	141	35	146
1 1/4	0,0125	41	147	38	295	36	216	34	245
1 3/10	0,013	40	172	37	355	35	304	33	256
1 2/5	0,014	38	271	36	152	34	153	32	248
1 1/2	0,015	37	61	35	0	33	47	31	181
1 3/5	0,16	35	266	33	255	31	344	30	148
1 7/10	0,17	34	148	32	183	30	309	29	145
1 3/4	0,0175	33	285	31	342	30	121	28	336
1 4/5	0,018	33	66	31	143	29	304	28	168
1 9/10	0,019	32	19	30	133	28	325	27	216
2	0,02	31	0	29	148	28	4	26	284
2 1/4	0,0225	28	243	27	100	26	18	24	350
2 1/2	0,025	26	246	25	164	24	132	23	143
2 3/4	0,0275	24	349	23	316	22	327	22	8
3	0,03	23	164	22	174	21	220	20	299
3 1/4	0,0325	22	45	21	90	20	167	19	271
3 1/2	0,035	20	344	20	54	19	158	18	285
3 3/4	0,0375	19	323	19	60	18	186	17	334
4	0,04	18	341	18	100	17	246	17	46
		5		5 ½		6		6 ½	
1/10	0,001	80 an.	214 ds.	85 an.	67 ds.	70 an.	201 ds.	66 an.	193 ds.
1/5	0,002	66	284	62	207	58	341	55	278
1/4	0,0025	82	146	58	206	55	88	52	123
3/10	0,003	58	307	55	117	52	91	49	204
2/5	0,004	53	126	50	97	47	213	45	80
1/2	0,005	49	54	46	150	44	7	41	331
3/5	0,006	45	285	43	115	41	56	39	87
7/10	0,007	42	359	40	270	38	279	37	4
3/4	0,0075	41	273	39	220	37	259	36	9
4/5	0,008	40	220	38	199	36	266	35	40
9/10	0,009	38	197	36	237	34	350	33	166
1	0,01	36	265	34	351	33	144	31	363
1 1/10	0,011	35	40	33	170	32	1	30	253
1 1/5	0,02	33	241	32	44	30	274	29	189
1 1/4	0,0125	32	361	31	182	30	61	28	355
1 3/10	0,013	32	126	30	330	29	224	28	165
1 2/5	0,014	31	35	29	289	28	210	27	175
1 1/2	0,015	30	20	28	282	27	227	26	213
1 3/5	0,016	29	16	27	304	26	271	25	276

TABELLA 7 (continuação)

TAXA DE AMORTISAÇÃO t		TAXA DO JURO i			
		5	5 ½	6	6 ½
1 7/10	0,017	28 an. 40 ds.	26 an. 351 ds.	25 an. 338 ds.	24 an. 360 ds.
1 3/4	0,0175	27 244	26 200	25 197	24 228
1 4/5	0,018	27 88	26 55	25 60	24 99
1 9/10	0,019	26 158	25 144	24 167	23 220
2	0,02	25 247	24 251	23 289	22 357
2 1/4	0,0225	23 359	23 36	22 109	21 207
2 1/2	0,025	22 189	21 265	21 1	20 124
2 3/4	0,0275	21 86	20 190	19 316	19 96
3	0,03	20 38	19 165	18 312	18 111
3 1/4	0,0325	19 34	18 182	17 347	17 163
3 1/2	0,035	18 68	17 234	17 50	16 245
3 3/4	0,0375	17 133	16 315	16 145	15 353
4	0,04	16 227	16 57	15 265	15 119

OBSERVAÇÃO

A tabella 7 dá em annos e dias o tempo necessario para amortisar um capital qualquer quando se conhece a taxa r dos juros e a taxa t da amortisação.

Exemplo: *Qual é o tempo necessario para amortisar um capital qualquer, sendo a taxa de amortisação* 2 % *(ou* $t = 0{,}02$*), e a taxa dos juros* 4 % *(ou* $r = 0{,}04$*)?*

Acha-se na tabella 28 annos e 4 dias.

TABELLA 8

Taxa de amortisação necessaria para amortisar um capital em um certo numero de annos

FÓRMULA $t = \frac{r}{(1+r)^n - 1}$

ANNOS	TAXA DOS JUROS			
n	3	3 ½	4	4 ½
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	0,492611	0,491400	0,490196	0,488998
3	0,323530	0,321934	0,390348	0,318774
4	0,239027	0,237251	0,235489	0,233743
5	0,188355	0,186481	0,184627	0,182792
6	0,154598	0,152668	0,150762	0,148878
7	0,130506	0,128545	0,126610	0,124701
8	0,112456	0,110477	0,108528	0,106609
9	0,098436	0,096446	0,094493	0,092575
10	0,087231	0,085241	0,083291	0,081379
11	0,078077	0,076092	0,074150	0,072248
12	0,070463	0,068484	0,066552	0,064666
13	0,064030	0,062062	0,060144	0,058275
14	0,058526	0,056571	0,054669	0,052820
15	0,053767	0,051826	0,049942	0,048114
16	0,049611	0,047695	0,045820	0,044015
17	0,045953	0,044043	0,042199	0,040418
18	0,042709	0,040817	0,038993	0,037237
19	0,039814	0,037940	0,036139	0,034407
20	0,037216	0,035361	0,033582	0,031876
21	0,034872	0,033037	0,031280	0,029601
22	0,032747	0,030932	0,029199	0,027546
23	0,030814	0,029019	0,027309	0,025682
24	0,029047	0,027273	0,025587	0,023987
25	0,027428	0,025674	0,024012	0,022439
26	0,025938	0,024205	0,022567	0,021021
27	0,024564	0,022852	0,020239	0,019719
28	0,023293	0,021603	0,020013	0,018521
29	0,022115	0,020445	0,018880	0,017415
30	0,021019	0,019371	0,017830	0,016392
31	0,019999	0,018372	0,016855	0,015442
32	0,019047	0,017442	0,015949	0,014563
33	0,018156	0,016572	0,015103	0,013745
34	0,017372	0,015760	0,014315	0,012982
35	0,016539	0,014998	0,013577	0,012270
36	0,015804	0,014284	0,012887	0,011606
37	0,015112	0,013613	0,012240	0,010984
38	0,014459	0,012982	0,011632	0,010402
39	0,013844	0,012388	0,011061	0,009856
40	0,013262	0,011827	0,010523	0,009343
41	0,012712	0,011298	0,010017	0,008862
42	0,012192	0,010798	0,009540	0,008409
43	0,011698	0,010325	0,009090	0,007982
44	0,011230	0,009878	0,008665	0,007581
45	0,010785	0,009453	0,008263	0,007202
46	0,010363	0,009051	0,007882	0,006845
47	0,009961	0,008669	0,007522	0,006507
48	0,009578	0,008306	0,007181	0,006183
49	0,009213	0,007962	0,006858	0,005887
50	0,008866	0,007634	0,006550	0,005602
51	0,008534	0,007322	0,006259	0,005332
52	0,008217	0,007024	0,005982	0,005077
53	0,007915	0,006741	0,005719	0,004835
54	0,007626	0,006471	0,005469	0,004605
55	0,007348	0,006213	0,005231	0,004388
56	0,007084	0,005967	0,005005	0,004181
57	0,006831	0,005733	0,004789	0,003985

TABELLA 8 (continuação)

ANNOS	TAXA DOS JUROS			
n	3	3 ½	4	4 ½
58	0,006588	0,005508	0,004584	0,003799
59	0,006355	0,005294	0,004388	0,003622
60	0,006133	0,005089	0,004202	0,003454
61	0,005919	0,004892	0,004024	0,003295
62	0,005714	0,004705	0,003854	0,003143
63	0,005517	0,004525	0,003692	0,002998
64	0,005328	0,004353	0,003538	0,002861
65	0,005146	0,004188	0,003390	0,002730
66	0,004971	0,004030	0,003249	0,002606
67	0,004803	0,003879	0,003115	0,002488
68	0,004642	0,003734	0,002986	0,002375
69	0,004486	0,003595	0,002863	0,002267
70	0,004337	0,003468	0,002745	0,002165
71	0,004193	0,003333	0,002633	0,002068
72	0,004054	0,003210	0,002525	0,001975
73	0,003921	0,003092	0,002422	0,001886
74	0,003792	0,002958	0,002323	0,001802
75	0,003668	0,002869	0,002229	0,001721
76	0,003548	0,002765	0,002139	0,001644
77	0,003433	0,002664	0,002052	0,001571
78	0,003322	0,002567	0,001969	0,001501
79	0,003215	0,002474	0,001890	0,001434
80	0,003112	0,002385	0,001814	0,001371
81	0,003012	0,002299	0,001741	0,001310
82	0,002916	0,002216	0,001672	0,001252
83	0,002823	0,002137	0,001605	0,001197
84	0,002733	0,002060	0,001541	0,001144
85	0,002647	0,001987	0,001479	0,001093
86	0,002563	0,001916	0,001420	0,001045
87	0,002482	0,001848	0,001364	0,000999
88	0,002404	0,001782	0,001310	0,000955
89	0,002328	0,001719	0,001258	0,000913
90	0,002256	0,001658	0,001208	0,000873
91	0,002185	0,001599	0,001160	0,000835
92	0,002117	0,001543	0,001114	0,000798
93	0,002051	0,001488	0,001070	0,000763
94	0,001987	0,001436	0,001028	0,000730
95	0,001926	0,001385	0,000987	0,000698
96	0,001866	0,001337	0,000949	0,000667
97	0,001808	0,001290	0,000911	0,000638
98	0,001752	0,001245	0,000855	0,000610
99	0,001699	0,001201	0,000841	0,000584
100	0,001647	0,001159	0,000808	0,000558
n	5	5 ½	6	6 ½
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	0,487805	0,486618	0,485437	0,484262
3	0,317209	0,315655	0,314110	0,312575
4	0,232012	0,230294	0,228591	0,226903
5	0,180975	0,179176	0,177397	0,175634
6	0,147017	0,145179	0,143363	0,141568
7	0,122820	0,120964	0,119135	0,117331
8	0,104722	0,102864	0,101036	0,099237
9	0,090690	0,088840	0,087022	0,085239
10	0,079504	0,077668	0,075868	0,074105
11	0,070389	0,068571	0,066793	0,065075
12	0,062825	0,061029	0,059277	0,057567
13	0,056456	0,054684	0,052960	0,051283
14	0,051024	0,049279	0,047585	0,045941
15	0,046342	0,044626	0,042963	0,041353
16	0,042270	0,040584	0,038952	0,037378

TABELLA 8 (continuação)

ANNOS	TAXA DOS JUROS			
n	5	5 ½	6	6 ½
17	0,038699	0,037042	0,035445	0,033906
18	0,035546	0,033920	0,032377	0,030858
19	0,032745	0,031150	0,029621	0,028156
20	0,030243	0,028679	0,027185	0,025756
21	0,027995	0,026465	0,025005	0,023613
22	0,025971	0,024471	0,023046	0,021691
23	0,024137	0,022670	0,021278	0,019961
24	0,022471	0,021036	0,019679	0,018398
25	0,020952	0,019549	0,018227	0,016981
26	0,019564	0,018193	0,016904	0,015695
27	0,018292	0,016952	0,015697	0,014523
28	0,017123	0,015814	0,014593	0,013453
29	0,016046	0,014769	0,013580	0,012464
30	0,015051	0,013805	0,012649	0,011567
31	0,014132	0,012917	0,011792	0,010754
32	0,013280	0,012095	0,011002	0,009997
33	0,012490	0,011335	0,010273	0,009299
34	0,011755	0,010630	0,009598	0,008656
35	0,011072	0,009975	0,009974	0,008062
36	0,010434	0,009366	0,008395	0,007513
37	0,009840	0,008800	0,007857	0,007005
38	0,009284	0,008272	0,007358	0,006535
39	0,008765	0,007780	0,006894	0,006099
40	0,008278	0,007320	0,006462	0,005694
41	0,007822	0,006891	0,006059	0,005318
42	0,007395	0,006489	0,005683	0,004968
43	0,006993	0,006113	0,005333	0,004644
44	0,006616	0,005761	0,005006	0,004341
45	0,006272	0,005431	0,004701	0,004060
46	0,005928	0,005122	0,004415	0,003797
47	0,005614	0,004831	0,004148	0,003553
48	0,005318	0,004559	0,003898	0,003325
49	0,005040	0,004302	0,003664	0,003112
50	0,004777	0,004061	0,003444	0,002914
51	0,004529	0,003835	0,003239	0,002729
52	0,004295	0,003622	0,003046	0,002556
53	0,004073	0,003421	0,002866	0,002394
54	0,003864	0,003232	0,002696	0,002243
55	0,003667	0,003055	0,002537	0,002101
56	0,003480	0,002887	0,002388	0,001969
57	0,003303	0,002729	0,002247	0,001846
58	0,003136	0,002580	0,002116	0,001730
59	0,002978	0,002440	0,001992	0,001722
60	0,002828	0,002307	0,001876	0,001520
61	0,002685	0,002182	0,001766	0,001426
61	0,002552	0,002064	0,001664	0,001337
63	0,002424	0,001953	0,001567	0,001254
64	0,002304	0,001847	0,001476	0,001176
65	0,002189	0,001748	0,001391	0,001103
66	0,002081	0,001654	0,001310	0,001034
67	0,001978	0,001565	0,001235	0,000970
68	0,001880	0,001482	0,001163	0,000910
69	0,001787	0,001402	0,001096	0,000954
70	0,001699	0,001328	0,001033	0,000801
71	0,001616	0,001257	0,000974	0,000752
72	0,001535	0,081190	0,000918	0,000730
73	0,001461	0,001127	0,000865	0,000662
74	0,001390	0,001067	0,000815	0,000621
75	0,001322	0,001010	0,000769	0,000583
76	0,001257	0,000956	0,000725	0,000547
77	0,001196	0,000906	0,000683	0,000513
78	0,001138	0,000858	0,000644	0,000482
79	0,001082	0,000312	0,000607	0,000452
80	0,001030	0,000769	0,000573	0,000424
81	0,000980	0,000729	0,000540	0,000398

TABELLA 8 (continuação

ANNOS	TAXA DOS JUROS			
n	5	5 ½	6	6 ½
82	0,000932	0,000690	0,000509	0,000374
83	0,000887	0,000654	0,000480	0,000351
84	0,000844	0,000619	0,000453	0,000329
85	0,000803	0,000587	0,000427	0,000309
86	0,000764	0,000556	0,000402	0,000290
87	0,000727	0,000527	0,000380	0,000272
88	0,000692	0 000499	0,000358	0,000256
89	0,000659	0,000473	0,000338	0,000240
90	0,000627	0,000448	0,000318	0,000225
91	0,000597	0,000424	0,000300	0,000212
92	0,000568	0,000402	0,000283	0,000199
93	0,000541	0,000381	0,000267	0,000186
94	0,000515	0,000361	0,000252	0,000175
95	0,000490	0,000342	0,000238	0,000164
96	0,000466	0,000324	0,000224	0,000154
97	0,000444	0,000307	0,000211	0,000145
98	0,000423	0,000291	0,000199	0,000136
99	0,000402	0,000276	0,000188	0,000128
100	0,000383	0,000261	0,000177	0,000120

OBSERVAÇÃO

A tabella 8 dá a taxa *t* da amortisação necessaria para amortisar um capital qualquer em *n* annos quando se conhece a taxa dos juros.

Exemplo: *Qual é a taxa* t *necessaria para amortisar um capital qualquer em 31 annos, sendo a taxa dos juros* 3 % ?

Acha-se na tabella que o numero correspondente a $t = 3$, $n = 31$ e $t = 0{,}019999$ ou approximadamente $t = 0{,}02$. Assim é necessario pagar cada anno 2 % do capital para amortisal-o em 31 annos.

Problema: *Pergunta-se a annuidade pela qual se póde pagar os juros a 3 % de um capital emprestado, e no mesmo tempo amortisal-o em 31 annos ?*

Taxa para amortisação	0,02
« » os juros	0,03
Total.	0,05

Assim, em 31 annos, com uma annuidade de 5 % do capital póde-se pagar os juros do capital emprestado, e amortisal-o.

TABELLA 9

Raizes quadradas e cubicas dos cem primeiros numeros, com sete decimaes

N	$\sqrt{N}$	$\sqrt[3]{N}$	N	$\sqrt{N}$	$\sqrt[3]{N}$
1	1,0000000	1,0000000	51	7,1414284	3,7084298
2	1,4142136	1,2599210	52	7,2111026	3,7325111
3	1,7320508	1,4422496	53	7,2801099	3,7562958
4	2,0000000	1,5874011	54	7,3484692	3,7797631
5	2,2360680	1,7099759	55	7,4161986	3,8029525
6	2,4494897	1,8171206	56	7,4833148	3,8258624
7	2,6457513	1,9129312	57	7,5498344	3,8485011
8	2,8284271	2,0000000	58	7,6157731	3,8708766
9	3,0000000	2,0800838	59	7,6811457	3,8929965
10	3,1622777	2,1544347	60	7,7459667	3,9148676
11	3,3166248	2,2239801	61	7,8102497	3,9364972
12	3,4641016	2,2894286	62	7,8740079	3,9578915
13	3,6055513	2,3513347	63	7,9372539	3,9790571
14	3,7416574	2,4101422	64	8,0000000	4,0000000
15	3,8729833	2,4662121	65	8,0622577	4,0207256
16	4,0000000	2,5198421	66	8,1240384	4,0412401
17	4,1231056	2,5712816	67	8,1853528	4,0615480
18	4,2426407	2,6207414	68	8,2462113	4,0816551
19	4,3588989	2,6684016	69	8,3066239	4,1015661
20	4,4721360	2,7144177	70	8,3666003	4,1212853
21	4,5825757	2,7589243	71	8,4261498	4,1408178
22	4,6904158	2,8020393	72	8,4852814	4,1601676
23	4,7958315	2,8438670	73	8,5440037	4,1793392
24	4,8989795	2,8844991	74	8,6023253	4,1983364
25	5,0000000	2,9240177	75	8,6602540	4,2171633
26	5,0990195	2,9624960	76	8,7177979	4,2358236
27	5,1961524	3,0000000	77	8,7749644	4,2543210
28	5,2915026	3,0365889	78	8,8317609	4,2726586
29	5,3851648	3,0723168	79	8,8881944	4,2908404
30	5,4772256	3,1072325	80	8,9442719	4,3088695
31	5,5677644	3,1413806	81	9,0000000	4,3267487
32	5,6568542	3,1748021	82	9,0553851	4,3444815
33	5,7445626	3,2075343	83	9,1104336	4,3620707
34	5,8309519	3,2396118	84	9,1651514	4,3795191
35	5,9160798	3,2710663	85	9,2195445	4,3968296
36	6,0000000	3,3019272	86	9,2736185	4,4140049
37	6,0827625	3,3322218	87	9,3273791	4,4310476
38	6,1644140	3,3619754	88	9,3808315	4,4479602
39	6,2449980	3,3912114	89	9,4339811	4,4647451
40	6,3245553	3,4199519	90	9,4868330	4,4814047
41	6,4031242	3,4482172	91	9,5393920	4,4979414
42	6,4807407	3,4760266	92	9,5916630	4,5143574
43	6,5574385	3,5033981	93	9,6436508	4,5306549
44	6,6332496	3,5303483	94	9,6953597	4,5468359
45	6,7082039	3,5568933	95	9,7467943	4,5629026
46	6,7823300	3,5830479	96	9,7979590	4,5788570
47	6,8556546	3,6088261	97	9,8488578	4,5947009
48	6,9282032	3,6342411	98	9,8994949	4,6104363
49	7,0000000	3,6593057	99	9,9498744	4,6260650
50	7,0710678	3,6840314	100	10,0000000	4,6415888

Universidade de S. Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Secção de Matemática

TABELLA 10

Taboa de logarithmos dos numeros primos de 1 a 1000 com dez decimaes

NUMEROS	LOGARITHMOS	NUMEROS	LOGARITHMOS	NUMEROS	LOGARITHMOS
1	0,0000000000	269	2,4297522800	619	2,7916906490
2	0,3010299957	271	2,4329692909	631	2,8000293592
3	0,4771212547	277	2,4424797691	641	2,8068580295
5	0,6989700043	281	2,4487063199	643	2,8082109729
7	0,8450980400	283	2,4517864355	647	2,8109042807
11	1,0413926852	293	2,4668676204	653	2,8149131813
13	1,1139433523	307	2,4871383755	659	2,8188854146
17	1,2304489214	311	2,4927603890	661	2,8202014595
19	1,2787536010	313	2,4955443375	673	2,8280150642
23	1,3617278360	317	2,5010592622	677	2,8305886687
29	1,4623979979	331	2,5198279938	683	2,8344207037
31	1,4913616938	337	2,5276299009	891	2,8394780474
37	1,5682017241	347	2,5403294748	701	2,8457180180
41	1,6127838567	349	2,5428254270	709	2,8506462352
43	1,6334684556	353	2,5477747054	719	2,8567288904
47	1,6720978579	359	2,5550944486	727	2,8615344109
53	1,7242758696	367	2,5646660643	733	2,8651039746
59	1,7708520116	373	2,5717088318	739	2,8686444384
61	1,7853298350	379	2,5786392100	743	2,8709381138
67	1,8260748027	383	2,5831937740	751	2,8756399370
71	1,8512583487	389	2,5899496013	757	2,8790958795
73	1,8633228601	397	2,5987905068	761	2,8813846568
79	1,8976270913	401	2,6031443726	769	2,8859263398
83	1,9190780924	409	2,6117233080	773	2,8881794939
89	1,9493900066	419	2,6222140230	787	2,8954747324
97	1,9867717343	421	2,6242820953	797	2,9014583214
101	2,0043213738	431	2,6344772702	809	2,9079485216
103	2,0128372247	433	2,6364878964	811	2,9091208542
107	2,0293837777	439	2,6424645202	821	2,9143431571
109	2,0374264979	443	2,6464037262	823	2,9153998352
113	2,0530784435	449	2,6522463410	827	2,9175055096
127	2,1038037210	457	2,6599162001	829	2,9185545306
131	2,1172712957	461	2,6637009254	839	2,9237619608
137	2,1367205672	463	2,6655809910	853	2,9309490312
139	2,1430148003	467	2,6693168806	857	2,9329808219
149	2,1731862684	479	2,6803355134	859	2,9339931638
151	2,1789769473	487	2,6875289612	863	2,9360107957
157	2,1958996524	491	2,6910914921	877	2,9429995934
163	2,2121876044	499	2,6981005456	881	2,9449759084
167	2,2227164711	503	2,7015679851	883	2,9459607036
173	2,2380461031	509	2,7067177823	887	2,9479236198
179	2,2528530310	521	2,7168377233	907	2,9576072871
181	2,2576785749	523	2,7185016889	911	2,9595183770
191	2,2810333672	541	2,7331972651	919	2,9633155114
193	2,2855573090	547	2,7379873263	929	2,9680157140
197	2,2944662262	557	2,7458551952	937	2,9717395909
199	2,2988530764	563	2,7505083949	941	2,9735896234
211	2,3242824553	569	2,7551122644	947	2,9763499790
223	2,3483048630	571	2,7566361082	953	2,9790929006
227	2,3560258572	577	2,7611758132	967	2,9854264741
229	2,3598854823	587	2,7686381012	971	2,9872192299
233	2,3673559210	593	2,7730546934	977	2,9893945637
239	2,3783979009	599	2,7774268224	983	2,9925535178
241	2,3820170426	601	2,7788744720	991	2,9960736545
251	2,3996737215	607	2,7831886911	997	2,9986951583
257	2,4099331233	613	2,7874604745	—	—
263	2,4199557485	617	2,7902851640	—	—

ALGUNS DADOS EXTRAHIDOS DA FE' DE OFFICIO DO AUTOR

Filho de Balbino Francisco Cavalcanti, nasceu a 11 de dezembro de 1865 em Palmeira dos Indios, Alagôas. A 6 de março de 1883, assentou praça voluntariamente no batalhão de engenheiros e no mesmo dia foi matriculado nas aulas do curso preparatorio da Escola Militar da Côrte, por aviso do Ministro da Guerra de 27 de fevereiro e foi incluido como addido na 2ª companhia do corpo de alumnos da mesma Escola.

A ordem do dia de 5 de janeiro de 1884 fez publico ter sido approvado com plenamente 9 em arithmetica e habilitado com gráo 1 em desenho. A 3 de agosto segue com a Escola para o Realengo fazendo parte da infantaria para exercicios. A 7 de novembro teve licença para tratar de seus interesses em Alagôas desde a terminação dos trabalhos praticos até o encerramento das matriculas no anno proximo vindouro.

A ordem do dia de 3 de janeiro de 1885 fez publico ter sido approvado com plenamente gráo 8 em algebra, 6 em geometria e trigonometria e simplesmente 3 em exercicios praticos, concluindo o curso preparatorio. A 17 de agosto seguiu com a Escola para a Imperial Fazenda de Santa Cruz afim de tomar parte nos exercicios geraes alli realizados, regressando a 26.

A ordem do dia escolar, de janeiro de 1886, fez publico ter sido approvado com plenamente gráo 9 nas 1ª e 2ª cadeiras e exercicios praticos, gráo 8 em desenho, tudo do 1° anno do curso superior, concluindo assim o curso de infantaria e cavallaria pelo regulamento de 1881. A 1 de março foi matriculado no 2° anno.

A ordem do dia escolar de 3 de janeiro de 1887 fez publico ter sido approvado com plenamente 7 na 2ª cadeira, 6 em descriptiva e reprovado na 1ª cadeira (geometria analytica, calculo differencial e integral). A 3 de março foi transferido para a 2ª companhia e nomeado sargenteante. A ordem do dia de 1 de junho fez publico, mandar contar como tempo de sargenteação o periodo de 5 de janeiro á 21 de fevereiro do anno findo em que como sargento arvorado, sargenteou satisfactoriamente a 4ª companhia. A ordem do dia escolar de 8 fez publico ter sido dispensado da sargenteação por haver concluido o tempo com aproveitamento, sendo elogiado pelo modo zeloso e dedicado por que sempre se houve no exercicio de suas funcções.

A ordem do dia escolar de 25 de janeiro de 1888 fez publico ter sido approvado com plenamente 9 na 1ª cadeira (geometria e calculo). A 1º de março foi matriculado no 3º anno.

Por decreto de 16 de janeiro de 1889 foi nomeado alferes-alumno.

A ordem do dia escolar de 4 de fevereiro fez publico ter sido approvado com plenamente 9 na 2ª cadeira, 6 em desenho e reprovado na 1ª cadeira (mecanica). A 20 de fevereiro foi nomeado subalterno da 4ª companhia. A 7 de março foi desligado e apresentou-se á Escola Superior de Guerra, sendo elogiado pelo modo correcto com que exerceu as funcções de subalterno. A 27 foi addido ao 22º batalhão de infantaria, sendo desligado a 3 de maio e apresentado á Escola Superior de Guerra. Em ordem do dia regimental do batalhão, foi louvado pelo comportamento durante o tempo que serviu no mesmo. Pelo aviso do Ministro da Guerra de 5 de julho, foi matriculado na aula da 1ª cadeira do 2º anno (mecanica). Approvado com plenamente 8 na 1ª cadeira e na pratica do 2º anno, habilitado em chimica organica, noções de calculo das variações, concluindo o curso de artilharia pelo regulamento de 9 de março do presente anno.

A ordem do dia escolar de 26 de dezembro, fez publico ter o Ministro da Guerra, mandado desligar da Escola, afim de exercer o cargo de ajudante de ordens do Governador do Estado de Alagôas, para onde seguiu a 31.

Por decreto de 4 de janeiro de 1890, foi promovido a 2° tenente na arma de artilharia, sendo classificado no 1° batalhão de engenheiros. A 17 de março, foi promovido a 1° tenente sendo incluido no estado effectivo do referido 1° batalhão de engenheiros. A 18 de março deixou o cargo de ajudante de ordens do Governador de Alagôas por ter solicitado sua exoneração, sendo louvado pelo brio, intelligencia e lealdade com que exerceu o cargo, tornando-se um auxiliar valioso do Governo do Estado. A 1 de abril apresentou-se á Escola Superior de Guerra sendo matriculado no 3° anno.

A ordem do dia escolar de 27 de janeiro de 1891 fez publico ter sido approvado com gráo 8 na 1ª cadeira, 7 na 2ª, 8 em desenho e 9 em exercicios praticos. A 22 de março foi matriculado nas aulas do 4° anno. A 22 de dezembro, foi promovido a capitão para o estado maior da arma.

A ordem do dia de 4 de janeiro de 1892 fez publico ter sido approvado com plenamente 9 na 1ª cadeira, 10 distincção na 2ª e 9 na 3ª, 6 em desenho, 8 em exercicios praticos, concluindo o curso de estado maior e engenharia pelo regulamento de 1889. A 7 de janeiro, por portaria do Ministro da Guerra, foi nomeado commandante da 4ª companhia de alumnos da Escola Militar da Praia Vermelha. A 9 de janeiro contractou matrimonio com D. Anna Olinda do Rego Rangel. A ordem do dia escolar de 24 de janeiro fez publico ter sido louvado por ter concorrido com risco de vida para o triumpho da Republica.

Por portaria de 1 de março foi nomeado coadjuvante do ensino theorico da Escola sendo designado para leccionar uma turma de algebra elementar.

Pela ordem do dia 29 de março de 1893 passou a exercer interinamente as funcções de instructor de escripturação militar.

Por portaria do Ministro da Guerra de 18 de março de 1894, foi nomeado major da praça da Fortaleza de Villegaignon. A 17 de agosto foi, a pedido, exonerado desse cargo, sendo louvado pelos serviços que prestou. Por portaria de 15 de novembro, foi pelo Sr. Vice-presidente da Republica, mandado elogiar pelos bons serviços que tem prestado com a

maxima dedicação, zelo e intelligencia na ardua missão de fortificar e artilhar o porto da Capital Federal.

A ordem do dia escolar de 31 de janeiro de 1896 fez publico ter sido dispensado da regencia interina da 1ª cadeira do curso das tres armas (geometria analytica e calculo) e de exercicio do cargo de lente subalterno da 4ª secção do curso geral (topographia).

A 30 de março de 1897 foi nomeado para reger a 2ª turma de arithmetica. A 26 de agosto foi nomeado lente subalterno da 2ª secção do curso superior (hydraulica, pontes e estradas), A 1 de novembro, passou a coadjuvar o professor do 4° anno, deixando o cargo de repetidor da 1ª cadeira (geometria e calculo). A 19 de abril de 1898 foi nomeado instructor da 8ª secção da Escola Militar do Brasil (descripção e uso dos instrumentos de astronomia e geodesia). A 25 de maio foi nomeado para coadjuvar o ensino theorico da mesma escola, afim de reger uma turma de tactica. A 14 de junho foi, a pedido, transferido para a 6ª secção do ensino pratico (reconhecimentos de E. Maior, tactica e estrategia).

A 3 de março de 1899 foi transferido para o 3° batalhão de artilharia. A 7 de abril deixou o exercicio de instructor da 6ª secção.

A 1 de abril foi designado para reger turma de equiparantes da 3ª cadeira do 2° anno do curso geral (tatica, estrategia e historia militar). O Ministro da Guerra, em aviso de 22 de julho, mandou elogial-o em nome do Sr. Presidente da Republica pelo seu concurso para o bom conceito de que goza a administração da Escola, em relação a cuja direcção, lisongeiramente manifestou o mesmo Sr. Presidente a sua satisfação na visita pouco antes realizada; o commandante da Escola em ordem do dia de 29 do mesmo, fazendo publico esse elogio, patenteou o seu reconhecimento pelo auxilio leal e prestimoso que tem prestado na delicada missão que lhe foi confiada de dirigir o mais importante instituto de educação militar de nossa Patria.

A ordem do dia de 24 de outubro fez publico ter passado a exercer a regencia de uma turma da 3ª cadeira do 2° anno do curso geral (tactica), modificando assim o caracter de coadjuvante interino do ensino theorico para que fôra

nomeado e que foi mantido até agora por força das circunstancias e necessidades do ensino, mas que inhibiu de accumulativamente ter o exercicio de instructor da 6ª secção pratica, para que tambem teve a nomeação effectiva, funcção que igualmente assumiu com a responsabilidade da carga do material respectivo do gabinete, visto não só o permittir o seu estado de saúde, como tambem annuindo em ser a sua situação normalizada por esse modo.

A ordem do dia escolar de 17 de janeiro de 1900 fez publico ter o commandante da Escola declarado dever-lhe toda gratidão pela sua grande correcção no desempenho de seus importantes deveres: pelo apoio moral durante sua administração e ainda pela exemplar cordialidade que sempre manteve com os seus collegas em todos os actos collectivos sob a presidencia do mesmo commando. Por portaria de 28 de maio foi nomeado ajudante interino da 2ª secção da aula de cartas geographicas. Por decreto de 14 de agosto, foi transferido para o estado maior da arma de artilharia.

Por decreto de 31 de maio de 1901 foi transferido para o corpo de engenheiros de accordo com a resolução de 12 de abril. A 14 de julho apresentou-se á Direcção de Engenharia. continuando, porém, em serviço na Escola Militar do Brasil, como coadjuvante do ensino theorico.

A ordem do dia escolar de 8 de abril de 1902 fez publico, ter passado de auxiliar da aula do 2º anno do curso especial, a exercer as mesmas funcções junto ao professor da aula do 1º anno do mesmo curso.

A ordem do dia escolar, de 15 de abril de 1903, fez publico ter nessa data passado a ter o mesmo exercicio que no anno proximo findo, de accordo com o resolvido em secção do Conselho de Instrucção de 27 de março ultimo.

Em abril de 1904, em virtude da resolução do dito conselho, foi mandado considerar no caracter de adjunto da 2ª secção da aula graphica em exercicio junto ao professor da aula do 1º anno do curso especial (astronomia).

A ordem do dia escolar de 16 de agosto, fez publico que o Sr. general Carlos Eugenio, ao deixar o Commando da Escola, declara ser-lhe grato, obedecendo aos dictames da mais rigorosa justiça, lhe dirigir os mais encomiasticos louvores e

sinceros cumprimentos pela dedicação e esforço com que se entregava aos arduos labores de sua nobre e honrosa tarefa, transmittindo aos seus discipulos com a autoridade da palavra de mestre proficiente e zeloso, os ensinamentos necessarios á preparação de sua intellectualidade e ao seu ser moral, para as lutas do porvir e para o tirocinio de sua carreira no desempenho de commissões e serviços de diversas ordens ligados á profissão das armas, ainda se fazendo recommendado e digno de todo acatamento pela solidariedade com que manteve o prestigio da corporação de que faz parte, concorrendo para elevar ao nivel em que deve pairar o ensino, principalmente o de ordem superior, como elemento de progresso e de adeantamento de nossa nacionalidade.

Por aviso de 16 de novembro do Ministro da Guerra, foi mandado apresentar ao Estado Maior do Exercito, afim de serem seus serviços aproveitados no respectivo corpo, emquanto se conservar fechada a Escola Militar do Brasil, interrompendo assim o seu exercicio no magisterio. A 18 apresentou-se á direcção geral de engenharia.

Por aviso do Ministro da Guerra de 11 de abril de 1905, foi desligado provisoriamente da dita direcção, afim de tomar parte nos exames que vão se realizar na E. Militar. A 2 de setembro, apresentou-se á direcção de engenharia, por ter concluido os trabalhos de congregação da Escola Militar do Brasil. A 21 de outubro foi novamente desligado da direcção por ter de tomar parte nos trabalhos da congregação da Escola. O Sr. general director, em ordem do dia dessa data, o louvou pela coadjuvação com intelligencia e zelo. Ainda nessa data apresentou-se á dita Escola onde foi tomar parte nas bancas de exames relativos ao periodo lectivo de 1904, aos quaes foram mandados submetter os ex-alumnos que se envolveram nos acontecimentos de 14 de novembro já referidos.

A 2 de abril de 1906, apresentou-se á direcção geral de engenharia, por ter terminado os trabalhos na Escola Militar do Brasil. O Ministro da Guerra, em aviso de 20, mandou-o servir no Collegio Militar, onde se apresentou a 27 e foi designado para reger a aula de topographia e legislação de terras na unica turma do 7° anno.

A 27 de maio de 1907, apresentou-se á direcção de engenharia por ter sido desligado d'aquelle Collegio.

Por decreto de 17 de dezembro de 1908 é graduado no posto de major, sendo promovido a 23 de setembro de 1909.

Por decreto de 15 de março de 1911, foi-lhe concedido reforma, por contar mais de 25 annos de serviço, conforme publicou o *Diario Official* dessa data.

Universidade de S. Paulo
Matemática